Ehlermanns Mathematisches Unterrichtswerk

Von Otto Köhler und Ulrich Graf

2

Ehlermanns Mathematisches Unterrichtswerk für höhere Schulen

Herausgegeben von

Otto Köhler und **Ulrich Graf**

Band II

(3. bis 5. Klasse)

Mit 444 Bildern,
einer Zahlentafel und einem Planzeiger

Bestellnummer 3131

4. Auflage

1944

L. Ehlermann · Verlagsbuchhandlung · Dresden

Inhaltsverzeichnis.

3. Klasse.

4. Klasse.

5. Klasse.

Dem Buche liegt eine vierseitige Zahlentafel (Quadratzahlen usw.) und ein Planzeiger bei.

Verdeutschung einiger Fachausdrücke.

absolute Zahl	Zahl ohne Vorzeichen, Grundwert
Abszisse	x-Wert
Affinität	Parallelverwandtschaft
Algebra	Gleichungslehre
algebraische Summe	mehrgliedriger Ausdruck (mit + und −)
algebraische Zahl	Zahl mit Vorzeichen
Analysis	Plan, Voruntersuchung
Arithmetik	Zahlenlehre
axiale Symmetrie	Spiegelung an einer Geraden
Axiom	Grundsatz
Determination	Grenzbetrachtung
exzentrisch	ungleichmittig
Funktion	abhängige Veränderliche
Geometrie	Formlehre (wörtl. Erdmessung)
homolog	entsprechend
Indexzahlen	Richtzahlen
Interpolation	Einschaltung
interpolieren	einschalten, Zwischenschalten
invariant	unveränderlich
Koëffizient	Vorzahl
kongruent	deckungsgleich
Kongruenz	Deckungsgleichheit
konkav	hohl
konstant	fest, unveränderlich
Konstante	Festwert
konstruieren	zeichnen (i. d. Ebene), bauen (i. Raum)
Konstruktion	Ausführung, Beschreibung, Zeichnung
konvex	erhaben
konzentrisch	gleichmittig
koordiniert	zugeordnet
Koordinaten	Standgrößen, Gitterzahlen, Netzzahlen
Koordinatenanfang	Nullpunkt
Koordinatensystem	Gitter
Kugelzone	Kugelgürtel
Nomogramm	graphische Rechentafeln
Oktaeder	(regelmäßiges) Achtflach
Ordinate	y-Wert
Peripheriewinkel	Umfangswinkel
Polyeder	Vielflach
Polygon	Vieleck
Polynom	vielgliedriger Ausdruck
Primzahl	Grundzahl, Grundteiler
Projektion	Abbildung (als Vorgang), Bild, Riß (als Ergebnis)
Projektionsebene	Bildebene, Rißebene
Projektionsstrahl	Abbildungs-, Blickstrahl
projizieren	werfen
Proportion	Verhältnisgleichung
proportional	verhältnisgleich
Proportionale	Verhältnisglied
Proportionalitätsfaktor	Verhältniszahl
Quadrant	Viertel, Feld
radizieren	Wurzel ziehen
relative Zahl	Zahl mit Vorzeichen
Rhombus	Raute
Skala	(Zahlen-) Leiter
Stereometrie	Raumlehre, -messung
substituieren	einsetzen, ersetzen
Symmetrie	Spiegelung, Ebenmaß
Symmetrieachse	Achse, an der gespiegelt wird
Symmetriezentrum	Punkt, an dem gespiegelt wird
symmetrisch	spiegelbildlich
Tetraeder	(regelmäßiges) Vierflach
Transversale	Querlinie
Trapez	Vierfuß (Tisch)
Variable	Veränderliche
visieren	peilen, anpeilen
Visierlinie	Peilrichtung
Zentrale	Verbindungsgerade mit Mittelpunkt
zentrale Symmetrie	Spiegelung an einem Punkt
Zentriwinkel	Mittelpunktswinkel
Zylinder	Walze

Bemerkung: Zum leichteren Auffinden bei Rückverweisungen auf Band I wird auf das alphabetische Sachverzeichnis (Bd. I) aufmerksam gemacht.

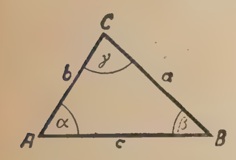
Für die Aufbauschulen beziehen sich diese Rückverweisungen auf das Ergänzungsheft. Auch dieses hat ein alphabetisches Sachverzeichnis.

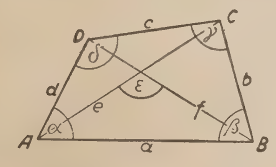
Abkürzungen und Bezeichnungen.

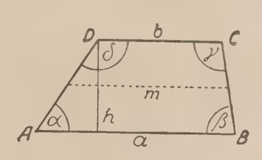
Die Zeichen +; −; ·; :; =; %; ‰; °; ′; ″; ⋯; sowie die Bezeichnungen von Punkt, Gerade, Strahl, Strecke und Winkel s. Bd. I.

| |	absoluter Betrag	⧺	gleich und parallel
≠	ungleich, verschieden von	∦	nicht parallel
≈	angenähert, ungefähr gleich	⊥	senkrecht auf, zu
≡	identisch gleich	∟	rechter Winkel
≙	entspricht	∢	Winkel
=	gleich, auch inhaltsgleich	□	Quadrat
∼	ähnlich, gestaltsgleich	▭	Rechteck
≅	deckungsgleich, kongruent	△	Dreieck
∞	unendlich	○	Kreis
∥	parallel	⌐(—)	Teilstrich

Die Bilder zeigen Bezeichnungen am Dreieck, Viereck und Trapez.

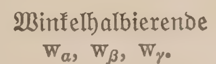




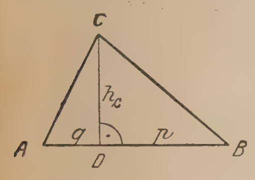


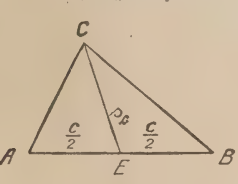
Höhen und -abschnitte h_a, h_b, h_c p, q;

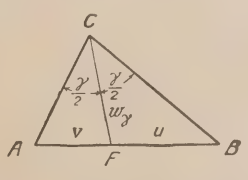
Seitenhalbierende s_a, s_b, s_c;



Winkelhalbierende w_α, w_β, w_γ.







Weitere Bezeichnungen: Halbmesser r, ϱ, Umfang u, Flächeninhalt F, Grundfläche G, Mantel M, Oberfläche O, Rauminhalt V; Flächen- bzw. Körperdiagonale d, Seitenkante bzw. Mantellinie s.

Lies: 𝔄, 𝔞 als deutsch A, a — $\bar{A}$ „ A quer — A' „ A Strich

A'' als A zwei Strich — A_1 „ A eins — A_2 „ A zwei

A_2' als A zwei — Strich — (𝔄) „ A umgelegt

Einige griechische Buchstaben.

α	β	γ	δ	ε	λ	π	ϱ	σ	φ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Lambda	Pi	Rho	Sigma	Phi
a	b	g	d	e	l	p	r	s	ph

3. Klasse.

I. Übergang zu den allgemeinen Zahlen.

1. Abschnitt: Auswerten von Buchstabenausdrücken.

1. Zwischen dem Einkaufspreis (E), dem Gewinn (G) oder Verlust (V) und dem Verkaufspreis (V_p) einer Ware bestehen Formeln[1], mit deren Hilfe sich alle Aufgaben dieser Art lösen lassen (Bd. I): **Gewinn und Verlust**

I. a) $V_p = E + G$ b) $G = V_p - E$ c) $E = V_p - G$

II. a) $V_p = E - V$ b) $V = E - V_p$ c) $E = V_p + V$

2. Ergänze die folgende Tabelle:

	E ℛℳ	G ℛℳ	V_p ℛℳ		E ℛℳ	V ℛℳ	V_p ℛℳ
a)	53,75	4,75	?	d)	16,45	2,60	?
b)	37,35	?	45,80	e)	43,25	?	39,75
c)	?	27,35	151	f)	?	17,25	119,50

3. Der Flächeninhalt eines Quadrats mit der Seite 3 cm ist (Bd. I)

$$F = 3 \cdot 3 = 3^2 \text{ qcm}.$$

Entsprechend schreibt man für das Quadrat mit der Seite a

$$F = a \cdot a = a^2.$$ $F = a^2$

Berechne nach dieser Formel F, wenn die Quadratseite
a) a = 5 cm, **b)** 7 mm, **c)** $4\frac{1}{2}$ cm, **d)** 3,5 m, **e)** 7,8 m lang ist.

Bemerkungen: Beachte wie früher beim Rechnen mit benannten Zahlen:

1. Nur gleichbenannte Größen darf man zuzählen und abziehen, das Ergebnis erhält wieder die gemeinsame Benennung; kurz:

Nur gleichartige Größen kann man addieren oder subtrahieren.

2. Nur Zahlen werden malgenommen oder geteilt, nicht m, km, Std., Tage, Jahre, ℛℳ u. dgl.

4. Der Rauminhalt eines Würfels mit der Kante 3 cm ist (Bd. I)

$$V = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 \text{ ccm}.$$

Entsprechend ist der Rauminhalt V des Würfels mit der Kante a

$$V = a \cdot a \cdot a = a^3$$ $V = a^3$

a)—e) Berechne V für die Werte a der Würfelkante aus Nr. 3a—e.

5. Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten 3 cm und 4 cm ist

$$F = 3 \cdot 4 = 12 \text{ qcm}^{2)}$$ (Bd. I),

entsprechend schreibt man für das Rechteck mit den Seiten a und b

$$F = a \cdot b.$$ $F = a \cdot b$

---

[1] lat. formula = Redensart, Vorschrift. [2] Nach den Vorschriften des AEF darf für qm auch m², für cbm auch m³ gebraucht werden; entsprechend cm², cm³ usw.

Berechne F, wenn

	a)	b)	c)	d)
	$a = 2$ cm	8 m	$5\frac{1}{2}$ cm	7,4 m
	$b = 3$ cm	11 m	$7\frac{1}{2}$ cm	13 dm ist.

6. Der Rauminhalt eines Quaders mit den Kanten 3 cm, 4 cm und 5 cm ist $V = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$ ccm. (Bd. I).
Der Inhalt V des Quaders mit den Kanten a, b, c ist

$V = a \cdot b \cdot c$

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Berechne unter Benutzung der Werte für a und b aus Nr. 5a ⋯ d den Rauminhalt V, wenn c die Werte hat:
a) 11 cm b) 3 m c) 20 cm d) 2,5 dm.

7. Legt ein Radfahrer in 1 Std. 16 km zurück, so sagt man, er hat die Geschwindigkeit $v = 16$ km/std.
a) Welche Strecke s legt er in $t = 2$ Std. reiner Fahrzeit zurück?
b) Stelle die Formel zur Berechnung von s allgemein auf.

Weg Berechne danach die Wege in der nebenstehenden Tafel:

	Art der Bewegung	Geschwindigkeit v km/std	Zeit t Std.
c)	Fußgänger	5	$3\frac{1}{2}$
d)	Radfahrer	16	$2\frac{3}{4}$
e)	Auto	60	$2\frac{1}{2}$
f)	D-Zug	90	$2\frac{1}{4}$
g)	Flugzeug	270	2 Std. 40 Min.

Geschwindigkeit **8.** Ein Fußgänger legt den Weg $s = 15$ km in $t = 3$ Std. zurück.
a) Wieviel km legt er in 1 Std. zurück? Die so erhaltene Zahl gibt die Geschwindigkeit v (km/std) an, die also durch den in 1 Std. zurückgelegten Weg gemessen wird.
b) Stelle die Formel zur Bestimmung von v allgemein auf.

Berechne danach die Geschwindigkeiten v nach der nebenstehenden Zusammenstellung:

	Art der Bewegung	Weg s km	Zeit t Std.
c)	Pferd im Trab	10,8	$\frac{3}{4}$
d)	Schnelldampfer	648	15
e)	Kriegsschiff	162	$4\frac{1}{2}$
f)	Torpedoboot	126	$1\frac{3}{4}$
g)	Schwimmer	0,8	$\frac{1}{3}$

Zeit **9.** Der Volkswagen kann als Dauerleistung auf der Reichsautobahn die Geschwindigkeit von $v = 100$ km/std aufweisen.
a) In welcher kürzesten Zeit t kann man mit dem Volkswagen die $s = 250$ km lange Strecke der Reichsautobahn Dresden—Weimar (Leipzig—Nürnberg) zurücklegen?
b) Stelle die Formel zur Berechnung der Zeit t allgemein auf. Berechne danach die Zeitdauer t der Bewegung nach der nebenstehenden Zusammenstellung:

	Art der Bewegung	Weg s km	Geschwindigkeit v km/std
c)	Starker Wind	54	45
d)	Luftschiff	4200	126
e)	Brieftaube	180	80
f)	Golfstrom	9000	3,6

10. In der einfachen Zinsrechnung (Bd. I) treten folgende Formeln auf: Zinsrechnung

a) zur Berechnung der Zinsen: $z = \frac{k \cdot i \cdot p}{100}$ RM, $z = \frac{k \cdot t \cdot p}{100 \cdot 360}$ RM

b) „ „ des Zinsfußes: $p = \frac{100 \cdot z}{k \cdot i}$ v. H., $p = \frac{100 \cdot z \cdot 360}{k \cdot t}$ v. H.

c) „ „ des Kapitals: $k = \frac{100 \cdot z}{i \cdot p}$ RM, $k = \frac{100 \cdot z \cdot 360}{t \cdot p}$ RM

d) „ „ der Zeit: $i = \frac{100 \cdot z}{k \cdot p}$ Jhr., $t = \frac{100 \cdot z \cdot 360}{k \cdot p}$ Tg.

Zur Herleitung: a) Wieviel Zinsen (z) bringen $k = 1680$ RM Kapital zu $p = 3\frac{1}{2}\%$ in $i = 4$ Jhr.?[1)]

Ansatz: 100 RM K. br. in 1 Jhr. $\frac{7}{2}$ RM Z.
1680 RM „ „ „ 4 „ z RM „

$z = \frac{7 \cdot 1680 \cdot 4}{2 \cdot 100}$ RM $= \underline{\underline{235{,}20 \text{ RM}}}$

Ansatz: 100 RM K. br. in 1 Jhr. p RM Z.
k RM „ „ „ i „ z RM „

$z = \frac{p \cdot k \cdot i}{100}$ RM Zinsen.

b) $k = 748$ RM bringen in $i = \frac{1}{4}$ Jhr. $z = 9{,}35$ RM Zinsen. Zu welchem Zinsfuß (p) ist das Kapital ausgeliehen?

Ansatz: 748 RM K. br. in $\frac{1}{4}$ Jhr. 9,35 RM Z.
100 RM „ „ „ 1 „ p RM „

$p = \frac{9{,}35 \cdot 100}{748 \cdot \frac{1}{4}}\% = \underline{\underline{5\%}}$

Ansatz: k RM br. in i Jhr. z RM Z.
100 RM „ „ 1 „ p RM „

$p = \frac{z \cdot 100}{k \cdot i}\%$

c) Welches Kap. (k) bringt zu $p = 4\%$ in $i = 3$ Jhr. $z = 72$ RM Zins.?

Ansatz:
4 RM Z. kommen in 1 Jhr. v. 100 RM K.
72 RM „ „ „ 3 „ „ k RM „

$k = \frac{100 \cdot 72}{4 \cdot 3}$ RM $= \underline{\underline{600 \text{ RM}}}$

Ansatz:
p RM Z. kommen in 1 Jhr. v. 100 RM K.
z RM „ „ „ i „ „ k RM „

$k = \frac{100 \cdot z}{p \cdot i}$ RM Kapital

d) In welcher Zeit (i) bringen $k = 450$ RM zu $p = 4\%$ $z = 15$ RM Zins.?

Ansatz: 100 RM K. br. 4 RM Z. in 1 Jhr.
450 RM „ „ 15 RM „ „ i „

$i = \frac{15 \cdot 100}{4 \cdot 450}$ Jhr. $= \frac{5}{6}$ Jhr. $= \underline{10 \text{ Mon.}}$

Ansatz: 100 RM K. br. p RM Z. in 1 Jhr.
k RM „ „ z RM „ „ i „

$i = \frac{z \cdot 100}{p \cdot k}$ Jhr.

11. Berechne mit Hilfe der Formeln Nr. 10a—d die fehlenden Größen:

	k	i	p	z	?	k	i	p	z
a)	540	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$	?	e)	120	5 Jhr. 8 Mon.	3,75	?
b)	?	$1\frac{2}{3}$	$4\frac{1}{2}$	135	f)	?	3 Mon. 20 Tg.	4,8	3,52
c)	460	?	$3\frac{3}{4}$	34,50	g)	1800	?	4,75	47,50
d)	6400	$\frac{3}{4}$	?	264	h)	1200	2 Mon. 12 Tg.	?	15

12. Bemerkung: a) Alle in diesem Abschnitt bisher behandelten Aufgaben zeigen den großen Rechenvorteil, den die Aufstellung von Formeln für die Lösung von Aufgaben einer bestimmten Art hat; denn jede besondere Aufgabe dieser Art läßt sich mit Hilfe der einen allgemeinen Formel lösen.

[1)] Werden die Zinsen des ersten Jahres dem Kapital zugeschlagen, so müssen sie im nächsten Jahre mit verzinst werden. Diese Aufgaben führen auf die sog. Zinseszinsrechnung. Für Leihkapital dürfen Zinseszinsen nicht genommen werden!

Allgemeine Zahlen

b) Solche Formeln werden noch in vielen anderen Fällen aufgestellt und benutzt; hierbei bezeichnet man noch nicht näher bestimmte Zahlen durch Buchstaben. Die Buchstaben haben dann die Bedeutung von allgemeinen Zahlen. Bekannte Zahlen bezeichnet man dabei in der Regel mit den ersten, unbekannte Zahlen mit den letzten Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabets. In derselben Aufgabe darf man einen Buchstaben immer nur für dieselbe Größe (Zahl) benutzen.
c) Der Teil der Mathematik, der sich mit dem Rechnen mit allgemeinen Zahlen beschäftigt, heißt Arithmetik[1].

13. In Nr. 1 trat die Summe und die Differenz, in Nr. 5 das Produkt, in Nr. 8 der Quotient der gegebenen Größen auf. Berechne jetzt für die Werte a und b der nebenstehenden Tabelle

die Summe $s = a + b$,
die Differenz $d = a - b$,
das Produkt $p = a \cdot b$,
den Quotienten $q = \frac{a}{b}$.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
a =	9	12	15	7,2	12,1	$6\frac{2}{3}$	$7\frac{1}{5}$
b =	3	8	4	2,4	1,1	$3\frac{3}{5}$	2,7

Beachte: In diesen vier Formeln sind alle Rechenaufgaben der vier einfachen Rechenarten enthalten, die nur aus zwei Gliedern bestehen. Wie kurz und doch wie umfassend ist diese mathematische Schreibweise[2]!

Gerade und ungerade Zahlen

14. a) Setze in $g = 2n$ für n die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 usw. ein. b) Desgl. in $u_1 = 2n + 1$. c) Desgl. in $u_2 = 2n - 1$. Was für Zahlen erhältst du bei a), b), c)? d) Durch welche einfache Formel kann man also alle geraden und e) durch welche alle ungeraden Zahlen ausdrücken? f) Welche ganze Zahl folgt auf $g = 2n$, welche geht ihr voran?

15. Wie heißt die Zahl, die um 1; 2; 3; 4 ... k a) größer, b) kleiner ist als n?

16. a) Setze in $z = 10 \cdot a + b$ für a die Werte 3; 5; 9; 4 und für b die Werte 7; 4; 1; 0 ein. b) Unsere gewöhnliche Zahlenschreibweise (Stellenwert der Ziffern) ist eine abgekürzte. Was bedeutet ausführlich 75; 61; 92? c) Durch welche Formel kann man also allgemein eine zweistellige, d) dreistellige, e) vierstellige Zahl wiedergeben? f) Wie ist die zweistellige Zahl zu schreiben, die aus $10 \cdot a + b$ durch Vertauschung der Ziffern hervorgeht?

17. Berechne nach Tabelle Nr. 13 $x = 2a + 3b$ und $y = 5a - 2b$.

Erkl.: Vor den allgemeinen Zahlen (Buchstaben) stehende ganze oder gebrochene Zahlen heißen Vorzahlen[3].

Vorzahl

Strecken

18. Berechne und zeichne unter Benutzung der nebenstehenden Übersicht:

$x = a + b + c$
$y = 2a + b - c$
$z = 2a + 3b - 2c$

	a)	b)	c)	d)	e)
a =	6 cm	4,2 cm	37 mm	$5\frac{1}{4}$ cm	10,2 cm
b =	3 cm	6,9 cm	19 mm	$2\frac{1}{2}$ cm	11 mm
c =	8 cm	8,5 cm	51 mm	6,5 cm	5,7 cm

[1] griech. arithmos = Zahl. [2] Siehe Anhang I.
[3] auch Koëffizienten, lat. coefficere = zusammenwirken.

Benutze zur Auswertung der folgenden Buchstabenausdrücke die nebenstehende Zusammenstellung:

	a)	b)	c)
a =	10	14,3	$4\frac{1}{2}$
b =	5	5,2	$2\frac{1}{4}$
c =	8	3,9	$1\frac{1}{8}$
d =	4	2,6	$1\frac{1}{2}$

19. $x = a \cdot c + b \cdot d$ **20.** $y = a \cdot b - c \cdot d$

21. $z = 10 - \frac{a}{c}$ **22.** $u = a \cdot d - \frac{b}{c}$

23. $v = \frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ **24.** $w = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

2. Abschnitt: Einfachste Gleichungen.

1. Der Gewinn $G = 150$ *RM* an einer Ware ist gleich dem Unterschied aus Verkaufspreis $V_p = 750$ *RM* und Einkaufspreis $E = 600$ *RM*.

$750 - 600 = 150$, allgemein: $V_p - E = G$. (*)

Jede der in dieser Gleichung vorkommenden Größen kann bestimmt werden, wenn die beiden anderen bekannt sind (S. 1). Man nennt daher eine solche Gleichung genauer auch Bestimmungsgleichung. **Bestimmungsgleichung**

Dasselbe gilt auch für die anderen Ausdrücke I und II (S. 1).

2. a) Zählt man in der Gleichung (*) auf beiden Seiten den Einkaufspreis zu, so erhält man aus:

$$750 - 600 = 150, \qquad \text{allgemein:} \qquad V_p - E = G$$
$$750 - 600 + 600 = 150 + 600 \qquad V_p - E + E = G + E \quad (1)$$
$$750 = 150 + 600. \qquad V_p = G + E.$$

b) Durch eine entsprechende Überlegung erhält man aus

$$E + G = V_p \text{ (in Worten?)}$$
$$E + G - G = V_p - G \quad (2)$$
$$E = V_p - G.$$

c) Aus der bekannten Geschwindigkeit $v = 15$ km/std eines Radfahrers und seiner Fahrzeit $t = 4$ Std. erhält man den von ihm zurückgelegten Weg s.

$$15 \cdot 4 = 60, \quad \text{allgemein} \quad v \cdot t = s.$$

Teilt man beide Seiten durch die Geschwindigkeitszahl, so erhält man jedesmal die Fahrzeit.

$$\frac{15 \cdot 4}{15} = \frac{60}{15} \qquad \frac{v \cdot t}{v} = \frac{s}{v} \quad (3)$$
$$4 = \frac{60}{15}. \qquad t = \frac{s}{v}.$$

d) Durch eine entsprechende Überlegung findet man:

$$\frac{s}{t} = v$$
$$\frac{s \cdot t}{t} = v \cdot t \quad (4)$$
$$s = v \cdot t.$$

Grundsätze

3. Bei diesen Umwandlungen (1⋯4) sind folgende Grundsätze benutzt worden:

I. **Gleiches um Gleiches vermehrt gibt Gleiches.** (1)
II. **Gleiches um Gleiches vermindert gibt Gleiches.** (2)
III. **Gleiches mit Gleichem malgenommen gibt Gleiches.** (4)
IV. **Gleiches durch Gleiches geteilt gibt Gleiches.** (3)

Erkl.: Unter einem Grundsatz versteht man einen Satz, dessen Richtigkeit man als selbstverständlich einsieht.

Man kann sich diese Grundsätze z. B. folgendermaßen klarmachen: Auf der linken Schale einer Waage, die sich im Gleichgewicht befindet, liegen 5 Tafeln Schokolade und 5 20-g-Stücke, auf der rechten Seite 5 100-g-Stücke. Wie erhält man das Gewicht der Schokolade?

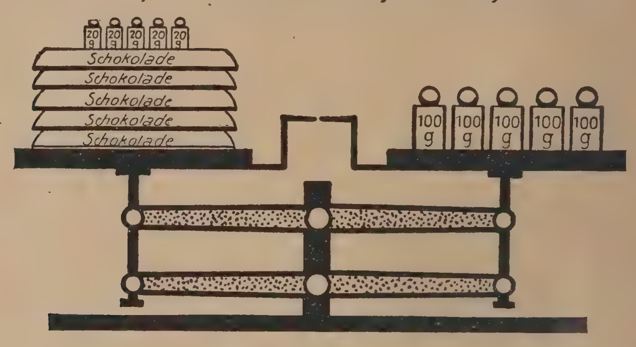


Bild 1.

4. Wie ändert sich das Gleichgewicht der Waage, wenn man z. B. **a)** noch 50 g auf beide Seiten legt, **b)** 100 g von beiden Seiten fortnimmt, **c)** auf beide Schalen das Dreifache, **d)** nur den 5. Teil der ursprünglichen Belastung legt?

Weitere Grundsätze

5. Zu den Grundsätzen I⋯IV treten noch hinzu:

V. Gleiche Größen kann man für einander setzen.
VI. Sind 2 Größen einer 3. gleich, so sind sie auch untereinander gleich.

Beide Grundsätze gehören eng zusammen. Mathematisch stellt sich dies so dar:

V. $a = b$, $\underline{b = c}$[1], $a = c$ VI. $a = b$, $\underline{c = b}$, $a = c$

Umsetzungsregeln

6. Beschreibe die Umwandlung in den folgenden Gleichungen a) bis d) unter Benutzung der Grundsätze I⋯IV:

a) $x + 7 = 21$ $x + b = a$
$\underline{\quad 7 = 7}$ $\underline{\quad b = b}$ Grundsatz II gibt:
$x = 21 - 7$ $x = a - b$ d. h.

1. Regel **Ein Summand der einen Seite kann auf die andere als Subtrahend gesetzt werden.**

[1] Der Strich wird „folglich“ gelesen.

b) $x - 7 = 21$ | $x - b = a$
$\phantom{x - {}} 7 = 7$ | $b = b$ | Grundsatz I gibt:
$x = 21 + 7$ | $x = a + b$ | In Worten? **2. Regel**

c) $7 \cdot x = 21$ | $b \cdot x = a$
$7 = 7$ | $b = b$ | Grundsatz IV gibt:
$x = 21 : 7$[1] | $x = a : b$ | In Worten? **3. Regel**

d) $x : 7 = 21$[1] | $x : b = a$
$7 = 7$ | $b = b$ | Grundsatz III gibt:
$x = 21 \cdot 7$ | $x = a \cdot b$ | In Worten? **4. Regel**

e) Beim Umformen dieser Gleichungen **a)—d)** ist also stets die entgegengesetzte Rechenart anzuwenden, um die bekannte Größe von der linken Seite auf die rechte zu schaffen und x allein auf der linken zu behalten.
f) Eine Gleichung lösen heißt, die Unbekannte daraus berechnen. Die Lehre von den Gleichungen, die sich damit beschäftigt, heißt Algebra[2].

7. Begründe mit Hilfe der Umsetzungsregeln, wie sich die Formeln Ib und Ic aus Ia und wie sich IIb und IIc aus IIa ergeben (S. 1).

8. a) Leite aus $100\,z = k \cdot i \cdot p$ die vier Formeln der Zinsrechnung Nr. 10a—d her. Welche der Formeln braucht man also nur zu behalten?
b) Desgl. aus $100 \cdot z \cdot 360 = k \cdot p \cdot t$ die Formeln Nr. 10a—d.

Drücke die folgenden Gleichungen zuerst in Worten aus und bestimme dann nach Nr. 6 die Unbekannte.

Beispiel: a) Die Gleichung $x + 3 = 7$ bedeutet: zu welcher Zahl muß man 3 hinzufügen, um 7 zu erhalten? b) Was bedeutet $3 + x = 7$?; c) was $x - 3 = 7$?

Löse die Gleichungen Nr. 9—14 ebenso wie die Aufgaben Nr. 6a—d:

	a)	b)	c)	d)
9.	$x + 4 = 11$	$x - 3 = 15$	$x \cdot 4 = 12$	$x : 4 = 12$
10.	$14 + x = 26$	$x - 13 = 13$	$5 \cdot x = 45$	$x : 0{,}2 = 10$
11.	$x + 1{,}2 = 2{,}8$	$x - 2{,}7 = 3$	$x \cdot 0{,}3 = 3$	$x : 0{,}25 = 4$
12.	$5{,}3 + x = 8{,}6$	$x - 4{,}9 = 5{,}1$	$0{,}75 \cdot x = 1{,}5$	$x : \frac{3}{4} = 27$
13.	$3\frac{1}{4} + x = 6\frac{5}{8}$	$x - 4\frac{1}{5} = 1\frac{3}{10}$	$x \cdot \frac{4}{5} = 16$	$x : 3\frac{3}{4} = 2\frac{2}{3}$
14.	$x + 11{,}2 = 15\frac{1}{5}$	$x - 8\frac{3}{4} = 1{,}25$	$5\frac{1}{4} \cdot x = 6{,}3$	$x : 2{,}2 = 1\frac{4}{11}$

Beispiel: Die Gleichung $10 - x = 7$ kann man in folgender Weise lösen:
$10 = x + 7$
$10 - 7 = x$
$3 = x$ oder $x = 3$.

Behandle ebenso die folgenden Gleichungen Nr. 15—16:

	a)	b)	c)	d)
15.	$13 - x = 6$	$45 - x = 19$	$11{,}3 - x = 6{,}7$	$18{,}25 - x = 13{,}75$
16.	$3{,}25 - x = 1\frac{1}{4}$	$5{,}8 - x = 3\frac{1}{5}$	$7\frac{3}{4} - x = 4{,}25$	$5\frac{3}{8} - x = 1{,}125$

17. Welchen Wert hat x in den folgenden Gleichungen, wenn $a = 12$ (16), $b = 4$ (2) ist? **a)** $x + b = a$, **b)** $x - b = a$, **c)** $x \cdot b = a$, **d)** $x : b = a$.

---

[1] Statt des Teilungszeichens kann auch der Bruchstrich gesetzt werden. [2] S. Anh. I.

18. Welche Zahl muß man zu 63 (51) addieren, um 100 (133) zu erhalten?
19. Welche Zahl hat man von 9,4 (13,7) abzuziehen, um 5,8 (11,3) zu erhalten?
20. Mit welcher Zahl hat man 2,7 (9,2) malzunehmen, um 81 (4,6) zu erhalten?
21. Bestimme die Zahl, die durch $1\frac{1}{2}$ ($5\frac{1}{4}$) geteilt $\frac{5}{6}$ ($1\frac{1}{7}$) ergibt?

3. Abschnitt: Die Grundrechenarten mit allgemeinen Zahlen.

Zahl
Punkt
Strecke

1. Die natürlichen Zahlen 1, 2, 3 ... haben wir am Zahlenstrahl veranschaulicht (Bd. I). Jeder Zahl entspricht ein Punkt; zugleich bestimmt sie eine Strecke, nämlich die Entfernung des betreffenden Punktes vom Nullpunkt. Durch entsprechende Unterteilung können auch die Brüche dargestellt werden, z. B. 0,2; 1,5; $2\frac{1}{2}$; 3,4; $4\frac{3}{4}$; 5,9 (Bild 2).

Zahlenstrahl

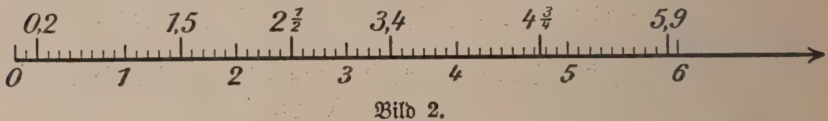


Bild 2.

Zwischen je zwei Zahlen kann man beliebig viele andere einschalten. Entsprechend können diese eingeschalteten Zahlen durch Zwischenpunkte veranschaulicht werden. Unter Umständen muß man dazu den Maßstab (d. h. hier: die gewählte Einheit) vergrößern (Bild 3).

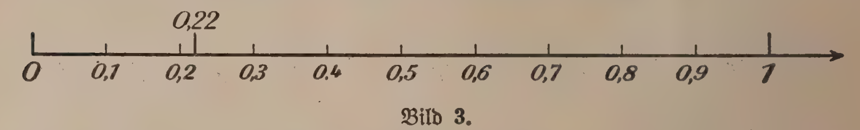


Bild 3.

2. Gib Beispiele für solche bezifferten Strecken an.
3. a)—c) Schreibe an die gekennzeichneten Punkte in Bild 4a—c die zugehörigen Zahlen an. d) Welche der Zahlenleitern entspricht der auf einem Fieberthermometer? e) Was fehlt bei Bild 4d? f) Bild e zeigt eine ungleichmäßig geteilte Leiter[1] mit nicht bezifferten Zwischenmarken, die die Mittelwerte ihrer Bereiche angeben, z. B. bedeutet die Marke zwischen 1 und 2 die Zahl 1,5. Beziffere diese Marken entsprechend.

Zahlenleiter

Eine solche Zahlenleiter (kurz Leiter) wird auch Skala[2] genannt.

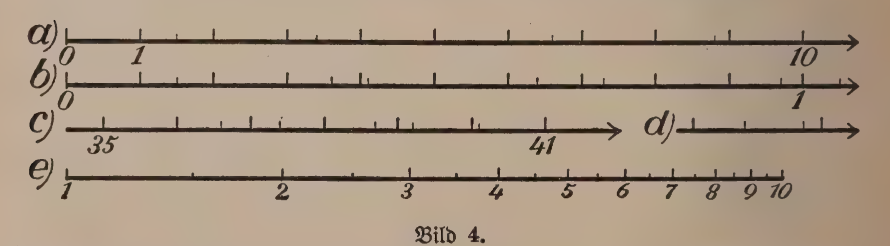


Bild 4.

[1] Diese Art der Einteilung findet sich bei Rechenstäben. [2] lat. scala = Leiter.

4. Trage auf einem Zahlenstrahl die Zahlen **a)** 1,75 **b)** 2,4 **c)** 3,6 **d)** 4,9 **e)** 5,8 **f)** 7,25 **g)** 8,7 **h)** 6,5 **i)** 9,9 ab. — Kann man Gitterpapier dazu benutzen?

A. Addition.

Zuzählen — Vorwärtsschreiten

5. a) Beim Zusammenzählen zweier Zahlen, z. B. $7 + 3$ oder allgemein $a + b$, wird an den Endpunkt des ersten Summanden (7 bzw. a) auf dem Zahlenstrahl der Anfangspunkt des zweiten (3 bzw. b) gelegt; der Endpunkt des zweiten gibt dann die Summe an (Bild 5).
b) Beim Zuzählen wird vorwärts geschritten (Bd. I) [1].

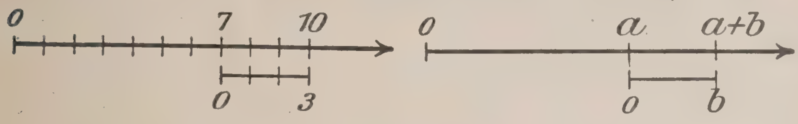


Bild 5.

Reihenfolge von Summanden

6. a) Bild 6 zeigt, daß auch für allgemeine Zahlen gilt:

$$a + b = b + a.$$

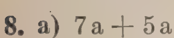
b) Bild 7 zeigt die Richtigkeit des Vertauschungssatzes für mehr als zwei Summanden. Bilde die Formel.

Bild 6.

Verknüpfung von Summanden

7. Welcher Unterschied besteht zwischen den Aufgaben $(a + b) + c$ und $(b + c) + a$ oder $(a + c) + b$? — Wie unterscheiden sich die Ergebnisse? (Beispiel mit Zahlen und mit Strecken, Bild 7.)

Bild 7.



8. a) $7a + 5a$
b) $14c + 13c + 17c$
c) $18n + 11n + 21n$
d) $24x + 17x + 9x + 14x$ **e)** $3u + 12u + 19u + 7u + 2u$
f) $3{,}6v + 2{,}8v + 4{,}1v + 7{,}5v$ **g)** $2\frac{3}{4}r + 1\frac{1}{8}r + 3\frac{1}{2}r$

9. a) $5x + 2y + 3x$ **b)** $7r + 4s + 5r$ **c)** $8{,}1v + 2{,}3w + 0{,}6w$
d) $4m + 3n + 2m + n$ **e)** $3a + 4b + 2a + 7b$
f) $1\frac{2}{3}p + 2\frac{1}{5}q + 2\frac{1}{6}p + 1\frac{3}{10}q$ **g)** $7{,}3s + 4{,}8t + 2{,}7s + 5{,}2t$

B. Subtraktion.

Abziehen — Rückwärtsschreiten

10. a) Beim Abziehen zweier Zahlen, z. B. $7 - 3$ oder allgemein $a - b$, wird an den Endpunkt des ersten Gliedes (7 bzw. a), des Minuenden, der Endpunkt des zweiten Gliedes (3 bzw. b), des Subtrahenden, gelegt. Der Anfangspunkt des zweiten gibt dann den Unterschied an (Bild 8).

---
[1] Veranschauliche dir dies am einfachen Rechenstab aus 2 Pappstreifen.

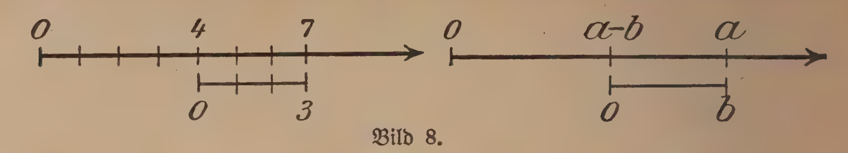


Bild 8.

b) Beim *Abziehen* wird *rückwärts* geschritten (Bd. I).[1]

c) Bild 9 veranschaulicht das österreichische Verfahren (Bd. I) an $10 - 3 = 7$.

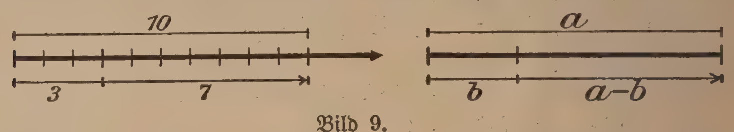


Bild 9.

d) Nicht jede Subtraktionsaufgabe ist lösbar, während jede Additionsaufgabe zum Ziele führt.

11. Was ergibt $10 + 7 - 5$ und $10 - 5 + 7$, allgemein $a + b - c$ und $a - c + b$? — Zahlenstrahl! Was gilt für die Reihenfolge von Addition und Subtraktion?

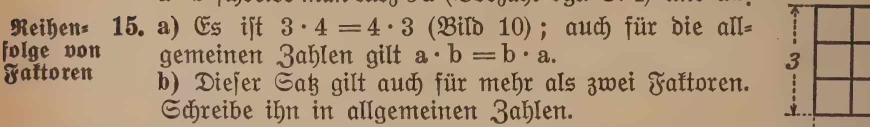
Aber beachte $10 + 5 - 12$ und $10 - 12 + 5$! Kannst du auch hier die Reihenfolge ändern?

12. a) $24p - 13p$ d) $16s - 11s + 3s$ g) $47y - 23y + 15y - 18y$
b) $39q - 22q$ e) $35t - 18t + 7t$ h) $25u + 13v - 11v + 5u$
c) $14{,}2r - 6{,}7r$ f) $6{,}9x - 2{,}4x + 5{,}5x$ i) $27y + 13z + 3y - 13z$

13. a) $21c + 5d - 17c$ d) $13{,}2z + 11{,}9z - 3{,}5z - 14{,}3z$
b) $31p + 14q - 11p$ e) $2{,}7l + 4{,}1m - 2{,}7m + 1{,}3l$
c) $26x - 8x + 10y$ f) $5\frac{2}{3}a + 2\frac{1}{2}b - 2\frac{1}{6}a - 1\frac{1}{4}b$

C. Multiplikation.

14. Man schreibt abgekürzt $5 + 5 + 5 = 5 \cdot 3$ (Bd. I), ebenso $a + a + a = a \cdot 3$, allgemein $a + a + a + \ldots$ (bis zum b^{ten} a) $= a \cdot b$. Statt $a \cdot 3$ und $a \cdot b$ schreibt man kurz $3a$ (Vorzahl vgl. S. 4) und ab.



Reihenfolge von Faktoren **15.** a) Es ist $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ (Bild 10); auch für die allgemeinen Zahlen gilt $a \cdot b = b \cdot a$.

b) Dieser Satz gilt auch für mehr als zwei Faktoren. Schreibe ihn in allgemeinen Zahlen.

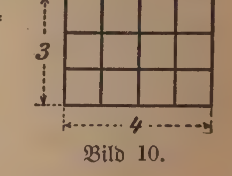


Bild 10.

Verknüpfung von Faktoren **16.** a) Rechne $3 \cdot 4 \cdot 5$ auf verschiedene Arten aus. Überträgt man dies auf allgemeine Zahlen, so ergibt sich $a \cdot b \cdot c = ab \cdot c = ac \cdot b = bc \cdot a = abc$. (Bd. I.)

Produkt mal Zahl b) Daraus ergibt sich die Regel, wie man ein Produkt mit einer Zahl malnimmt. Wie lautet sie? (Bd. I.)

Anmerkung: Wie bei den natürlichen Zahlen setzt man $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, $a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$ usw. a^2 stellt also alle Quadratzahlen,

[1] s. Fußnote 1, S. 9.

a^3 alle Kubikzahlen (Bd. I) dar, wenn man der Reihe nach für a die Zahlen 1, 2, 3, 4 ... einsetzt. — Allgemein heißt a^n eine Potenz, a die Grundzahl, n die Hochzahl (Bd. I). **Potenz**

17. a) $4x \cdot 5$ b) $7 \cdot 4y$ c) $0{,}2r \cdot 5$ d) $1{,}4s \cdot 0{,}5$
e) $7{,}2p \cdot 3$ f) $2\frac{3}{5}m \cdot 25$ g) $\frac{22}{23} \cdot 6\frac{3}{11}n$ h) $4\frac{1}{6}a \cdot 4{,}8$

18. a) $4a \cdot 2b$ d) $3x \cdot 14y \cdot 15z$ g) $12{,}5pq \cdot 0{,}4m$ k) $7\frac{1}{2}ab \cdot qp \cdot 4$
b) $15r \cdot 11s$ e) $2{,}5a \cdot 2{,}4b \cdot c$ h) $3\frac{1}{4}uv \cdot 2{,}2w$ l) $5\frac{3}{7}cd \cdot 2\frac{5}{6}ef$
c) $3{,}8p \cdot 5q$ f) $0{,}9r \cdot 2{,}2s \cdot 0{,}5$ i) $5\frac{3}{4}ax \cdot 1{,}6by$ m) $3\frac{1}{3}xyz \cdot 2\frac{2}{5}u \cdot 7v$

19. a) $3a \cdot a$ b) $1{,}5p \cdot 8p$ c) $rs \cdot 4s$ d) $a^2 \cdot a$ e) $0{,}7x \cdot 1{,}4x^2$
f) $\frac{3}{5}q \cdot 3\frac{1}{3}pq$ g) $5x \cdot x^2 \cdot 2y^2$ h) $(2x)^2$ i) $(\frac{1}{2}s)^2$ k) $(0{,}4v)^2$

D. Division.

20. a) Die Divisionsaufgabe $15:3$ kann praktisch so ausgeführt werden, daß 15 in $3 \cdot 5$ zerlegt und daraus das Ergebnis 5 als die Zahl gefunden wird, mit der der Teiler malgenommen werden muß, um den Dividenden zu erhalten. Entsprechend gilt für die allgemeinen Zahlen $an : a$ $(= a \cdot n : a) = n$, weil n mit a malgenommen wieder $n \cdot a$ oder an ergibt. Die Division ist ohne Rest nur ausführbar, wenn der Dividend ein Vielfaches des Teilers ist.
b) Rechne $6 \cdot 8 : 2$ auf verschiedene Arten aus. Überträgt man dies auf allgemeine Zahlen, so ergibt sich $a \cdot b : c = (a : c) \cdot b = a \cdot (b : c)$. Was gilt für die Reihenfolge von Multiplikation und Division?
c) Daraus ergibt sich die Regel, wie man ein Produkt durch eine Zahl teilt. Wie lautet sie? **Produkt durch Zahl**

21. a) $3x : 3$ b) $3x : x$ c) $36y : 12y$ d) $4{,}2z : 1{,}4$
e) $27u : 3u$ f) $7ab : b$ g) $28pq : 7q$ h) $10{,}8kl : 3{,}6l$
i) $8st : st$ k) $3{,}5xyz : 7y$ l) $2{,}1uvw : 0{,}7vw$ m) $rst : 1\frac{1}{3}rst$

22. a) $3c^2 : c$ d) $7{,}2s^2t : 2{,}4s$ g) $14\frac{2}{3}x^2yz : \frac{11}{12}x^2y$
b) $4b^2 : b^2$ e) $16{,}9y^2z : 13y$ h) $7{,}5x^3y : 2{,}5x^2$
c) $18x^2 : 9x$ f) $13{,}5a^2b : 15ab$ i) $4\frac{4}{11}m^2np^2 : 4\frac{4}{5}mnp$

23. a) $(3a \cdot 2b) : 2a$ d) $(1{,}5x \cdot 0{,}3y) : 0{,}5y$ g) $(5uv \cdot 2u) : 10v$
b) $(16p \cdot 3q) : 24q$ e) $(4\frac{1}{2}r \cdot \frac{2}{3}s) : 3rs$ h) $(3{,}2cd \cdot 2{,}5d) : 0{,}8d^2$
c) $(12r \cdot 6s) : 9rs$ f) $(6yz \cdot 14x) : 14yz$ i) $(5x^2 \cdot 3yz^2) : 6xz$

24. a) $x + 3a = 10a$ b) $x - 2a = a$ c) $x + 2b = a + 3b$ **Gleichungen**
25. a) $rx = rp$ b) $cx = 3c$ c) $x : d = 1$
26. a) $7ax = 21a$ b) $4nx = 8n^2$ c) $x : 5p = 5$
27. a) $9x + 2a = 9a + 2x$ b) $7x : b = 28$ c) $ax : b = 2a$

II. Die Grundrechenarten mit relativen Zahlen.

4. Abschnitt: Einführung der negativen Zahlen, Addition und Subtraktion.

A. Einführung.

1. Zeigt ein Thermometer zunächst 6^0, so zeigt es
nach einer Temperatur**zunahme** um 2^0 nunmehr $(6 + 2)^0$ (Addition),
nach einer Temperatur**abnahme** um 2^0 nunmehr $(6 - 2)^0$ (Subtraktion).

Entsprechend ergibt sich bei einem Anfangsstand von 0^0 und einer Änderung um 2^0 ein Stand von $(0 + 2)^0$, d. h. 2^0 Wärme bzw. von $(0 - 2)^0$, d. h. 2^0 Kälte.

Für $(0 + 2)^0$ schreibt man kurz $+ 2^0$ und für $(0 - 2)^0$ kurz $- 2^0$. Um Temperaturen unter 0^0 messen zu können, muß die Zahlenreihe . . . 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0 noch weiter unter 0 fortgesetzt werden. Am Thermometer erkennen wir, wie das geschehen kann: man schreibt die Zahlenreihe in umgekehrter Reihenfolge auf und versieht diese Zahlen mit einem besonderen **Vorzeichen**, dem **Minuszeichen**. Entsprechend gibt man den natürlichen Zahlen zur besseren Unterscheidung das **Pluszeichen** als Vorzeichen. Wir erhalten so neben der Reihe der natürlichen eine Reihe künstlicher Zahlen. Im Bild 11 sind sie auf einer Geraden aufgetragen. An die Stelle des bisherigen **Zahlenstrahls** tritt die nach beiden Seiten hin unbegrenzte **Zahlengerade**.

Vorzeichen

Zahlengerade

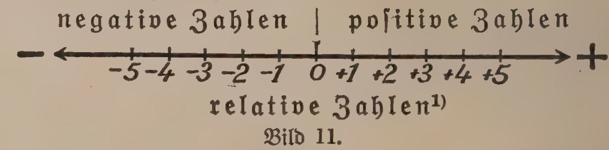


Bild 11.

Von jetzt ab ist also Vor- und Rechenzeichen zu unterscheiden. Ist ein Irrtum nicht möglich, schreibt man die positiven Zahlen häufig auch ohne Vorzeichen. Die Zahlen 3, 11, a, b, x . . . bedeuten von jetzt ab + 3, + 11, + a, + b, + x . . .

Erweiterung des Zahlenbereiches

2. a) Die Einführung der negativen Zahlen, die eine Erweiterung unseres bisherigen Zahlenbereiches darstellt, bedeutet einen großen mathematischen Fortschritt. Zugleich gestattet sie zuweilen auch eine Vereinfachung in der Ausdrucksweise des täglichen Lebens.

b) Einige Beispiele für die Verwendung positiver und negativer Zahlen zur Bezeichnung entgegengesetzter Größen sind:

Positiv	Wärme	Nördl. Br.	Östl. L.	Höhe	Steigen	Gewinn
Negativ	Kälte	Südl. Br.	Westl. L.	Tiefe	Fallen	Verlust

c) Gib weitere Beispiele an.

[1] lat. = in Beziehung stehend, bezüglich, nämlich bezogen auf die Null.

3. a) Der große Unterschied zwischen den relativen Zahlen und den bisher benutzten besteht darin, daß die ersten gerichtete Größen sind, die durch Pfeile von bestimmter Länge dargestellt werden. Die Pfeillänge, also eine Strecke, gibt den absoluten[1]) Betrag, der Richtungssinn des Pfeiles das Vorzeichen an. **Absoluter Betrag**

b) Bei einer relativen Zahl unterscheidet man den absoluten Betrag (die Länge der Strecke) und das Vorzeichen (das den Richtungssinn angibt). — Man schreibt:

$|+3|$, gelesen: absoluter Betrag von $+3$ oder kurz: $+3$ absolut und
$|-3|$, gelesen: absoluter Betrag von -3 oder kurz: -3 absolut.

Es sind die Strecken (Bild 12) $|+3| = |-3| = 3$, allgemein $|+a| = |-a| = a$, d. h. die Entfernungen vom Nullpunkt zu den Zahlen $+3$ und -3 bzw. $+a$ und $-a$ sind gleichlang (Gegenstrahlen; Gegenzahlen). **Gegenstrahl**

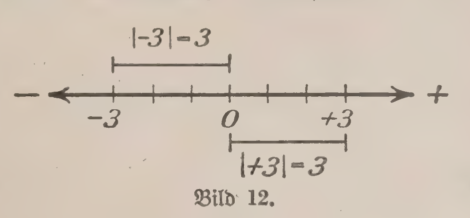


Bild 12.

B. Addition relativer Zahlen.

4. Vorbemerkung: **Für das Rechnen mit relativen Zahlen wird aus Zweckmäßigkeitsgründen festgesetzt, daß unsere bisher für die natürlichen Zahlen (und Brüche) geltenden Rechenregeln jetzt auch für die positiven und negativen Zahlen Gültigkeit behalten sollen[2]).** **Festsetzung**

5. a) Wie auf dem Zahlenstrahl stets die kleinere von zwei Zahlen links von der größeren liegt, so gilt dies auch für die relativen Zahlen auf der Zahlengeraden. Daher ist:

$+3 < +5$; $-8 < -3$; $-12 < +4$; $-3 > -7$; $+2 > -9$.

b) Gib andere Beispiele an und veranschauliche sie.

c) Es ist $+5 > -5$ und $-7 < +7$,
aber $|+5| = |-5| = 5$ und $|-7| = |+7| = 7$.

d) Sollen zwei relative Zahlen gleich sein, so müssen sie im absoluten Betrag und im Vorzeichen, also nach Größe und Richtungssinn übereinstimmen.

6. a) Entsprechend zu Nr. 5, S. 9 wird nach der Vorbemerkung für das Zusammenzählen der neuen relativen Zahlen erweiternd festgesetzt:

Erkl.: Beim Zuzählen einer relativen Zahl wird **in der durch ihr Vorzeichen bestimmten Richtung vorwärts** geschritten.

b) Welche Worte sind zu Nr. 5b, S. 9, hinzugekommen?

---

[1]) lat.= losgelöst. [2]) Der deutsche Mathematiker Hankel hat 1867 diesen Grundsatz der Beständigkeit unserer Rechengesetze ausgesprochen.

Einfacher Rechenstab

c) Am besten veranschaulicht man sich dies mit Hilfe eines **erweiterten Rechenstabes** aus zwei Pappstreifen mit der gleichen Teilung. Bild 13 zeigt (+ 8) + (− 3) = + 5.

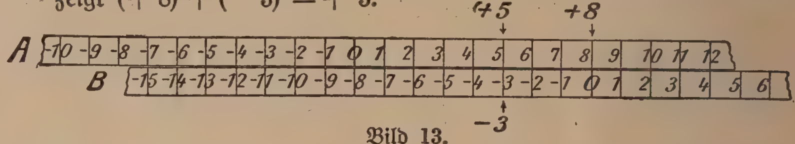
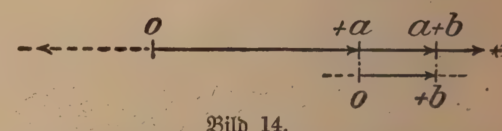


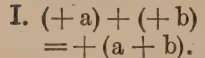
Bild 13.

7. a) Bild 14 erläutert die Addition zweier positiver Zahlen.



(+ 8) + (+ 3)
= + (8 + 3),

allgemein:

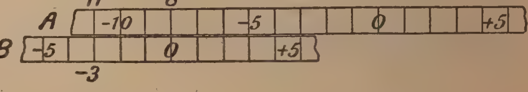


I. (+ a) + (+ b)
= + (a + b).

Bild 14.

Es wird also der Anfangspunkt des zweiten Summanden (auf Teilung B) an den Endpunkt des ersten (auf Teilung A) gelegt und dann **in der Richtung des zweiten** fortgeschritten. **Der Endpunkt des zweiten** bestimmt das Ergebnis auf Teilung A.

b) Entsprechend erläutert Bild 15 das Zusammenzählen zweier negativer Zahlen, nur spielt sich der ganze Vorgang auf der linken Hälfte der Zahlengeraden ab.



(− 8) + (− 3)
= − (8 + 3),

allgemein:

II. (− a) + (− b)
= − (a + b).

Bild 15.

Wieder wird also der Anfangspunkt des zweiten Summanden an den Endpunkt des ersten gelegt und dann **in der Richtung des zweiten** fortgeschritten. **Der Endpunkt des zweiten** bestimmt das Ergebnis auf Teilung A. — Aus I. und II. ergibt sich die

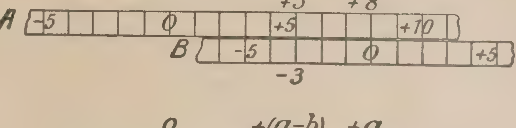
Regel 1

Regel 1: Relative Zahlen mit gleichen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge addiert und der Summe das gemeinsame Vorzeichen gibt.

Beim Addieren relativer Zahlen mit ungleichen Vorzeichen sind folgende zwei Fälle möglich: zu einer positiven Zahl wird eine negative, oder zu einer negativen Zahl eine positive addiert.

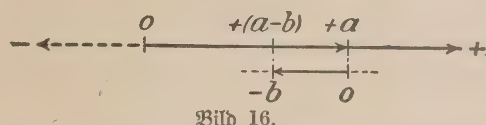
c) Die Aufgabe (+ 8) + (− 3) bedeutet, daß an den Endpunkt von + 8 (auf Teilung A) (Bild 16) der Anfangspunkt von − 3 (auf Teilung B)

angelegt wird; da addiert werden soll, muß in ihrer Richtung (von — 3) drei Einheiten fortgeschritten und als Summe die über dem Endpunkt — 3 auf der Teilung A stehende Zahl + 5 abgelesen werden.



(+ 8) + (— 3)
= + (8 — 3),

allgemein:



III. (+ a) + (— b)
= + (a — b)
|+ a| > |— b|.

Bild 16.

Bei diesem Beispiel ist der absolute Betrag des positiven Summanden größer als der absolute Betrag des negativen. Was für ein Vorzeichen erhält die Differenz der absoluten Beträge? — Stelle die Regel auf.

d) Im folgenden Beispiel ist der absolute Betrag des negativen Summanden größer als der des positiven. Erläutere entsprechend Nr. 7a das Bild 17; es zeigt:

(— 8) + (+ 3)
= — (8 — 3),

allgemein:

IV. (— a) + (+ b)
= — (a — b)
|— a| > |+ b|.

Bild 17.

Was für ein Vorzeichen erhält die Differenz der absoluten Beträge in diesem Falle? — Stelle für IV die Regel auf. Aus III und IV ergibt sich **Regel 2: Relative Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge subtrahiert und der Differenz das Vorzeichen der absolut größeren gibt.** **Regel 2**

8. Aus dem vorhergehenden folgt:

(+8) + (+3) = (+3) + (+8)	allgem.:	(+ a) + (+ b) = (+ b) + (+ a)
(—8) + (—3) = (—3) + (—8)	„	(— a) + (— b) = (— b) + (— a)
(+8) + (—3) = (—3) + (+8)	„	(+ a) + (— b) = (— b) + (+ a)
(—8) + (+3) = (+3) + (—8)	„	(— a) + (+ b) = (+ b) + (— a)

also gilt auch für die Addition relativer Zahlen: **Vertauschungssatz**

Die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

9. Die Schreibweise mit den Klammern ist zwar deutlich, weil sie gestattet, Vorzeichen und Rechenzeichen klar zu unterscheiden, aber sie ist umständlich. Man hat sich auf eine vereinfachte Schreibweise geeinigt:

(+ a) + (+ b) = a + b (+ a) + (— b) = a — b
(— a) + (+ b) = — a + b (— a) + (— b) = — a — b.

10. a) $\begin{array}{r} +6 \\ \underline{+9} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} +13 \\ \underline{-\ 7} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -7 \\ \underline{+3} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} -11 \\ \underline{-5} \end{array}$ e) $\begin{array}{r} +4z \\ \underline{+8z} \end{array}$ f) $\begin{array}{r} +\ 6y \\ \underline{-10y} \end{array}$

11. a) $\begin{array}{r} -13v \\ \underline{+11v} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 9p^2 \\ \underline{-13p^2} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 11q^3 \\ \underline{-17q^3} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} -21rs \\ \underline{-\ 4rs} \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 8xy \\ \underline{-7xy} \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 5(a+b) \\ \underline{-3(a+b)} \end{array}$

12. a) $\begin{array}{r} u-1 \\ \underline{u+1} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1-t \\ \underline{1-t} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} m-2 \\ \underline{m+3} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} e^2-1 \\ \underline{1-e^2} \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 7d-3 \\ \underline{8\ -9d} \end{array}$ f) $\begin{array}{r} -10v+9 \\ \underline{-10\ +9v} \end{array}$

13. a) $\begin{array}{r} 5r-3s \\ \underline{-3r+4s} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 8m+5n \\ \underline{-10m-6n} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} x-2y \\ \underline{3y-\ x} \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 3v-\ w+2u \\ \underline{2v-2w-3u} \end{array}$

14. a) $\begin{array}{r} 3{,}3z-2{,}1w \\ \underline{0{,}4w-7{,}1z} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 4{,}2r-3{,}8s-6{,}3t \\ \underline{3{,}8r-4{,}2s+2{,}3t} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} -5{,}8a-3\tfrac{3}{4}b+0{,}75c \\ \underline{4{,}2a-0{,}25b-1\tfrac{1}{4}c} \end{array}$

15. a) $\begin{array}{r} 3x-y\ +7z-1 \\ \underline{-5x+2y-8z-4} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1\tfrac{3}{8}a-\ \tfrac{4}{11}b-1\tfrac{1}{2}c+\ \tfrac{4}{7}d \\ \underline{1\tfrac{1}{2}a-1\tfrac{19}{22}b+\ \tfrac{1}{6}c-1\tfrac{6}{35}d} \end{array}$

16. a) $\begin{array}{r} 13x-51y-17z \\ -36x+17y-13z \\ \underline{+27x-16y-\ 3z} \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 25u+13v-17w \\ 19u-27v-13w \\ \underline{-43u-\ 6v-10w} \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 2{,}1p-4{,}8q+3{,}9r \\ -4{,}2p-3{,}6q-6{,}2r \\ \underline{+1{,}5p-2{,}6q-3{,}7r} \end{array}$

17. ⋯ **23.** Weitere Übungen enthalten die Aufgaben Nr. 30 ⋯ 36.

C. Subtraktion relativer Zahlen.

24. Entsprechend zu Nr. 6a, S. 13, wird nach der Vorbemerkung **Nr. 4**, S. 13 für das Abziehen relativer Zahlen erweitert festgesetzt:

Erkl.: Beim Abziehen einer relativen Zahl wird **zu der durch ihr Vorzeichen bestimmten Richtung rückwärts** geschritten.

Mache dir dies am Rechenstab (Bild 13) klar.

Positiver Subtrahend

25. a) Bild 18 erläutert die Aufgabe $(+8)-(+3)$. An den Endpunkt von $+8$ (Teilung A) wird der Endpunkt von $+3$ (auf Teilung B) gelegt und rückwärts zu ihrer Richtung um 3 Einheiten gezählt; das Ergebnis $+5$ steht auf Teilung A über dem Anfangspunkt von $+3$

$$\begin{aligned} &(+8)-(+3) \\ =&(+8)+(-3) \\ =&+(8-3), \end{aligned}$$

allgemein:

I. $$\begin{aligned} &(+a)-(+b) \\ =&(+a)+(-b) \\ =&+(a-b). \end{aligned}$$

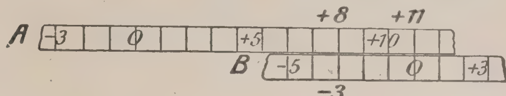
Bild 18.

Anstatt eine positive Zahl zu subtrahieren, addiert man ihre **Gegenzahl.**

Negativer Subtrahend

b) Bei der Aufgabe $(+8)-(-3)$ (Bild 19) wird wie oben der Endpunkt von -3 (auf Teilung B) an den Endpunkt von $+8$ (auf Teilung A) gelegt und rückwärts zur Richtung von -3 um 3 weitergezählt. Das

Ergebnis steht wieder auf Teilung A über dem Anfangspunkt von -3.



$(+8)-(-3)$
$=(+8)+(+3)$
$=+(8+3)$,

allgemein:

II. $(+a)-(-b)$
$=(+a)+(+b)$
$=+(a+b)$.

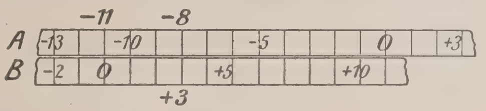
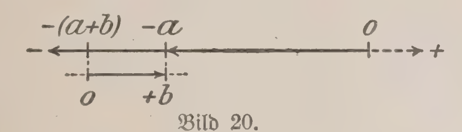


Bild 19.

Wie wird also eine negative Zahl subtrahiert?

Anmerkung: Ist der Minuend nicht wie bisher positiv, sondern negativ, so liegt der Anfang der Umrechnung auf dem links vom Nullpunkt gelegenen Teil der Zahlengeraden. Am weiteren Gang der Lösung ändert sich nichts. Dies zeigen die folgenden Beispiele; erkläre sie.



$(-8)-(+3)=(-8)+(-3)$
$=-(8+3)=-11$,

allgemein:

III. $(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$
$=-(a+b)$.

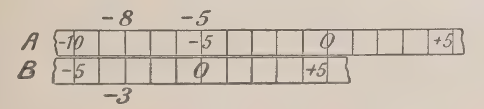


Bild 20.

Wie wird also auch in diesem Falle eine positive Zahl subtrahiert?

$(-8)-(-3)=(-8)+(+3)$
$=-(8-3)=-5$,

allgemein:

IV. $(-a)-(-b)=(-a)+(+b)$
$=-(a-b)$.

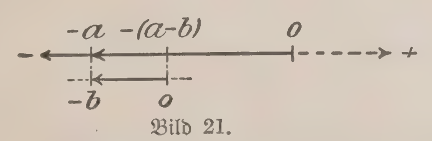


Bild 21.

Wie wird also auch in diesem Falle eine negative Zahl subtrahiert? Der Minuend bleibt wie vorher in diesen Beispielen I—IV unverändert. Sie zeigen:

Regel 3: Eine relative Zahl wird subtrahiert, indem man sie mit entgegengesetztem Vorzeichen addiert. Regel 3

26. a) Auch für relative Zahlen gilt:
$(+8)+(+3)-(+3)=+8$ und $(+a)+(+b)-(+b)=+a$, d. h. Addition und Subtraktion derselben relativen Zahl heben sich auf. Sie sind entgegengesetzte Rechenarten.

b) Wieder schreibt man vereinfacht (s. Nr. 9):

$(+a)-(+b)=a-b$ $\qquad$ $(+a)-(-b)=a+b$
$(-a)-(+b)=-a-b$ $\qquad$ $(-a)-(-b)=-a+b$.

27. a) Mit der Regel 3 ist das Abziehen einer relativen Zahl auf das Zuzählen zurückgeführt. Damit scheidet nach der Einführung der negativen Zahlen die Subtraktion als selbständige Rechenart

überhaupt aus; denn es kommt auf dasselbe hinaus, ob wir eine relative Zahl addieren oder ihre Gegenzahl subtrahieren und umgekehrt:

$$a-(-b)=a+(+b) \quad \text{und} \quad a-(+b)=a+(-b)$$

(dabei kann a positiv oder negativ sein).

Algebraische Summe

b) Dies zeigt, daß jede Differenz auch als Summe aufgefaßt werden kann und umgekehrt. Daher bezeichnet man Summe und Differenz mit dem gemeinsamen Namen „algebraische Summe" und jeden ihrer Teile als „algebraischen Summanden". Besonders gilt dies bei Ausdrücken von mehr als zwei Gliedern, die man dann „algebraische Summanden" nennt, gleichgültig, ob vor ihnen ein Plus- oder ein Minusreichen steht.

28. Wir werden von jetzt ab im allgemeinen nur noch den Ausdruck Summe gebrauchen, gleichgültig, ob es sich um eine Summe oder Differenz im früheren Sinne oder um eine algebraische Summe handelt. Diese Aufgaben betrachten wir dementsprechend als Additionsaufgaben und nennen ihre Teile nur noch Summanden. Diese Vereinbarung hat den Vorteil, daß wir unsere Regeln erheblich vereinfachen.

Vertauschungs- und Verknüpfungssatz für relative Zahlen

29. a) Weise durch Rechnung und Zeichnung nach, daß auch für die (algebraische) Summe (von mehr als zwei Summanden) gilt:

$$a+b-c=a-c+b=b+a-c, \text{ d. h.}$$

die Reihenfolge der Summanden ist beliebig.

Damit haben wir den Vertauschungssatz in der allgemeinsten Form erhalten. Er umfaßt die beiden Regeln 6 und 8 in Bd. I.

b) Daraus ergibt sich für relative Zahlen die allgemeine Gültigkeit des Verknüpfungssatzes der Addition.

Subtrahiere:

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
30.	$+18$	-14	9	$-3{,}2$	$-11{,}7$	$3\frac{5}{6}$
	$+13$	-21	-26	$+5{,}8$	$-4{,}3$	$-4\frac{1}{3}$
31.	$-23v$	$-19x$	$31u^2$	$-3(x+y)$	$4{,}3(x-y)$	
	$+23v$	$-23x$	$42u^2$	$-11(x+y)$	$-5{,}7(x-y)$	
32.	$a+b$	$a-b$	$u+1$	u	$-u$	$-u$
	$a-b$	$-a-b$	$u-1$	$u-1$	$-u-1$	$u+1$
33.	$4n-5$	$-5p+4$	$-8u+4$	$-6{,}1r-0{,}9$	$4\frac{1}{5}x^2-1\frac{1}{3}$	
	$-2n-7$	$-3p$	$+2u-6$	$-8{,}1r+0{,}1$	$2\frac{1}{10}x^2-3\frac{2}{3}$	

	a)	b)	c)
34.	$23k-15l+11m$	$5u+9v-15w$	$16p-17q-18r$
	$13k-5l+m$	$2u+13v-10w$	$-19p-14q-15r$

	a)	b)
35.	$-3{,}7a+5{,}2b-9{,}1c$	$1{,}1a-2{,}2b+3{,}3c-4{,}4d$
	$7{,}3a-5{,}8b+2{,}1c$	$2{,}2a+1{,}1b-4{,}4c+3{,}3d$
36.	$3\frac{3}{4}r-\frac{5}{6}s-2\frac{3}{8}t$	$-1\frac{2}{5}x^3+3\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{8}x+\frac{2}{5}$
	$2\frac{5}{8}r+1\frac{1}{6}s-4\frac{3}{4}t$	$-3\frac{3}{10}x^3-4\frac{1}{2}x^2-1\frac{5}{24}x-\frac{3}{5}$

37. bis **43.** Löse die Aufg. Nr. 10 ··· 15 als Subtraktionsaufgaben. **Vermischte Aufgaben**

44. bis **50.** Subtrahiere in den Aufg. 30 ··· 36 den oberen von dem unteren Ausdruck und vergleiche die Ergebnisse mit denen von Nr. 30 ··· 36.

51. Bei einem Staffellauf über 4 × 100 m gewinnt der erste Läufer der Mannschaft A 1,3 m, der zweite aber verliert 1,5 m, der dritte gar 1,7 m gegen die Mannschaft B. Wieviel muß der Schlußmann von A bei den letzten 100 Metern aufholen, wenn er den Läufer von B erreichen soll?

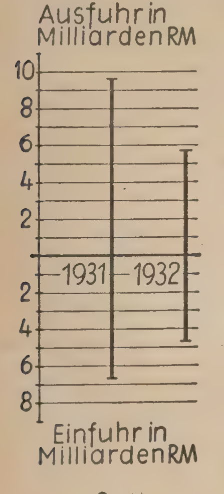
52. Der Besitzer eines Motorboots, das im ruhigen Wasser 12,5 km in der Stunde fährt, möchte trotz Hochwassers stromaufwärts fahren. Er stellt mit der Stoppuhr und einem Papierball die Stromgeschwindigkeit zu 3,5 m je Sekunde fest. (Wie?) Würde er es schaffen?

53. Ein Flugzeug, das von Berlin aus genau nach Süden fliegt, käme nach Swakopmund in unserer ehemaligen Kolonie Deutsch-Südwest. Wie lange brauchte es bis dorthin, wenn es in der Stunde 333,3 km ($\triangleq 3^0$) zurücklegte? Berlin $\varphi_1 = +52{,}5^0$, Swakopmund $\varphi_2 = -22{,}5^0$.

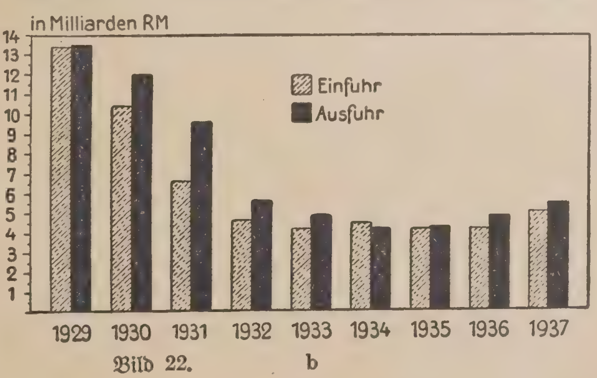
Schaubilder

In den folgenden Aufgaben treten bei den Streckendarstellungen in Schaubildern (Bd. I) auch negative Zahlen auf. Dabei wird die Addition und Subtraktion von Strecken angewandt. Von den gegebenen Zahlenreihen bezieht sich die erste auf die waagerechte Achse, die zweite auf die dazu senkrechte. Wenn nicht anderes angegeben ist, empfiehlt es sich, für die Zahlen der waagerechten Achse 1 cm Abstand zu wählen.

54. a) In Bild 22a stellen die nach oben gerichteten (positiven) Strecken die Ausfuhr, die nach unten gerichteten (negativen) die Einfuhr dar. (Die Ausfuhr bedeutet nämlich für unser Volk eine Einnahme, die Einfuhr eine Ausgabe.) Bestimme durch Rechnung und Zeichnung (mit Zirkel oder Papierstreifen) den Unterschied in den einzelnen Jahren. **b)** Häufig wählt man zur Veranschaulichung von zwei Reihen zusammengehöriger Größen die Art in Bild 22b. Vgl. diese Art mit der in a).



a



b

Bild 22.

55. Eine Hausfrau bringt am Anfang jeden Monats einen Teil ihres Wirtschaftsgeldes zur Sparkasse und hebt im Laufe des Monats wieder gewisse Beträge ab. Bestimme nach folgender Aufstellung rechnerisch und zeichnerisch (Nr. 54) a) die monatlichen Unterschiede, b) die im Laufe des ganzen Jahres ersparte Summe, c) die durchschnittliche monatliche Ersparnis.

Monat	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Einzahlung	75	45	80	70	90	80	—	40	55	60	75	85
Abhebung	55	60	50	35	45	40	100	25	30	30	35	110

56. Stelle nach deinem Atlas in einem Schaubilde dar: den höchsten Berg jedes der fünf Erdteile und die größte Tiefe des Atlantischen, des Großen, des Indischen Ozeans und des Mittelmeeres (Maßstab 1 : 100000). Wie groß ist der Unterschied zwischen der höchsten Erhebung und der größten Tiefe?

57. Stelle nach Anh. II, 10 die Summe von Erzeugung und Einfuhr der Treibstoffe als positive und den Verbrauch als negative Strecken dar. Bestimme rechnerisch und zeichnerisch den Bestand am Jahresschluß.

Gleichungen

58. a) $x + 11 = 5$ b) $x + 3 = 1$ c) $x + 10 = 0$ d) $7 - x = 10$
e) $x + 3b = b$ f) $4a - x = 5a$ g) $x - 3c = -5c$ h) $6a^2 - x = 10a^2$

59. a) $4x + 9 = 3x - 1$ b) $7x - 8 = 8x - 7$ c) $2\frac{1}{2}x - 0{,}8 = 1\frac{1}{2}x - 1{,}8$
d) $2{,}4x + 3{,}5 + 1{,}3x = 2{,}7x - 1{,}5$ e) $3\frac{1}{5} + x + 2\frac{4}{5} - \frac{1}{2}x = 4 - \frac{1}{2}x$

60. a) $5x - 7a = 8a + 6x$ b) $2x + 3p = x + 2p$

61. a) $4{,}2x + 1{,}8c = 3{,}2x + 0{,}8c$ b) $3{,}2x + 1{,}4a = 1{,}1a + 2\frac{1}{5}x + 0{,}2a$
c) $4{,}5x - 3{,}2c - 2{,}8x = 5{,}6c + 0{,}7x - 13{,}8c$

62. Welche Zahl muß man um 15 vermehren, um 10 zu erhalten?

63. Welche Zahl ergibt um 7 vermindert -17?

64. Vermehrt man eine Zahl um 11 und zieht von dem Ergebnis 7 ab, so erhält man 3. Welche Zahl ist es?

5. Abschnitt:
Addition und Subtraktion algebraischer Summen.
(Einfache Klammeraufgaben.)

1. Eine Klammer zeigt eine Zusammengehörigkeit der in ihr stehenden Glieder an. (Bd. I.)

I. $10 + (5 + 2) = 10 + 7$ III. $10 - (5 + 2) = 10 - 7$
II. $10 + (5 - 2) = 10 + 3$ IV. $10 - (5 - 2) = 10 - 3$

Zuzählen und Abziehen algebraischer Summen

In Rechenaufgaben werden die in den Klammern stehenden Teilaufgaben zuerst gelöst und dann wird mit den Teilergebnissen weitergerechnet.

2. a) Mache dir an der Zahlengeraden klar:

I. $10 + (5 + 2) = 10 + 5 + 2$ III. $10 - (5 + 2) = 10 - 5 - 2$
II. $10 + (5 - 2) = 10 + 5 - 2$ IV. $10 - (5 - 2) = 10 - 5 + 2$



b) Die Bilder 23—26 zeigen dies für allgemeine Zahlen.

I. $a + (b + c) = a + b + c$ III. $a - (b + c) = a - b - c$

Bild 23. Bild 25.

II. $a + (b - c) = a + b - c$ IV. $a - (b - c) = a - b + c$

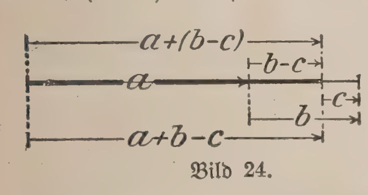


Bild 24.

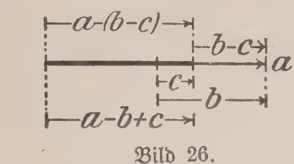


Bild 26.

Wie wird also eine algebraische Summe addiert (I, II); wie subtrahiert (III, IV)?

3. Kürzer kann man dies in folgender Weise aussprechen:

Regel 1: Nach einem Pluszeichen vor der Klammer kann man diese ohne weiteres fortlassen. Auflösen einfacher Klammern

Regel 2: Nach einem Minuszeichen vor der Klammer müssen die Zeichen in der Klammer beim Auflösen umgekehrt werden.

4. Umgekehrt zeigen die Formeln I ⋯ IV, wie mehrere Summanden einer algebraischen Summe in einer Klammer zusammenzufassen sind. Wie werden Glieder in einer Klammer hinter einem Pluszeichen zusammengefaßt, und wie, wenn vor die Klammer ein Minuszeichen gesetzt wird? Setzen einfacher Klammern

Dies ist eine Verallgemeinerung des Verknüpfungssatzes Nr. 10 in Bd. I S. 31.

5. a) $7a - (3b + 2a) + (5a - 6b) - (5a - 4b)$

b) $11p - (8p - 3r) - (6p + 9r) + (5p - 4r)$

c) $(3y - 15x) - (5y - 12x) - (3x - 4y) - (y - 7x) - (y + x)$

d) $(3r - 6s) - (5r - 11s) + (6r + 2s) - (5r + s) - (7s - 3r)$

6. a) $(2q - 5p - 13r) - (19p - 10q - 5r) + 15p - (11q - 10p - 9r)$

b) $(0{,}8y^2 - 1{,}2x^2) - (3{,}1x^2 - 7{,}2y^2) - (2{,}3y^2 - 4{,}8x^2)$

c) $(3ab + 3b^2 - 5a^2) - (5ab - 3a^2 + 2b^2) - (4ab - 3a^2 - b^2)$

d) $(\frac{3}{10}z^2 + \frac{1}{6}y^2 - \frac{5}{8}x^2) - (\frac{4}{5}z^2 - \frac{1}{3}y^2 - \frac{1}{8}x^2) + (\frac{2}{5}z^2 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{2}{3}y^2)$

Berechne die Ausdrücke

7. $P - Q + R - S$ **8.** $P - Q - R + S$ **9.** $-P + Q - R - S$ für

	P	Q	R	S
a)	$7a - 5b$	$3a - 2b$	$b - a$	$-a$
b)	$-2a - b$	$3a - 2b + 1$	$-a + b - 12$	$a + b$
c)	$13b - 5a - 1$	$12a - 17b + 3$	$45a + 8$	$-47b - 17$

10. Vermehre $3a$; $2x$; $5y$; 7 um a) die Summe, b) die Differenz aus x und y.

11. Vermindere 2a; b; 3b; c um a) die Summe, b) die Differenz aus 2b und 3a.

12. Vermindere die Differenz aus 2p und 5q um a) die Summe, b) die Differenz aus 2p und 6q.

Probe bei Gleichungen

Bem.: Bei den Gleichungen macht man die Probe dadurch, daß man den für x gefundenen Wert in die Ausgangsgleichung einsetzt.

Beispiel: Die Gleichung $10x-(3x+2)=6-(20x-19)$ hat die Lösung $x=1$; die Probe ergibt:

$$\begin{aligned}10\cdot 1-(3\cdot 1+2)&=6-(20\cdot 1-19)\\ 10-(3+2)&=6-(20-19)\\ 10-5&=6-1\\ 5&=5\end{aligned}$$

Setze irgendeinen anderen Wert für x in die gegebene Gleichung ein; keiner erfüllt sie.

Gleichungen

13. a) $20x-(26-4x)-(11+9x)=8$
b) $19-(25x+17)-(5-31x)=17-4x$
c) $(33x-15)-(17x-11)-35=(10x-7)-(3x-4)$
d) $(3{,}9-6{,}3x)-(4{,}3x-1{,}2)=(2{,}7-8{,}5x)-(4{,}1x-8{,}4)$

14. a) $(113-12x)-(45x-18)=(35-23x)-(7x+12)$
b) $(13x+72)-(23-32x)=(212-51x)-(20x+105)$
c) $(5+28x)-(12x-7)=(25-14x)-(10x+1)$
d) $(2{,}4x-0{,}8)-(2{,}8+3{,}4x)=(5x-3{,}8)-(15x-6{,}5)$

15. a) $(3a+4x)-(2a-x)=(31a-x)-(5x+8a)$
b) $(5ab-6x)-(x-3ab)=(ab-x)-(2ab-3x)$
c) $(5a-x)-(3a+2b-2x)=a-(2b-3a+x)$
d) $(\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}a)-(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}a)=(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}x)-(\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}x)$

Identische Gleichungen

Anm.: Setze in die Gleichung $(x+1)^2=x^2+2x+1$ beliebige Zahlenwerte für x ein; immer stimmt die linke Seite mit der rechten überein. Solche Gleichungen heißen *identische* Gleichungen. Die algebraischen Formeln sind identische Gleichungen.

6. Abschnitt: Multiplikation.

1. Für das Malnehmen mit *relativen Zahlen* müssen wieder sinngemäße Erweiterungen festgesetzt werden (vgl. S. 13, Nr. 4).

2. a) Es ist: $(+4)\cdot 3=+12$ [denn: $(+4)+(+4)+(+4)=+12$], es soll auch sein: $(+4)\cdot(+3)=+12$ (denn $+3$ ist gleich 3, S. 13).

Wie $(+4)\cdot 3=+12$, $(+4)\cdot 2=+8$, $(+4)\cdot 1=+4$ ist, gilt auch $(+4)\cdot(+3)=+12$, $(+4)\cdot(+2)=+8$, $(+4)\cdot(+1)=+4$. Nimmt (Bd. I) der Multiplikator, der 2. Faktor, um 1 ab, so wird das Produkt um $(+4)$ kleiner, daher wird entsprechend weiter erklärt:

$$(+4)\cdot 0=0,\ (+4)\cdot(-1)=-4,\ (+4)\cdot(-2)=-8.$$

Vorzeichenregeln

Es gilt allgemein:

I. $(+a)\cdot(+b)=+(a\cdot b)=+ab$, in Worten?
II. $(+a)\cdot(-b)=-(a\cdot b)=-ab$, in Worten?

b) Ferner ist: $(-4) \cdot 3 = -12$ [denn: $(-4) + (-4) + (-4) = -12$].
Ebenso soll: $(-4) \cdot (+3) = -12$ sein (s. oben).
Dann ist: $(-4) \cdot (+2) = -8$, $(-4) \cdot (+1) = -4$.
Nimmt der Multiplikator um 1 ab, so nimmt der Wert des Produktes um (-4) ab, d. h. um $(+4)$ zu. Daher soll wie vorher weiter gelten:
$(-4) \cdot 0 = 0$; $(-4) \cdot (-1) = +4$; $(-4) \cdot (-2) = +8$
es gilt allgemein:
III. $(-a) \cdot (+b) = -(a \cdot b) = -ab$, in Worten?
IV. $(-a) \cdot (-b) = +(a \cdot b) = +ab$, in Worten?
Fasse I und IV sowie II und III in je eine Regel zusammen.
c) Kurz spricht man die Vorzeichenregeln auch so aus:

Merkregeln

I. plus mal plus gibt plus. II. plus mal minus gibt minus.
III. minus mal plus gibt minus. IV. minus mal minus gibt plus.

3. Multipliziere $+20$; (-40; $+1{,}5$; $+\frac{2}{3}$) mit a) $+3$, b) -5, c) $+0{,}9$.

Reihenfolge der Faktoren

4. Nach II. und III. ist es für das Vorzeichen des Produktes gleichgültig, ob der 1. Faktor positiv und der 2. negativ ist oder umgekehrt.
Also gilt der Vertauschungssatz der Multiplikation auch für die relativen Zahlen (Bd. I, S. 31 und Bd. II, S. 10).

5. Auch bei den relativen Zahlen gilt dieser Satz für mehr als zwei Faktoren. Berechne bei verschiedener Reihenfolge der Faktoren:
a) $(+3) \cdot (-4) \cdot (+5)$ b) $(-3) \cdot (-4) \cdot (+5)$ c) $(-3) \cdot (-4) \cdot (-5)$
d) $(-2) \cdot (+5) \cdot (-7)$ e) $(-3) \cdot (+4) \cdot (-5) \cdot (-2)$
f) $(+2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5) \cdot (-7)$ g) $(+x) \cdot (-y) \cdot (+z)$
h) $(-r) \cdot (+s) \cdot (-t) \cdot (+u)$ i) $(-a) \cdot (+b) \cdot (-c) \cdot (+d) \cdot (-e)$

Verknüpfungssatz

6. a) Wann ist das Produkt positiv, wann negativ?
b) Auch für relative Zahlen gilt der Verknüpfungssatz.

Produkt mal Zahl

c) Die Regel für die Multiplikation eines Produktes mit einer Zahl bleibt auch für relative Zahlen erhalten (S. 10, Nr. 16 b).

7. Multipliziere $+2a$; ($-12b$; $+3{,}2c$; $-2\frac{2}{9}d$) mit a) $+5x$, b) $-3y$, c) $-2{,}7p$.

8. Berechne nach der nebenstehenden Tabelle die Produkte aus drei Faktoren.

	a)	b)	c)
d)	$3x$	$-4y$	$2z$
e)	$-2v$	$-\frac{1}{2}x$	$-\frac{3}{4}s$
f)	$-\frac{5}{2}w$	$1{,}2x$	$-\frac{1}{3}w$

9. Berechne:
a) $4x \cdot (-3y) + (-2y) \cdot (-7x)$
b) $(-\frac{2}{3}u) \cdot (-\frac{3}{4}v) - (-\frac{3}{8}v) \cdot (-\frac{2}{3}u)$
c) $(-1\frac{2}{3}t) \cdot (-\frac{3}{10}s) + (-\frac{3}{10}s) \cdot (-3t) - (-\frac{2}{3}s) \cdot (-1\frac{1}{5}t) + (-\frac{3}{5}s) \cdot (-\frac{2}{3}t)$

10. a) Nach Anmerkung S. 10 bedeutet bei sinngemäßer Erweiterung:
$(+a)^2 = (+a) \cdot (+a) = +a^2 = a^2$; $(-a)^2 = (-a) \cdot (-a) = +a^2 = a^2$

b) Was ergibt: $(+a)^3$, $(-a)^3$, $(+a)^4$, $(-a)^4$, allgemein $(+a)^{2n}$, $(-a)^{2n}$, $(+a)^{2n-1}$, $(-a)^{2n-1}$ (für $n = 1, 2, 3\ldots$)?
c) Welche Vorzeichenregel ergibt sich für Potenzen mit geraden Hochzahlen und welche für solche mit ungeraden?

11. a) $(+1)^3$ b) $(-1)^3$ c) $(-0{,}3)^3$ d) $(-\frac{1}{2}x)^3$ e) $(\frac{2}{3}uv)^3$
f) $(+2)^4$ g) $(-2)^4$ h) $(-10)^5$ i) $(-1)^6$ k) $(-2x)^7$

Entnimm der folgenden Tabelle die Werte für x und y und berechne die Ausdrücke

	a)	b)	c)	d)	e)
$x =$	2	3	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$
$y =$	1	-2	-1	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{3}$

12. $x^2 + y^2$ **13.** $x^2 - y^2$
14. $(x + y)^2$ **15.** $(x - y)^2$
16. $x^3 + y^3$ **17.** $x^3 - y^3$
18. $(x + y)^3$ **19.** $(x - y)^3$

Multiplikation von Summen.

20. Wiederhole (Bd. I, S. 31) den Verteilungssatz Regel 12a und 12b.

Summe mal Zahl

a) Man rechnet $23 \cdot 5 = (20 + 3) \cdot 5 = 20 \cdot 5 + 3 \cdot 5$

$$(a + b) \cdot 3 = (a + b) + (a + b) + (a + b)$$
$$= a + b + a + b + a + b$$
$$= (a + a + a) + (b + b + b)$$

also: $(a + b) \cdot 3 = a \cdot 3 + b \cdot 3 = 3a + 3b,$

allgemein: $(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$ (Bild 27). **I.**

Bild 27.

Wie multipliziert man eine Summe mit einer Zahl?

Differenz mal Zahl

b) Man rechnet $29 \cdot 5 = (30 - 1) \cdot 5 = 30 \cdot 5 - 1 \cdot 5$

$$(a - b) \cdot 3 = (a - b) + (a - b) + (a - b)$$
$$= a - b + a - b + a - b$$
$$= a + a + a - b - b - b$$

also: $(a - b) \cdot 3 = a \cdot 3 - b \cdot 3 = 3a - 3b,$

allgemein: $(a - b) \cdot n = a \cdot n - b \cdot n$ (Bild 28). **II.**

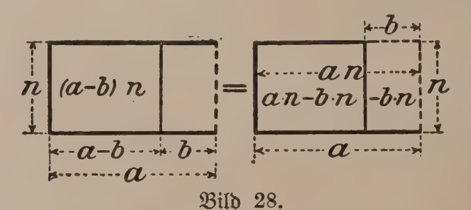


Bild 28.

Wie multipliziert man eine Differenz mit einer Zahl?

c) Bild 27 und Bild 28 zeigen, daß man diese Rechnungen auch geometrisch deuten kann. Nach Bd. I ist der Flächeninhalt (F) eines Rechtecks mit den Seiten a = 5 m und b = 3 m, F = 5 · 3 qm oder allgemein F = a · b qm, daher erkennt man an Bild 27 die Richtigkeit der Formel I und an Bild 28 die Richtigkeit der Formel II.

d) I und II lassen sich einfach zusammenfassen (Nr. 27 b, S. 18) zu der

Regel: Eine (algebraische) Summe wird mit einer Zahl malgenommen, indem man jeden Summanden mit der Zahl malnimmt (und die Teilprodukte addiert). Summe mal Zahl

e) Sie gilt auch für mehr als 2 Summanden:

$127 \cdot 5 = (100 + 20 + 7) \cdot 5 = 100 \cdot 5 + 20 \cdot 5 + 7 \cdot 5$ oder:

$127 \cdot 5 = (100 + 30 - 3) \cdot 5 = 100 \cdot 5 + 30 \cdot 5 - 3 \cdot 5$ allgemein:

$(a + b - c) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n - c \cdot n$ (Bild 29) III.

Bild 29.

21. a) $5(3a - 2b + c)$ b) $12(5u - 3v + 2w)$ c) $1{,}4(2{,}5x - 3{,}5y - 0{,}5z)$

d) $2a(4a^2 - 3a - 1)$ e) $3\frac{1}{5}(2\frac{1}{2}p - 1\frac{1}{4}q + 3\frac{1}{8}r)$ f) $\frac{3}{4}x(\frac{4}{5}x^2 - 2\frac{2}{5}x + 1\frac{1}{7})$

22. a) $z(y - 2x) - 2x(5z - 3y) + 3y(3z - 2x) - 4z(2y - 3x)$

b) $5p(2p^2 - 3p - 4) - 3p(4p^2 + 2p - 6) + 2p(p^2 + 10p + 1)$

23. a) Man multipliziert eine Summe mit einer Summe folgendermaßen; Bild 30 veranschaulicht diese Rechnung: Summe mal Summe

$(a + b)(c + d) = (a + b) \cdot n$, wobei n für c + d gesetzt ist:

$= a \cdot n + b \cdot n$

$= a \cdot (c + d) + b \cdot (c + d)$

$(a + b)(c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$ IV.

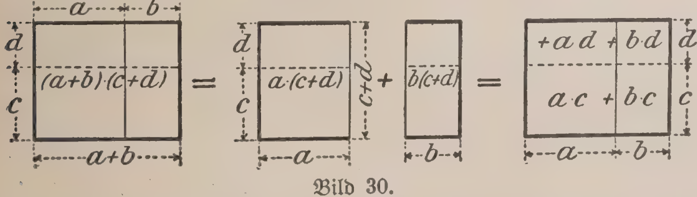


Bild 30.

b) Leite ebenso her: $(a + b)(c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$ V.

Bild 31.

c) Desgleichen: $(a - b)(c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$ VI.

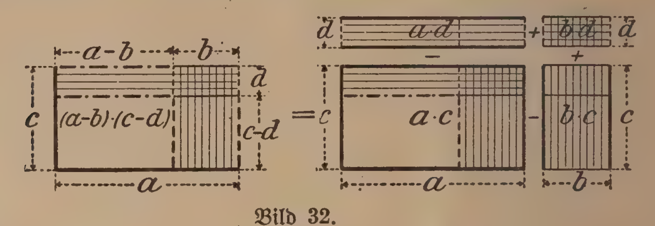


Bild 32.

Regel: (Algebraische) Summen werden miteinander multipliziert, indem man jeden Summanden der einen Summe mit jedem der anderen multipliziert (und die Teilprodukte addiert).

24. a) $(x - 3)(x + 2)$ b) $(y + 4)(y + 3)$ c) $(z - 5)(z - 1)$
d) $(u + 5)(u - 5)$ e) $(3s - 2t)(4s + t)$ f) $(2p + 5q)(4p - 3q)$

25. a) $(x-2)(x+3) - (x-1)(x-4)$ b) $(4-z)(z+6) - (5-z)(7+z)$
c) $(3a-8b)(b+2a) - (4a+3b)(9a-8b) - (5b+3a)(7b-11a)$

26. Aus IV—VI ergeben sich einige neue wichtige Formeln, (Bild 33 bis 35).

Formeln $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ VII.

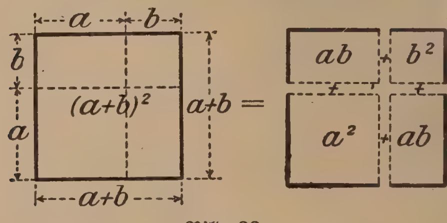


Bild 33.

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ VIII.

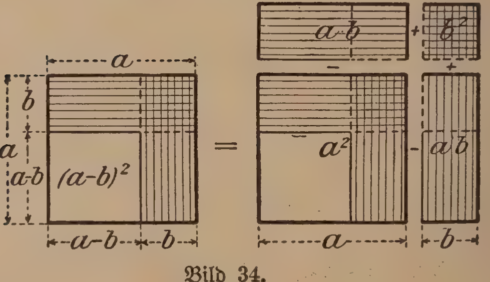


Bild 34.

$$\boxed{(a + b)\ (a - b) = a^2 - b^2}$$ IX.

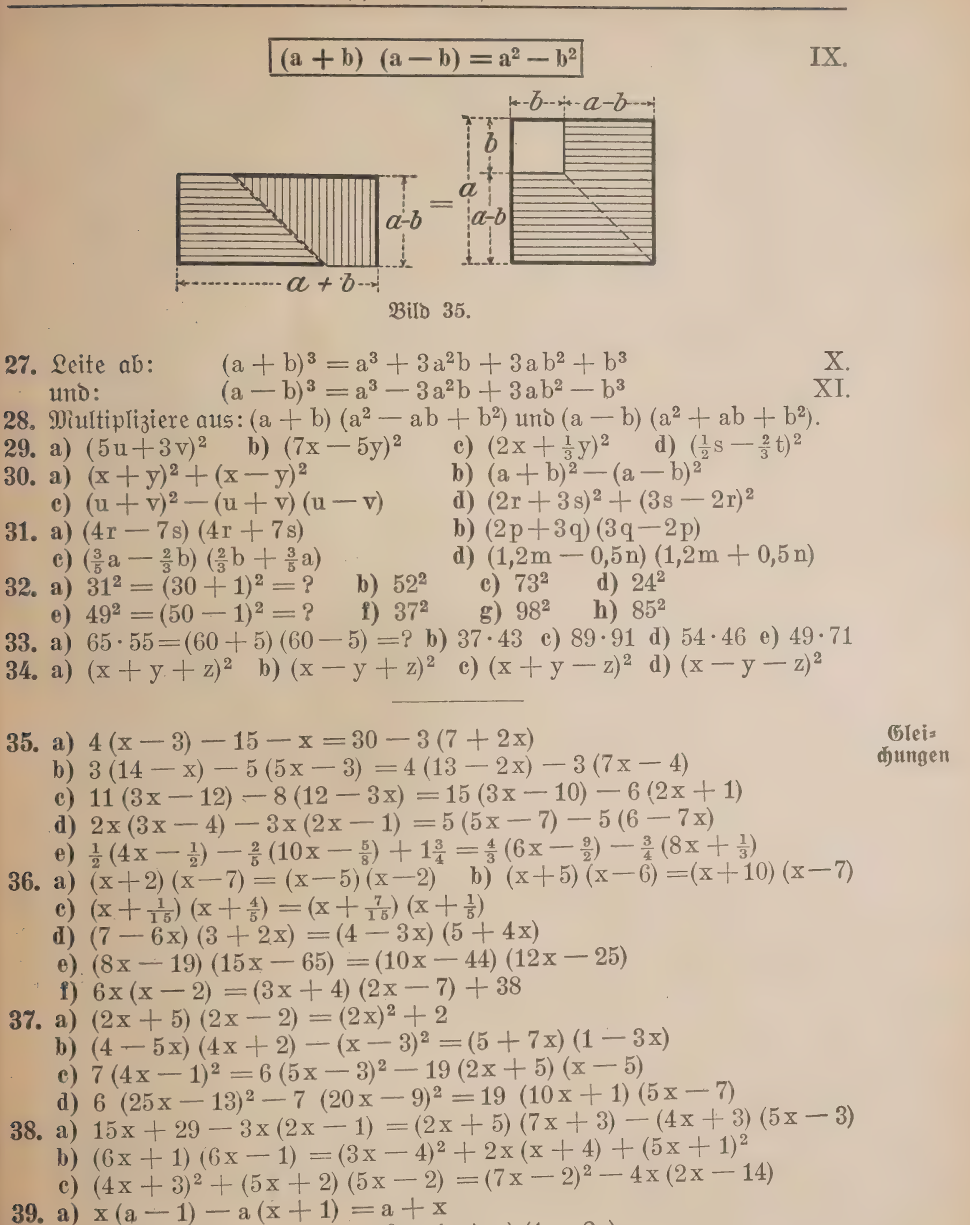


Bild 35.

27. Leite ab: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ X.
und: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ XI.
28. Multipliziere aus: $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ und $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
29. a) $(5u + 3v)^2$ b) $(7x - 5y)^2$ c) $(2x + \frac{1}{3}y)^2$ d) $(\frac{1}{2}s - \frac{2}{3}t)^2$
30. a) $(x + y)^2 + (x - y)^2$ b) $(a + b)^2 - (a - b)^2$
c) $(u + v)^2 - (u + v)(u - v)$ d) $(2r + 3s)^2 + (3s - 2r)^2$
31. a) $(4r - 7s)(4r + 7s)$ b) $(2p + 3q)(3q - 2p)$
c) $(\frac{3}{5}a - \frac{2}{3}b)(\frac{2}{3}b + \frac{3}{5}a)$ d) $(1{,}2m - 0{,}5n)(1{,}2m + 0{,}5n)$
32. a) $31^2 = (30 + 1)^2 = ?$ b) 52^2 c) 73^2 d) 24^2
e) $49^2 = (50 - 1)^2 = ?$ f) 37^2 g) 98^2 h) 85^2
33. a) $65 \cdot 55 = (60 + 5)(60 - 5) = ?$ b) $37 \cdot 43$ c) $89 \cdot 91$ d) $54 \cdot 46$ e) $49 \cdot 71$
34. a) $(x + y + z)^2$ b) $(x - y + z)^2$ c) $(x + y - z)^2$ d) $(x - y - z)^2$

---

35. a) $4(x - 3) - 15 - x = 30 - 3(7 + 2x)$ Gleichungen
b) $3(14 - x) - 5(5x - 3) = 4(13 - 2x) - 3(7x - 4)$
c) $11(3x - 12) - 8(12 - 3x) = 15(3x - 10) - 6(2x + 1)$
d) $2x(3x - 4) - 3x(2x - 1) = 5(5x - 7) - 5(6 - 7x)$
e) $\frac{1}{2}(4x - \frac{1}{2}) - \frac{2}{5}(10x - \frac{5}{8}) + 1\frac{3}{4} = \frac{4}{3}(6x - \frac{9}{2}) - \frac{3}{4}(8x + \frac{1}{3})$
36. a) $(x + 2)(x - 7) = (x - 5)(x - 2)$ b) $(x + 5)(x - 6) = (x + 10)(x - 7)$
c) $(x + \frac{1}{15})(x + \frac{4}{5}) = (x + \frac{7}{15})(x + \frac{1}{5})$
d) $(7 - 6x)(3 + 2x) = (4 - 3x)(5 + 4x)$
e) $(8x - 19)(15x - 65) = (10x - 44)(12x - 25)$
f) $6x(x - 2) = (3x + 4)(2x - 7) + 38$
37. a) $(2x + 5)(2x - 2) = (2x)^2 + 2$
b) $(4 - 5x)(4x + 2) - (x - 3)^2 = (5 + 7x)(1 - 3x)$
c) $7(4x - 1)^2 = 6(5x - 3)^2 - 19(2x + 5)(x - 5)$
d) $6\ (25x - 13)^2 - 7\ (20x - 9)^2 = 19\ (10x + 1)(5x - 7)$
38. a) $15x + 29 - 3x(2x - 1) = (2x + 5)(7x + 3) - (4x + 3)(5x - 3)$
b) $(6x + 1)(6x - 1) = (3x - 4)^2 + 2x(x + 4) + (5x + 1)^2$
c) $(4x + 3)^2 + (5x + 2)(5x - 2) = (7x - 2)^2 - 4x(2x - 14)$
39. a) $x(a - 1) - a(x + 1) = a + x$
b) $(x + c)(x - c) - (x + c)^2 = (c + x)(1 - 2c)$
c) $(x + p)^2 - (x - p)^2 = (4p + 1)(x - 1)$

7. Abschnitt: Division.

1. a) Die Regeln für die Division relativer Zahlen, zu denen auch die Vorzeichenregeln gehören, folgen aus der Forderung: bei der Erweiterung der Division auf relative Zahlen muß stets das Produkt aus Quotient und Divisor den Dividenden mit richtigem Vorzeichen ergeben. Daher ist:

I. $(+a):(+b) = +(a:b)$, weil $+(a:b)\cdot(+b) = +a$ ist.
II. $(+a):(-b) = -(a:b)$, weil . . . ?
III. $(-a):(+b) = -(a:b)$, weil . . . ?
IV. $(-a):(-b) = +(a:b)$, weil . . . ?

Sprich diese Vorzeichenregeln in Worten aus! Vgl. S. 23, Nr. 2c.

b) Fasse I und IV in eine Regel zusammen, ebenso II und III.

2. a) Auch bei den relativen Zahlen gilt: Multiplikation mit einer Zahl und Division durch dieselbe Zahl heben sich auf. Malnehmen und Teilen sind entgegengesetzte Rechenarten. Das führt zu folgenden Grundformeln:

V. $(a \cdot b):b = a \cdot (b:b) = a$
VI. $(a:b)\cdot b = (a \cdot b):b = a \cdot (b:b) = a$

Bilde Beispiele mit relativen Zahlen!

Produkt durch Zahl

b) Die Formel V enthält die Regel, wie man bei relativen Zahlen ein Produkt durch eine Zahl teilen kann. Vgl. S. 11, Nr. 20.

Es ist im allgemeinen nicht üblich, Produkte und Quotienten in Klammern zu schließen. Hier geschieht es nur zum besseren Verständnis bei der Herleitung der Regeln.

3. a) $(+56):(-7)$ **b)** $(-64):(+16)$ **c)** $(-72):(-24)$
d) $\left(\frac{+4}{5}\right):\left(\frac{-8}{15}\right)$ **e)** $(-0{,}6):(-0{,}1)$ **f)** $(-0{,}9):\left(\frac{+10}{9}\right)$
g) $(+18p):(-9)$ **h)** $(-27q):(+3q)$ **i)** $(-57v):(-19v)$
k) $(+48st):(-16t)$ **l)** $(-69x^2y):(-23xy)$
m) $(-125p^2r^2):(+25pr)$ **n)** $(-5m)\cdot(+8n):(+10n)$
o) $(+3p)\cdot(-16r):(-8pr)$ **p)** $(-24x)\cdot(+15y):(+60x)$

Summe durch Zahl

4. a) Drei Geschwister teilen sich 9 Äpfel und 6 Birnen gleichmäßig. Wieviel erhält jedes Kind? (Bd. I, S. 31, Nr. 13a, b.)

$$(9a+6b):3 = 9a:3+6b:3 = 3a+2b$$

Allgemein: $(an+bn):n = an:n+bn:n = a+b.$

Wie teilt man eine Summe durch eine Zahl? Mache die Probe!

b) Entsprechend gilt $(an-bn):n = an:n-bn:n = a-b.$

Wie teilt man eine Differenz durch eine Zahl?

c) Beide Regeln lassen sich zusammenfassen:

Regel: Eine (algebraische) Summe wird durch eine Zahl geteilt, indem man jeden Summanden durch die Zahl teilt (und die Teilquotienten addiert).

5. a) $(12t-8s):(+4)$ **b)** $(24r-18p):(-6)$ **c)** $(lm-ln):(-l)$
d) $(18pv-24pw):(+6p)$ **e)** $(64x^2-48x):(-16x)$
f) $(85a^2b-51ab^2):(+17ab)$ **g)** $(\frac{9}{4}u^2v-\frac{5}{4}uv-\frac{3}{4}v^2u):(-\frac{1}{4}vu)$

6. Die Lösung der Aufgabe: „Summe geteilt durch Summe", geht wie die Division mehrstelliger Zahlen vor sich. Bei Aufgaben nach Beispiel **b)** sind stets Dividend und Divisor vor Ausführung der Rechnung entweder beide nach fallenden oder beide nach steigenden Potenzen derselben Größe zu ordnen. — **Summe durch Summe**

Beispiel: **a)** $1980 : 15 = \underline{\underline{132}}$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline 48 \\ 45 \\ \hline 30 \\ 30 \\ \hline 0 \end{array}$$

b) $(a^3 + 6a^2 + 5a - 12) : (a + 4) = \underline{\underline{a^2 + 2a - 3}}$

$$\begin{array}{r} a^3 + 4a^2 \\ \hline 2a^2\ (+ 5a) \\ 2a^2 + 8a \\ \hline - 3a\ (- 12) \\ - 3a - 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

Mache die Probe!

7. a) $(24x^2 + 26xy + 5y^2) : (6x + 5y)$ **b)** $(a^3 - a^2 - 17a + 20) : (a - 4)$
c) $(p^3 + 4p^2q + 2pq^2 - q^3) : (p + q)$
d) $(48x^3 - 47x^2y + 4xy^2 + 4y^3) : (3x - 2y)$
e) $(x^4 - 4x^3 - 9x^2 - 14x - 24) : (x - 6)$

8. a) $(x^2 - y^2) : (x - y)$ **b)** $(x^3 - y^3) : (x - y)$ **c)** $(x^3 + y^3) : (x + y)$
d) $(a^3 - 1) : (a - 1)$ **e)** $(z^3 + 1) : (z + 1)$ **f)** $(u^3 + 64) : (u + 4)$

9. a) $(a^4 - b^4) : (a + b)$ **b)** $(a^4 - b^4) : (a - b)$ **c)** $(a^4 - b^4) : (a^2 - b^2)$
d) $(p^5 - q^5) : (p - q)$ **e)** $(p^5 + q^5) : (p + q)$ **f)** $(p^6 + q^6) : (p^2 + q^2)$

10. a) $(x^4 - 16) : (x - 2)$ **b)** $(27x^3 + 64) : (3x + 4)$ **c)** $(8u^3 - 125) : (2u - 5)$
d) $(216x^3 - 125y^3) : (6x - 5y)$ **e)** $(81u^4 - 16v^4) : (3u + 2v)$

---

11. a) $15x = -45$ **b)** $-17x = 68$ **c)** $3x - 8 = 5x + 10$ — **Gleichungen**
d) $4x + 7 = 5x - 35 - 8x$ **e)** $18x + 21 = 23x - 24$
f) $7x + 8{,}8 - 3x = 0{,}2 - 4x - 7{,}4$ **g)** $5x + 2\frac{1}{4} - 2x = 13x + 22\frac{1}{4}$

12. a) $26 - (3x - 20) = 28 - (5x - 12)$
b) $(8 - 4x) - (8x + 3) - (11 - 7x) = x$
c) $10{,}4 - (3{,}7 - 4{,}7x) + 1{,}3 = 3{,}2 - (4{,}8 + 2{,}1x) + 0{,}8x$

13. a) $3(2x - 4) - 5(3 - 2x) = 3(4x - 1) - 3(4x + 8)$
b) $3(8 - 2x) - (3 - x)(2 + x) = (3x + 1)(2x + 1) - 5(x^2 - 7)$
c) $(16x + 17)^2 - (14x + 8\frac{1}{2})^2 = (8x + 9)^2 - (2x + 7\frac{1}{2})^2$

14. a) $5x + 7b = 7x + 9b$ **b)** $5a - 3x = 7a - x$
c) $5a - 8x + 11b = 3a - 10x + 3b$ **d)** $7b + 4x - 5a = 9x + 2b$
e) $11a - 4x - 2b = 7x + 9b$ **f)** $9a + 8x - 7b = 2b - x$

15. a) $(x - a)(a + 1) + 2a = x - a$
b) $(x + a)(b - a) - 2ab = b(x + a)$
c) $(x - 1)(b + 1) + 2b = b(x - 1)$
d) $(x - a)(a + 3) + 6a = 3(x - a)$

16. a) $(x - 1)(x + 2b) + x(1 - x) = 2b(1 - 2b)$
b) $(x - a)(x + 6) + x(a - x) = 6(a - 6)$
c) $(a + x)(x - 2b) - x(a + x) = 2b(a - 2b)$
d) $(a - 3x)(ax - 3) - (8x - 3a) = a(1 + ax) + 3(1 - ax^2)$
e) $(x - a)(x - 2b) + x(a - x) + 2b(a + 2b) = 0$

8. Abschnitt: Faktorenzerlegung. – Die Null.

Faktorenzerlegung

1. Durch Umkehrung der Formeln I…XI, S. 24 ff., erhält man

$an + bn = n(a + b)$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$an - bn = n(a - b)$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$an + bn - cn = n(a + b - c)$ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Sie zeigen, daß man Summen in Faktoren zerlegen kann.

Merke dagegen, daß sich $a^2 + b^2$ nicht zerlegen läßt, also:

$a^2 + b^2$ bleibt $a^2 + b^2$.

2. Ausdrücke folgender Art kann man in Produkte umwandeln:

$ap + bp + aq + bq = p(a + b) + q(a + b) = (a + b)(p + q)$

$rx - ry - sx + sy = r(x - y) - s(x - y) = (x - y)(r - s)$

3. Was ergibt sich mit Hilfe der obenstehenden Zerlegungen aus:

a) $(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b)$ d) $(a^2 - b^2) : (a + b)$

b) $(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) : (a + b)$ e) $(a^3 + b^3) : (a + b)$

c) $(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) : (a - b)$ f) $(a^3 - b^3) : (a - b)$

Prüfe die Richtigkeit der Ergebnisse durch Division (S. 29, Nr. 6).

Wandle in Produkte um:

4. a) $9a + 12b$ b) $18c + 54d$ c) $ab - 5ac$ d) $12xy - 45yz$

5. a) $3a^2x + 5b^2x$ b) $36c^2p - 84c^2q$ c) $28p^2q^2 - 49p^2$ d) $55yz^2 + 11y^2z$

6. a) $a^2b + ab^2 - abc$ b) $12p^2q - 21pq + 9pq^2$

7. a) $x(a + b) + y(a + b)$ b) $a(p + q) - b(p + q) + c(p + q)$

8. a) $ab + ac + bd + cd$ b) $px - py + qx - qy$ c) $uk - ul + vl - vk$

9. a) $12 \cdot 26 + 38 \cdot 26$ b) $83^2 + 17 \cdot 83$ c) $79^2 - 79 \cdot 54$

10. a) $a^2 + 6ab + 9b^2$ b) $p^2 - 10pq + 25q^2$ c) $r^2 - rs + \frac{s^2}{4}$

d) $25p^2 - 20pq + 4q^2$ e) $49x^2 - 14xy + y^2$ f) $64s^2 - 16s + 1$

g) $l^4 + 4l^2m + 4m^2$ h) $169z^4 - 26z^2 + 1$ i) $4k^2 - kl + \frac{l^2}{16}$

11. a) $16a^2 - 9b^2$ b) $121u^2 - v^2$ c) $225a^2 - 1$ d) $1 - \frac{9}{16}x^2$

12. a) $a^4 - b^2$ b) $49p^4 - 4q^4$ c) $c^2d^2 - a^2$ d) $1{,}44p^4 - 1$

Die Null

13. Die Null nimmt in unserem Zahlensystem eine besondere Stellung ein.

Während die anderen Zahlen auf dem Zahlenstrahl einen Punkt und außerdem die Länge der Strecke vom Anfangspunkt bis zu diesem hin bestimmen, fällt die zweite Eigenschaft bei der Null fort.

als Summand, Faktor

Für das Rechnen mit ihr gilt: $a + 0 = a$, $a - 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$. Wenn $a \cdot b = 0$ ist, kann $a = 0$ oder $b = 0$ sein. — Warum? Kann auch $a = 0$ und $b = 0$ sein? Was kann man also über die Faktoren eines Produktes aussagen, wenn es den Wert 0 hat?

Dividend, Divisor

14. a) Was ergibt $0 : 3$? — Warum? Allgemein: Was ergibt $0 : a$? $(a \neq 0)$.

b) Was ergibt $3 : 0$? Nehmen wir an, daß $3 : 0$ die bestimmte Zahl b als Ergebnis hätte, so müßte sein: $0 \cdot b = 3$. Das ist aber unmöglich, da $3 \neq 0$ ist. Es ist eben sinnlos, danach zu fragen, wie oft man 0 von 3 abziehen muß, um 0 zu erhalten.

Null als Dividend und Divisor

c) Was ergibt 3 : 3? Was ergibt a : a? Was ergibt 0 : 0? Würde man 0 : 0 = 1 setzen, weil 0 · 1 = 0 ist, so könnte man ebensogut 0 : 0 = 2 oder = 3, oder = $\frac{1}{2}$, oder = —7 usw. setzen. Offenbar könnte die Divisionsaufgabe 0 : 0 jede Zahl n als Ergebnis haben, d. h. sie hat keinen bestimmten Wert, sie ist beliebig deutbar.

15. Um nicht bei der Teilung durch Null solche willkürliche Ergebnisse zu erhalten, hat man festgesetzt: →

Bild 36.

Trugschlüsse

16. Zahlreiche Trugschlüsse beruhen auf der Nichtbeachtung dieser Vorschrift.

a) Jemand löst die Gleichung $(x+1)^2 = (x-1)^2$ auf folgende Art:

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2x + 1$

$+ 2x = -2x$ dividiert durch x

$+ 2 = -2$, d. h. $4 = 0$

b) oder: $10x - 5 = 6x - 3$

$5\,(2x-1) = 3\,(2x-1)$ dividiert durch die Klammer und erhält: $5 = 3$

c) Jemand folgert aus: $12a - 16b = 9a - 12b$

$4\,(3a - 4b) = 3\,(3a - 4b)$, d. h. $4 = 3$

d) Ähnlich könnte man „beweisen", daß jede Zahl a gleich jeder anderen Zahl b ist.

17. Was schließt du aus: **a)** $2x = 0$, **b)** $-7y = 0$, **c)** $xy = 0$, **d)** $5(x-3) = 0$, **e)** $abc = 0$, **f)** $3xyz = 0$, **g)** $(x-1)(x+1) = 0$, **h)** $x^2 - 9 = 0$?

Zusammenfassung und Übersicht.

Vergleiche die folgende Zusammenstellung mit der entsprechenden in Bd. I, S. 31. Sie ist gegenüber der früheren durch die kurze scharfe Formelsprache erheblich klarer und einfacher geworden.

Wiederhole an I ··· IV alle Bezeichnungen der vier Grundrechenarten.

I. $a + b = s$ II. $a - b = d$ III. $a \cdot b = p$ IV. $a : b = q$.

Merke: man addiert b **zu** a, subtrahiert b **von** a, multipliziert a **mit** b, dividiert a **durch** b.

$a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ bedeuten eine Aufgabe und ein Ergebnis.

Die drei Grundgesetze gelten auch für relative Zahlen:

Addition		Multiplikation
	Vertauschungssatz	
Va. $a + b = b + a$		Vb. $a \cdot b = b \cdot a$
	Verknüpfungssatz	
VIa. $a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = \ldots$		VIb. $a \cdot b \cdot c = ab \cdot c = a \cdot bc = \ldots$

Verteilungssatz

VII. $(a + b - c) \cdot d = a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d$.

VII a. $(a + b - c) : d = a : d + b : d - c : d$

In VII und VII a sind die Regeln 12a ··· 13b, Bd. I, S. 31, enthalten.

Für das Rechnen mit relativen Zahlen gilt:

VIII a. $(+a)+(+b)=+(a+b)$

b. $(-a)+(-b)=-(a+b)$

IX $(+a)+(-b)=+(a-b)\ (a>b)$

$=-(b-a)\ (b>a)$

X a. $(+a)-(+b)=(+a)+(-b)$

b. $(+a)-(-b)=(+a)+(+b)$

XI a. $(+a)\cdot(+b)=+ab$

b. $(-a)\cdot(-b)=+ab$

XII $(+a)\cdot(-b)=-ab$

$(-a)\cdot(+b)=-ab$

XIII a. $(+a):(+b)=+a:b$

b. $(-a):(-b)=+a:b$

XIV $(+a):(-b)=-a:b$

$(-a):(+b)=-a:b$

Für das Rechnen mit algebraischen Summen gilt:

XV a. $a+(b-c)=a+b-c$

b. $a-(b-c)=a-b+c$

XVI a. $(a+b-c)\cdot n=an+bn-cn$

b. $(a+b-c):n=a:n+b:n-c:n$

XVII. Zerlegungsformeln:

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$a^2+b^2=a^2+b^2$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Diese Formeln besagen:

VIII. s. S. 14, Regel 1. IX. s. S. 15, Regel 2. X. s. S. 17, Regel 3.

XI. Das Produkt zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv[1].

XII. Das Produkt zweier Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist negativ[1].

XIII. Der Quotient zweier Zahlen mit gleichen Vorzeichen ist positiv.

XIV. Der Quotient zweier Zahlen mit verschiedenen Vorzeichen ist negativ.

Die Formeln XV ··· XVII enthalten die Regeln über das Auflösen (S. 21; S. 25) und Setzen von Klammern (S. 30).

Zur Null: **Die Division durch 0 ist verboten!**

Null Hat ein Produkt den Wert Null, so muß **mindestens ein** Faktor Null sein.

Zu den Gleichungen:

Die vier Umsetzungsregeln gelten auch für relative Zahlen.

1. $x+b=a$, $x=a-b$ 2. $x-b=a$, $x=a+b$ 3. $b\cdot x=a$, $x=a:b$ 4. $x:b=a$, $x=a\cdot b$

1. Ein Summand der einen Seite kann als Subtrahend auf die andere Seite gesetzt werden.
2. Ein Subtrahend der einen Seite kann als Summand auf die andere Seite gesetzt werden.
3. Ein Faktor der einen Seite kann als Divisor auf die andere Seite gesetzt werden.
4. Ein Divisor der einen Seite kann als Faktor auf die andere Seite gesetzt werden.

[1]) Kurze Merkregeln s. S. 23.

III. Bruchrechnung.

9. Abschnitt: Vorbereitung zur Bruchrechnung.

Der größte gemeinsame Teiler, das kleinste gemeinsame Vielfache.

1. a) Den Buchstabenausdruck $24a^2b$ kann man durch 2, 3, a, b ohne Rest teilen. Diese Zahlen lassen sich selbst nicht weiter zerlegen. Es sind Grundfaktoren. Auch 6a oder 8b oder $12a^2b$ sind ohne Rest in $24a^2b$ enthalten. Sie sind ebenfalls Teiler dieses Ausdrucks. Auch hier gilt Erkl. 13, Bd. I. **Teiler**
b) Die Ausdrücke $24a^2b$ und $36ab^2$ haben u. a. 2, 3, 4, 6, a, b und ab als gemeinsame Teiler. Dagegen ist z. B. 8a oder 9b kein solcher.
c) Welches ist der g. g. T. von $24a^2b$ und $36ab^2$?

2. Das bekannte Verfahren zur Bestimmung des g. g. T. durch Zerlegung in Grundfaktoren gilt auch für allgemeine Zahlen. So haben die beiden Ausdrücke $24a^2b$ und $36ab^2$ den g. g. T. 12ab. Es ist $24a^2b : 12ab = 2a$ und $36ab^2 : 12ab = 3b$. 2a und 3b heißen Ergänzungsfaktoren; sie geben an, wie oft der g. g. T. in den einzelnen Zahlen enthalten ist. Sie haben keinen gemeinsamen Teiler mehr, sie sind teilerfremd (Bd. I). **g. g. T.** **Ergänzungsfaktoren**

3. Man erhält den g. g. T. mehrerer Zahlen als Produkt aus den niedrigsten Potenzen ihrer gemeinsamen Grundteiler. **Bestimmung des g. g. T.**

Bestimme den g. g. T. und die zugehörigen Ergänzungsfaktoren:

4. Weitere Beispiele: **a)** $a^2 - b^2$ und $a^3 - b^3$ haben den g. g. T. $a - b$
b) $ax + bx$ „ $ay + by$ „ „ „ „ „ $a + b$
dagegen **c)** $ax + bx$ „ $cx + dx$ „ „ „ „ „ x.

5. a) $45ab$; $30a^2b$ **b)** $28x^2yz$; $35xy^2z$ **c)** $12uv^2w$; $20uvw^2$; $36u^2vw$

6. a) $8(a - b)$; $24(a^2 - b^2)$ **b)** $45(x^2 - y^2)$; $15(x + y)^2$
c) $19(r + s)^2$; $76(r^2 - s^2)$ **d)** $(x^2 - x)$; $(x - 1)$

7. a) $(a^2 + a)$; $(a^2 - a)$ **b)** $(r^2 - 1)$; $(r^2 - r)$
c) $(25x^2 - 64y^2)$; $(5x + 8y)$ **d)** $(a^2 + 7a + 6)$; $(a^2 + 8a + 7)$

8. bis 10. Weitere Übungen in Nr. 16 ··· 18.

11. a) Wie oft ist a in 2a, 3a, na, ab, 5ab, a^2, a^2b, a^3, a^3b^2 enthalten? **Vielfache**
b) In welchen Zahlen und wie oft in diesen Zahlen ist b enthalten?
c) Bestimme unter ihnen die gemeinsamen Vielfachen von a und b.

12. Gib Vielfache an von **a)** x, **b)** y, **c)** gemeinsame Vielfache von x und y und **d)** das k. g. V. von x und y. **k. g. V.**

13. Das vom Rechnen her bekannte Verfahren zur Bestimmung des k. g. V. durch Zerlegung in Grundfaktoren gilt auch für allgemeine Zahlen. Die beiden Ausdrücke $9x^2y$ und $6xy^2$ haben das k. g. V. $18x^2y^2$. Es ist $18x^2y^2 : 9x^2y = 2y$ und $18x^2y^2 : 6xy^2 = 3x$. Die Ergänzungsfaktoren 2y und 3x geben an, wie oft die einzelnen Zahlen im k. g. V. enthalten sind; die Ergänzungsfaktoren sind teilerfremd. **Ergänzungsfaktoren**

Bestimmung des k. g. V. **14.** Man erhält das k. g. V. mehrerer Zahlen als Produkt aus den höchsten Potenzen ihrer gemeinsamen Grundteiler.

15. Weitere Beispiele:

a)	$3a$	und	$4b$	haben als k. g. V.	$12ab$
b)	$p+q$	„	$r-s$	„ „ „ „ „	$(p+q)(r-s)$
c)	$3a$	„	$12a^2b$	„ „ „ „ „	$12a^2b$
d)	$ax+bx$	„	$ay+by$	„ „ „ „ „	$(a+b)xy$
e)	$ax+bx$	„	$cx-dx$	„ „ „ „ „	$(a+b)(c-d)x$

Bestimme das k. g. V. und die zugehörigen Ergänzungsfaktoren:

16. a) $8a^2b;\ 5ab$ b) $12xy;\ 20xz;\ 60xyz$ c) $15(a-b);\ 25(a-b)^2$

17. a) $7a^2bc;\ 49ab^2c;\ 14abc^2$ b) $u^2-uv;\ uv-v^2$
c) $(x+y)^2;\ x^2-y^2$ d) $(p-q)^2;\ p^2-q^2$

18. a) $49a^2-121b^2;\ 7a+11b$ b) $x^2+x;\ x^2-x$
c) $6u+4v;\ 6u-4v;\ 36u^2-16v^2$

19. ⋯ **22.** Desgl. von Nr. 5 ⋯ 7.

10. Abschnitt: Einteilung und Formänderung der Brüche. Anhang: Der Durchschnitt oder das arithmetische Mittel.

A. Einteilung.

1. a) Brüche wurden eingeführt, weil gewisse Divisionsaufgaben mit den natürlichen Zahlen allein nicht lösbar sind (1. Erweiterung unserer Zahlen). b) Warum wurden im 4. Abschn. S. 12 die negativen Zahlen eingeführt? (2. Erweiterung unserer Zahlen).

2. a) Erkläre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, allgemein: $\frac{1}{q}$ (gelesen ein q^{tel}) (Bd. I, S. 96).

b) Gib die Bedeutung von $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{7}{10}$, allgemein $\frac{p}{q}$ [1], mit Hilfe eines Ganzen und c) mit Hilfe mehrerer Ganzen an. d) Man betrachtet $\frac{1}{q}$ als neue Einheit und wendet darauf die Rechengesetze an. Der Bruch $\frac{p}{q}$ bedeutet die Summe von p gleichen Teileinheiten $\frac{1}{q}$.

Arten der Brüche **3.** a) Wie heißen Zähler und Nenner im Bruch $\frac{p}{q}$? b) Wann ist $\frac{p}{q}$ ein Stammbruch, wann ein abgeleiteter Bruch, c) wann ein echter, wann ein unechter Bruch? (Bd. I, S. 101).

4. a) In $\frac{p}{q}$ setze $q=4$ und $p=1, 2, 3, 4\dots$ Wie ändert sich der Wert des Bruches bei festem Nenner?
Trage die Brüche auf der Zahlengeraden ein.
b) In $\frac{p}{q}$ setze $p=1$ und $q=2, 3, 4, 5\dots$ Wie ändert sich der Wert des Bruches bei festem Zähler?
Trage die Brüche auf der Zahlengeraden ein. (Bd. I, S. 102.)
c) Trage die Brüche von Bd. I, S. 102, Nr. 70a und b auf der Zahlengeraden ein. Wo liegen die echten und wo die unechten Brüche auf der Zahlengeraden? Welcher gemeinsamen Grenze nähern sich beide Gruppen?

[1] p und q bedeuten hier zunächst noch natürliche Zahlen.

5. Für die gewöhnlichen Brüche gelten die gleichen Rechengesetze wie für die ganzen Zahlen. Z. B. $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{2}$, i. W.? Oder $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2}$, i. W.?

Die Rechengesetze sollen auch ganz allgemein für Brüche mit beliebigen Zahlen gelten, z. B. für $\frac{a}{b}$, wenn $\begin{matrix} a = +3; -2; -5\ldots \\ b = -4; +5; -7\ldots \end{matrix}$ **Festsetzung**

6. Wie früher kann der Bruch $\frac{p}{q}$ als Ergebnis einer Divisionsaufgabe gedeutet werden; daher wird er auch häufig als Quotient bezeichnet. Welcher Teil des Bruches entspricht dem Dividenden, welcher dem Divisor? Welchem Zeichen entspricht der Bruchstrich? (Bd. I, S. 96.)

7. Die Vorzeichenregeln über das Teilen relativer Zahlen (S. 28) lassen sich daher sogleich auf Brüche übertragen: **Vorzeichenregeln**

I $(+a) : (+b) = \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}$

II $(-a) : (+b) = \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}$

III $(+a) : (-b) = \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}$

IV $(-a) : (-b) = \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}$

(I zeigt: Zähler positiv, Nenner positiv, also Bruch positiv, drücke entsprechend II · · · IV aus.)

8. Wie ändert sich der Wert des Bruches $\frac{p}{q}$, wenn man einsetzt:

a) $p = +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$ und $q = +4$
b) $p = +1, +2, +3, +4, +5, \ldots$ „ $q = -4$
c) $p = -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ „ $q = +4$
d) $p = -1, -2, -3, -4, -5, \ldots$ „ $q = -4$
e) $p = +1$ und $q = +2, +3, +4, +5, \ldots\ldots$
f) $p = -1$ „ $q = +2, +3, +4, +5, \ldots\ldots$
g) $p = +1$ „ $q = -2, -3, -4, -5, \ldots\ldots$
h) $p = -1$ „ $q = -2, -3, -4, -5, \ldots\ldots$?

Trage die Brüche auf der Zahlengeraden ein. (Maßstab: $1 \triangleq 4$ cm)

9. Echte Brüche nennen wir von jetzt ab solche Brüche, die innerhalb des Bereiches von -1 bis $+1$ auf der Zahlengeraden liegen, alle anderen, also alle links von -1 und rechts von $+1$ gelegenen, heißen unecht. Worin liegt die Erweiterung gegen früher? (Vgl. Nr. 4c.)

Bereich der echten Brüche.
-1 0 $+1$

Erkl. 1a: Bei einem echten Bruch $\frac{p}{q}$ ist der absolute Wert des Zählers kleiner als der absolute Wert des Nenners (in Zeichen: $|p| < |q|$); jeder andere Bruch ist unecht.

Daher kann man sagen:

Erkl. 1b: Der Bruch $\frac{p}{q}$ heißt echt, wenn sein absoluter Betrag kleiner als 1 ist $\left(\left|\frac{p}{q}\right| < 1\right)$, jeder andere heißt unecht. $\left|\frac{p}{q}\right| < 1$

Anmerkung: Jemand sagt, die Zahl x liegt „zwischen" -1 und $+1$. Wie drückt man dies in Zeichen aus: $-1 < x < +1$ oder $-1 \leqq x \leqq +1$? Erkläre diese Schreibweise genauer. Beachte, wie ungenau hier das Wörtchen „zwischen" ist! Gehören -1 und $+1$ selbst zu den echten oder unechten Brüchen?

B. Formänderung der Brüche.

Erweitern $\frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$

10. **a)** Erweitert man $\frac{2}{3}$ mit 2 oder 3, so erhält man $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}=\frac{6}{9}$. Ebenso ist $-\frac{3}{4}=-\frac{6}{8}=-\frac{9}{12}$.

b) Entsprechend ergibt sich beim Erweitern von $\frac{p}{q}$ mit n als Erweiterungsfaktor $\frac{p}{q}=\frac{p\cdot n}{q\cdot n}$ (Bd. I).

Kürzen $\frac{p\cdot n}{q\cdot n}=\frac{p}{q}$

c) Liest man diese Formel rückwärts, so zeigt sie, daß man Zähler und Nenner eines Bruches durch einen gemeinsamen Faktor (n) teilen kann, ohne daß sich der Wert des Bruches ändert; man kürzt den Bruch durch n.

d) Die früheren Regeln für das Erweitern und Kürzen eines Bruches gelten auch hier. Wie lauten sie? — Wieder gilt:

e) Beim *Erweitern* und *Kürzen* ändert sich der Wert des Bruches nicht (Bd. I, S. 116).

Gleichnamigmachen

Häufig muß man Brüche gleichnamig machen. Durch welche Formänderung geschieht dies? Der Hauptnenner mehrerer Brüche ist das k. g. V. der Einzelnenner (Bd. I).

11. Geht eine Divisionsaufgabe nicht auf, so kann man entweder den Rest im ganzen angeben oder in der Form eines Bruches als Summand ausdrücken, z. B.:

a) $27:4=6$ Rest 3 oder $27:4=6+\frac{3}{4}=6\frac{3}{4}$; Probe: $(6+\frac{3}{4})\cdot 4=?$

b) $(a+b):a=1$ Rest b oder $(a+b):a=1+\frac{b}{a}$; Probe: $\left(1+\frac{b}{a}\right)\cdot a=?$

Erweitere folgende Brüche:

12. a) $\frac{4}{a}$ b) $\frac{5x}{7y}$ c) $\frac{p+q}{r}$ d) $\frac{5x}{x+y}$ e) $\frac{7a+3b}{x-y}$ mit 7; (−8; k; 5x)

13. a) $\frac{a+b}{c-d}$ b) $\frac{x-y}{3u+2v}$ c) $\frac{5r+2s}{8x-y}$ d) $\frac{9u-9v}{a+b}$ mit $-3a$; $((a-b); (x+y))$.

14. a) $\frac{x-y}{a}$ b) $\frac{6(u-v)}{a^2}$ c) $\frac{-x^2}{a^3}$ d) $\frac{-(x-y)}{ab}$ mit −1; $(2x; -a^2; uv)$.

Bringe folgende Brüche auf den angegebenen Nenner:

15. a) $\frac{1}{a}$ b) $\frac{5x}{b}$ c) $\frac{3c}{ab}$ d) $\frac{7d}{a^2b}$ auf a^2b^2; $(a^3b^2;\ a^2b^3)$.

16. a) $\frac{x}{7a}$ b) $\frac{xy}{35ab}$ c) $\frac{x+y}{14ac}$ d) $\frac{3x(x-y)}{5b^2}$ auf $70ab^2c$.

17. a) $\frac{a}{xy}$ b) $\frac{rs}{(x+y)x}$ c) $\frac{u^2-v^2}{xy(x-y)}$ d) $\frac{a(r+s)}{x^2-y^2}$ auf $xy(x^2-y^2)$.

Kürze folgende Brüche:

18. a) $\frac{12a}{18b}$ b) $\frac{72uv}{164uv}$ c) $\frac{-8ab^2}{30ab^3}$ d) $\frac{64abc^2}{112a^2bc}$ e) $\frac{39x(x-y)}{65(x-y)}$ f) $\frac{70(r^2-s^2)}{35(r-s)}$
g) $\frac{9(x+y)}{135(x^2+y^2)}$ h) $\frac{ax-bx}{cx}$ i) $\frac{uv+uw}{uv-uw}$ k) $\frac{2a-3b}{10a-15b}$ l) $\frac{13u-65v}{15u-75v}$

19. a) $\frac{z^2-1}{z+1}$ b) $\frac{x^4-16}{x^4+4x^2}$ c) $\frac{2a^2-2}{a^2-a}$ d) $\frac{a^2+2ab+b^2}{5a+5b}$
e) $\frac{9a^2-6a+1}{15ax-5x}$ f) $\frac{5x^2+5xy}{x^2-y^2}$ g) $\frac{17x+17ax}{1-a^2}$ h) $\frac{x^2-1}{1-x}$
i) $\frac{(a+4)^2}{a^2-16}$ k) $\frac{16a^2b-b}{4a^2-a}$ l) $\frac{25x^2-36y^2}{15ax-18ay}$ m) $\frac{u^2+v^2}{u^2-v^2}$

20. a) $\frac{y^4 - x^4}{x^2 - y^2}$ b) $\frac{a^4 - b^4}{b^2 + a^2}$ c) $\frac{1 - p^4}{p^2 + 1}$ d) $\frac{a^4 - b^2}{a^2 + b}$ e) $\frac{u^4 - v^2}{v - u^2}$

f) $\frac{(x - y)^2 - z^2}{x - y + z}$ g) $\frac{(a + b + c)^2}{(a + b)^2 - c^2}$ h) $\frac{(u - v)^2 - w^2}{u - v - w}$ i) $\frac{p^2 - (q + r)^2}{p - q + r}$!

k) $\frac{a^2 + 3a + 4}{a^2 - 1}$! l) $\frac{6x^2 + 12x + 6}{(x + 1)^2}$! m) $\frac{p^2 + 18p - 9}{p + 9}$! n) $\frac{u - 2u^2 + 1}{1 - u^2}$!

Mache die folgenden Brüche gleichnamig:

21. a) $\frac{4}{a}$; $\frac{9}{b}$ b) $\frac{3a}{4b}$; $\frac{5x}{6y}$ c) $\frac{9u}{13v}$; $\frac{4a}{15b}$ d) $\frac{6pq}{7r}$; $\frac{9z}{14rs}$ **Gleichnamigmachen**

e) $\frac{a}{b}$; $\frac{c}{d}$; $\frac{e}{f}$ f) $\frac{4a}{9b}$; $\frac{3a}{7b}$; $\frac{a}{2b}$ g) $\frac{2x}{x + y}$; $\frac{3x}{2x + 2y}$ h) $\frac{a + b}{c}$; $\frac{c}{a + b}$

i) $\frac{3b}{4c}$; $\frac{5x}{4a + b}$ k) $\frac{a}{x + 1}$; $\frac{b}{x - 1}$ l) $\frac{5}{3b + 5c}$; $\frac{6}{7x}$ m) $\frac{9}{a + b}$; $\frac{5}{a - b}$

Anhang: Das arithmetische Mittel.

22. Wir haben schon früher Durchschnittswerte oder Mittelwerte berechnet (Durchschnittspreis, -gewicht, -größe, -alter s. Bd. I). Bestimme durch Zeichnung und Rechnung den Mittelwert **a)** von a = 60 mm und b = 80 mm, **b)** von a = 3 cm, b = 4,4 cm, c = 5,6 cm und d = 7,4 cm. Man nennt $\frac{a + b + c + d}{4}$ das arithmetische Mittel der vier Zahlen a, b, c, d. **Durchschnittswerte**

23. Bilde das arithmetische Mittel von **a)** 2n und 6n, **b)** 12a, 17a und 19a, **c)** a und b, **d)** a, b und c. **e)** a, b, c, d, **f)** den n Zahlen a, b, c, . . . p.

24. Wie groß sind die Abweichungen folgender Angaben von dem jeweiligen Mittelwert m: **a)** 5,32 RM, 5,40 RM; m = 5,36 RM, **b)** $25^0\,38'$, $27^0\,6'$; m = $26^0\,22'$, **c)** $34{,}6^0$ C, $35{,}2^0$ C; m = $34{,}9^0$ C.

25. Bestimme an der Zahlengeraden und durch Rechnung das arithmetische Mittel von **a)** − 7 und + 3, **b)** − 4 und − 6, **c)** + 10, − 6 und − 13, **d)** + 5, + 13 und − 8, **e)** a, − x und y.

26. **a)** Berechne nach Anh. II, 1 den jährlichen Geburtenüberschuß (+) oder -unterschuß (−). **b)** Wie groß war danach die jährliche durchschnittliche Bevölkerungszunahme für 1932 · · · 1937?
c) Vergleiche diese Zahl mit der für 1910.

27. Theo berechnet die Bevölkerungsdichte Großdeutschlands nach der Eingliederung der Ostmark, indem er das arithmetische Mittel aus den Bevölkerungsdichten des Altreichs (470 417 qkm; 66 029 448 Einw.) und der Ostmark (83 868 qkm; 6 760 233 Einw.) nimmt, und findet 110,5. Im Schulungsbrief 6. Folge 1938 wird 131,3 als Bevölkerungsdichte angegeben. Was ist richtig? **Bevölkerungsdichte**

28. Berechne nach Anh. II. 8 für die fünf Jahre 1931 · · · 1935 den Jahresdurchschnitt der **a)** Roggenernte, **b)** Weizenernte, **c)** Kartoffelernte. Vergleiche damit die Ernten der folgenden Jahre.

29. 4 Pimpfe schätzen Entfernungen; der 1. schätzt 500 m, der 2. 550 m, der 3. 700 m, der 4. 750 m. Die wirkliche Entfernung beträgt 600 m. Max berechnet den durchschnittlichen Schätzungsfehler so: **Fehlerbestimmung**

1. − 100 m, 2. − 50 m, 3. + 100 m, 4. + 150 m,

also, sagt er, ist der mittlere Fehler $x = \frac{-100 - 50 + 100 + 150}{4} = 25$ m.

Georg rechnet 1. $|-100|$ m, 2. $|-50$ m$|$, 3. $|+100|$ m, 4. $|+150|$ m, und erhält als mittleren Fehler $y = \frac{100+50+100+150}{4} = 100$ m.

Was sagst du dazu?

30. Es wurden folgende Temperaturen um 8 Uhr, 13 Uhr und 21 Uhr an einem Januartage (Julitage) gemessen:
In Berlin -2^0, $+2^0$, -3^0 $(+17^0, +25^0, +16^0)$,
in Wien $+1^0$, $+4^0$, $-0{,}5^0$ $(+18^0, +28^0, +19^0)$,
in London $+3^0$, $+4^0$, $+2{,}5^0$ $(+14^0, +18^0, +15^0)$,
in Moskau -19^0, -8^0, -18^0 $(+23^0, +34^0, +21^0)$.
Berechne die Durchschnittstemperatur für jeden dieser Orte
a) für Januar, b) für Juli.
c) Wie wird die sog. Monatstemperatur aus den Tagesdurchschnittstemperaturen für einen Ort bestimmt? (Atlas: Orte gleicher Durchschnittstemperaturen!)

Isothermen

31. Berechne aus den mittleren Monatstemperaturen der Übersicht die Jahresdurchschnittstemperatur für die drei Städte. — Welcher Fehlschluß liegt bei gleichen Durchschnittstemperaturen nahe?

Monate	Berlin	London	Moskau
Jan.	− 1,5	+ 1,8	− 4,3
Febr.	− 0,5	+ 3,8	− 3,2
März	+ 5,5	+ 6,9	+ 0,1
April	+ 7,6	+ 7,3	+ 4,2
Mai	+ 9,6	+ 8,8	+ 11,4
Juni	+ 15,2	+ 14,2	+ 16,2
Juli	+ 18,3	+ 15,2	+ 23,4
Aug.	+ 20,2	+ 19,4	+ 24,3
Sept.	+ 12,3	+ 12,1	+ 15,2
Okt.	+ 6,9	+ 8,0	+ 6,9
Nov.	+ 2,5	+ 6,2	− 0,6
Dez.	− 0,5	+ 2,1	− 3,1

11. Abschnitt: Addition und Subtraktion.

Gleichnamige Brüche

1. Was gibt:

a) $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ b) $\frac{4}{7} + \left(\frac{-5}{7}\right.$ c) $\left(\frac{-1}{4}\right) + \left(\frac{-3}{4}\right)$ d) $\frac{a}{3} + \frac{b}{3}$ e) $\frac{a}{n} + \frac{b}{}$

f) $\frac{3}{7} - \frac{2}{7}$ g) $\frac{5}{9} - \frac{7}{9}$ h) $\frac{2}{11} - \left(\frac{-3}{11}\right)$ i) $\frac{a}{3} - \frac{b}{3}$ k) $\frac{a}{n} - \frac{b}{n}$

l) $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} - \frac{5}{8}$ m) $\frac{3}{7} - \left(\frac{-2}{7}\right) - \left(\frac{+4}{7}\right)$ n) $\frac{a}{3} + \frac{b}{3} - \frac{c}{3}$ o) $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n}$?

Wie werden also gleichnamige Brüche addiert? Beachte:

p) $\frac{a+b}{c} + \frac{a-b}{c} = \frac{a+b+a-b}{c} = ?$ q) $\frac{r+s}{n} - \frac{r-s}{n} = \frac{r+s-(r-s)}{n} = ?$

2. a) $\frac{6a}{7} + \frac{3a}{\;} + \frac{4a}{7}$ b) $\frac{8}{x} + \frac{7}{x} + \frac{6}{x} - \frac{20}{x}$ c) $\frac{2a}{3b} + \frac{5a}{3b} - \frac{a}{3b}$

d) $\frac{x}{u} + \frac{y}{u} - \frac{z}{u}$ e) $\frac{10z}{x} - \frac{3y}{x} + \frac{5z}{x}$ f) $\frac{15a}{s} - \frac{17a}{s} + \frac{3b}{s}$

3. a) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$ b) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}$ c) $\frac{ax+by}{c} - \frac{bx+ay}{c}$

d) $\frac{5x-3y}{ab} - \frac{x+5y}{ab} - \frac{3x-2y}{ab}$ e) $\frac{3p-7q}{x+y} + \frac{2p+5q}{x+y}$

f) $\frac{7a-3b}{a^2-b^2} - \frac{2a-2b}{a^2-b^2}$ g) $\frac{17x-7y}{a(x-y)} - \frac{3x+7y}{a(x-y)}$

4. Ungleichnamige Brüche mit allgemeinen Zahlen werden vor dem Addieren und Subtrahieren zunächst gleichnamig gemacht. **Ungleichnamige Brüche**

Beispiele: Erkläre die Lösung in folgenden Beispielen:

a) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{ay}{xy} + \frac{bx}{xy} = \frac{ay + bx}{xy}$

b) $\frac{p}{a+b} + \frac{q}{a-b} = \frac{p(a-b)}{a^2-b^2} + \frac{q(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{p(a-b)+q(a+b)}{a^2-b^2}$

c) $\frac{p}{r^2s} + \frac{q}{rs^2} - \frac{t}{rs} = \frac{ps}{r^2s^2} + \frac{qr}{r^2s^2} - \frac{rst}{r^2s^2} = \frac{ps+qr-rst}{r^2s^2}$

5. a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ c) $\frac{p}{q} - \frac{r}{p}$ d) $\frac{1}{6a} + \frac{7}{9a} - \frac{1}{4a} + \frac{11}{12a}$

e) $\frac{3}{ab} + \frac{4}{bc} - \frac{5}{ac}$ f) $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} - \frac{1}{b^2}$ g) $\frac{x^2}{y^2} + \frac{2y}{x} + 1$

6. a) $\frac{a+b}{ab} + \frac{a+c}{ac} + \frac{b+c}{bc}$ b) $\frac{9x^2-6xy-7y^2}{8xy} - \frac{12x-11y}{12x} - \frac{3x-8y}{4x}$

c) $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}$ d) $\frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y}$ e) $\frac{u-v}{u+v} + \frac{u+v}{u-v}$

7. a) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{1}{(a-1)^2}$ b) $\frac{x-5}{(x+3)^2} - \frac{x+2}{x(x+3)}$ c) $\frac{7a-3b}{a-b} + \frac{5a+2b}{2(a-b)} - \frac{3a-11b}{4(a-b)}$

d) $\frac{5a-7b}{15a+4b} - \frac{a+14b}{3a-8b}$ e) $\frac{3x-2}{x-2} + \frac{2x+3}{x-3}$ f) $\frac{u+v}{u-v} + \frac{u}{v} - 1$

8. a) $\frac{3a-1}{2a-2} + \frac{6a+4}{5a-5} - \frac{8a+1}{3a-3}$ b) $\frac{5x+7y}{12x+6y} - \frac{x+y}{2x+y} + \frac{3x+2y}{16x+8y}$

c) $\frac{a}{a+b} + \frac{2ab}{a^2-b^2} - \frac{b}{a-b}$ d) $\frac{2p+q}{(p+q)^2} + \frac{q}{p^2-q^2}$

Gleichungen mit Brüchen (1. Art ihrer Lösung).

Beispiel: a) $\frac{7x}{8} - \frac{3x}{8} = 10$ b) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{5}y = 16$

$\frac{7x-3x}{8} = 10$ $\frac{5x+3x}{15} = 16$

ergibt: $\underline{\underline{x = 20}}$ ergibt: $\underline{\underline{x = 30}}$

9. a) $\frac{x}{5} + \frac{x}{4} = 9$ b) $\frac{x}{2} - \frac{x}{6} = 8$ c) $\frac{x}{8} + \frac{x}{3} = 19\frac{1}{4}$

d) $\frac{2x}{3} - \frac{3x}{5} = 2$ e) $3\frac{1}{3}x - 2\frac{3}{4}x = 7$ f) $7\frac{1}{2}x + 5\frac{1}{5}x = 6\frac{7}{20}$

g) $\frac{2x}{9} + \frac{x}{3} = \frac{1}{3}$ h) $\frac{3}{10}x - \frac{2}{5}x = 1$ i) $2 - \frac{5}{8}x = 7 - \frac{5}{4}x$

10. a) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x = 9$ b) $\frac{x}{5} + \frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 14$ c) $\frac{x}{9} + \frac{1}{12}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}x$

d) $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6}x + \frac{7}{12}x = 10$ e) $\frac{3x}{14} + \frac{19}{3} = \frac{5x}{21} - \frac{4}{35}x$

11. a) $\frac{x}{a} + \frac{x}{2a} = 6$ b) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = a + b$ c) $\frac{x}{3n} + \frac{x}{n} = 8$

d) $\frac{2x}{5m} + \frac{3x}{4m} = \frac{69}{20m}$ e) $\frac{x}{p} - \frac{x}{p^2} = \frac{p-1}{p}$ f) $\frac{x}{a^2} + \frac{x}{a} + x = \frac{a^3-1}{a^2}$

12. Abschnitt: Multiplikation und Division.

A. Bruch und ganze Zahl.

$\frac{p}{q}\cdot r$ **1.** a) Entsprechend zu $\frac{2}{7}\cdot 5 = \frac{2\cdot 5}{7}$ ergibt sich $\frac{p}{q}\cdot r = \frac{p\cdot r}{q}$, wenn p, q, r natürliche Zahlen bedeuten. Wie wird also ein Bruch mit einer ganzen Zahl malgenommen? b) Die Regel gilt auch für relative Zahlen.
Beispiele: 1. $\frac{3}{7}\cdot(-2) = -\frac{6}{7}$ 2. $(-\frac{1}{8})\cdot(-3) = +\frac{3}{8}$ 3. $(-\frac{5}{11})\cdot(+2) = -\frac{10}{11}$
c) Nach dem Vertauschungssatz ist $r\cdot\frac{p}{q} = \frac{p}{q}\cdot r$. Damit ist die Multiplikation einer Zahl mit einem Bruch auf die vorige Aufgabe zurückgeführt.
Beispiele: 1. $(+3)\cdot(-\frac{1}{5}) = -\frac{3}{5}$ 2. $(-4)\cdot(-\frac{2}{9}) = +\frac{8}{9}$

2. a) $7\cdot\frac{5}{6}$ b) $12\cdot\frac{6}{13}$ c) $-\frac{7}{27}\cdot 3$ d) $\frac{8}{15}\cdot(-2)$ e) $\frac{-3}{4}\cdot 5$
f) $5x\cdot\frac{2}{3}$ g) $\frac{9}{11}\cdot 2a$ h) $\frac{3n}{4}\cdot(-6)$ i) $\frac{-5a}{7}\cdot 2a$ k) $\frac{2x}{5y}\cdot 3a$
l) $\frac{ab}{c}\cdot x^2$ m) $\frac{7xy}{3z}\cdot 5xyz$ n) $8n\cdot\frac{3vw}{16n}$ o) $\frac{-pq}{r}\cdot\frac{r}{p}$ p) $\frac{12a}{5}\cdot\frac{10b}{3a^2}$

$\frac{p}{q}:r$ **3.** a) Entsprechend zu $\frac{4}{5}:3 = \frac{4}{15}$ ergibt sich $\frac{p}{q}:r = \frac{p}{q\cdot r}$. Wie wird also ein Bruch durch eine ganze Zahl dividiert?
b) Wieder gilt die Regel auch für relative Zahlen.
Beispiele: 1. $\frac{2}{3}:(-5) = \frac{2}{-3\cdot 5} = -\frac{2}{15}$ 2. $-\frac{3}{7}:(-2) = +\frac{3}{14}$

4. a) $\frac{9}{11}:6$ b) $\frac{42}{47}:7$ c) $\frac{-19}{29}:57$ d) $\frac{9}{22}:(-27)$ e) $-4\frac{1}{4}:(-51)$
f) $\frac{a}{b}:3$ g) $\frac{7x}{y}:14$ h) $\frac{4p}{9q}:12$ i) $\frac{-8a}{11b}:12$ k) $\frac{15xy}{7z}:(-5a)$
l) $\frac{21x^2}{4a}:35x$ m) $\frac{72abc}{16x^2}:18ab$ n) $15\frac{1}{3}a^2c:23ab$ o) $\frac{36(a^2-b^2)}{a+b}:6(a+b)$

B. Bruch und Bruch.

$\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}$ **5.** a) Entsprechend zu $\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3} = \frac{8}{15}$ ist $\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s} = \frac{p\cdot r}{q\cdot s}$. Wie wird also ein Bruch mit einem Bruch multipliziert? b) Diese Regel gilt auch für relative Zahlen.
Beispiele: 1. $(+\frac{2}{5})\cdot(-\frac{4}{3}) = -\frac{2\cdot 4}{5\cdot 3} = -\frac{8}{15}$ 2. $(-\frac{1}{8})\cdot(-\frac{5}{6}) = +\frac{5}{48}$.

6. a) $\frac{25p}{18q}\cdot\frac{24p}{15r}$ b) $\frac{-72a^2}{27bc}\cdot\frac{45b}{108ac}$ c) $\frac{x^2y^2}{a^2b^2}\cdot\frac{3a}{4y}$ d) $\frac{26u^3v}{34a}\cdot\frac{-51v}{65a}$
e) $\frac{-57a^2}{39b}\cdot\frac{48a}{95b}\cdot\frac{-52b}{64a}$ f) $\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{z}\cdot\frac{xy}{z}\cdot\frac{pq}{r}$ g) $\frac{5az}{7bx}\cdot\frac{49c^2}{77ay}\cdot\frac{21by}{35ac}$

7. a) $\frac{a+b}{c}\cdot\frac{d}{e}$ b) $\frac{x+y}{4a}\cdot\frac{20a}{x+y}$ c) $\frac{a+b}{2a-2b}\cdot\frac{(a-b)^2}{a+b}$ d) $\frac{15x}{p+q}\cdot\frac{4(p+q)}{45x^2}$
e) $\frac{ax}{x+y}\cdot\frac{bx}{x+y}$ f) $\frac{x+y}{ab}\cdot\frac{ac}{x+y}$ g) $\frac{a^2-b^2}{m}\cdot\frac{a}{a+b}$ h) $\frac{p}{x^2-25}\cdot\frac{x-5}{5q}$
i) $\frac{x-y}{x^2-y^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{x-y}$ k) $\frac{x^2z}{x-z}\cdot\frac{x^2-z^2}{z}$ l) $\frac{(u+v)^2}{(u-v)^2}\cdot\frac{u^2-v^2}{u+v}$ m) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a+b}{a-b}$

8. a) $(a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ b) $(a-b)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$ c) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\frac{1}{x+y}$
d) $\frac{1}{x-y}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)$ e) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$ f) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^2$ g) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)$

9. Wie heißt der Kehrwert (Bd. I) von a) $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{1}{2}$, 4, $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{x}$, y, **Kehrwert**
b) $-\frac{4}{7}$, $-\frac{p}{q}$, $+\frac{3}{5}$, $+4$, -10, $+\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{5}$, $+\frac{r}{s}$, $-x$, $+\frac{1}{y}$?

10. a) Was gibt $a : \frac{c}{d}$? Wir bezeichnen das unbekannte Ergebnis mit x, dann ist $a : \frac{c}{d} = x$, nach der 4. Umsetzungsregel (S. 7): $p : \frac{r}{s}$

$$a = x \cdot \frac{c}{d}, \quad c \cdot x = a \cdot d, \quad x = \frac{a \cdot d}{c}, \quad x = a \cdot \frac{d}{c}.$$

Damit ist die Divisionsaufgabe auf eine Multiplikationsaufgabe zurückgeführt; im Ergebnis erscheint der Kehrwert des Teilerbruches. $\frac{p}{q} : \frac{r}{s}$

b) Ebenso ist $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$. Regel!

c) Beachtet man die Vorzeichenregeln für die Division relativer Zahlen, so ergibt sich für die Division durch einen Bruch wieder die frühere Regel. Dabei ist es gleichgültig, ob der Dividend selbst eine ganze Zahl oder ein Bruch ist. Wie heißt die Regel? (Bd. I).

11. a) $x : \frac{y}{z}$ b) $36r : \frac{12p}{7q}$ c) $25u^3 : \frac{5u^2}{v}$ d) $-10r : \frac{5s}{3t}$ e) $-18x^5 : \left(-\frac{9x^2}{5y^2}\right)$
f) $-\frac{5}{3} : \frac{3}{7}$ g) $-\frac{5}{17} : \left(-\frac{7}{34}\right)$ h) $-9\frac{2}{3} : 14\frac{1}{2}$ i) $-8\frac{3}{4} : \left(-4\frac{3}{8}\right)$ k) $\frac{a}{b} : \frac{x}{y}$

12. a) $-\frac{x}{p} : \frac{y}{4q}$ b) $-\frac{r}{s} : \left(-\frac{s}{t}\right)$ c) $\frac{3u}{4v} : \left(-\frac{7v}{8u}\right)$ d) $-\frac{4c}{11a} : \frac{3a}{4c}$ e) $\frac{5x^2}{3y^2} : \frac{3x}{5y}$
f) $\frac{8mp}{11nq} : \frac{5m}{22pq}$ g) $\frac{27uv^2}{16ab} : \frac{18ub}{5av}$ h) $\frac{85a^2b^2}{36xy} : \frac{51ab^2}{48x}$ i) $\frac{52c^3d^2e}{75mn^2} : \frac{78c^2e}{125mn}$

13. a) $(a-b) : \frac{3}{a+b}$ b) $\frac{a+b}{a-b} : \frac{a+b}{a}$ c) $\frac{a+b}{x} : \frac{1}{a+b}$ d) $\frac{x-y}{x} : \frac{ax+by}{3x}$
e) $\frac{a+b}{a-b} : \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}$ f) $\frac{p-q}{p+q} : \frac{p^2-q^2}{3p}$ g) $\frac{x^2-1}{x^2+1} : \frac{x-1}{x+1}$ h) $\frac{u^4-16}{v^2-9} : \frac{u+2}{v-3}$

14. a) $\frac{u+v}{8p} : \frac{7u+7v}{16pq}$ b) $\frac{x+y}{x^2-2xy+y^2} : \frac{x^2+2xy+y^2}{x-y}$ c) $\frac{5x-5y}{2a-3b} : \frac{x^2-y^2}{4a^2-9b^2}$
d) $\frac{8a+8b}{25x^2-36y^2} : \frac{a^2+2ab+b^2}{5x+6y}$ e) $\frac{a^3-b^3}{x+y} : \frac{a-b}{x^2+2xy+y^2}$ f) $\frac{a^4-b^4}{2a^2b^2} : \frac{a^2+b^2}{10ab}$

15. Doppelbrüche werden nach 10c der letzten Regel auf einfache zurückgeführt. Der Hauptbruchstrich kann dabei zunächst durch das Divisionszeichen ersetzt werden, z. B. **Doppelbrüche**

a) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{4} : \frac{2}{5} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{2} = \underline{\underline{\frac{15}{8}}}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \underline{\underline{\frac{ad}{bc}}}$

c) $\frac{\frac{x+y}{x-y}}{\frac{p}{q}} = \frac{x+y}{x-y} : \frac{p}{q} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{q}{p} = \underline{\underline{\frac{(x+y)\cdot q}{(x-y)\cdot p}}}$

16. Berechne folgende Doppelbrüche:

a) $\frac{\frac{14}{55}}{\frac{28}{99}}$ b) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{x}{y}}$ c) $\frac{\frac{4a}{7}}{\frac{8b}{21}}$ d) $\frac{\frac{15ab}{4xy}}{\frac{5pq}{3z}}$ e) $\frac{1+\frac{1}{a}}{1-\frac{1}{a}}$ f) $\frac{\frac{5}{p}+\frac{1}{q}}{\frac{5}{q}+\frac{1}{p}}$ g) $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$

h) $\frac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}$ i) $\frac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}$ k) $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ l) $\frac{\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}}{\frac{1}{x-y}+\frac{1}{x+y}}$ m) $\frac{\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}}{\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}}$

C. Gleichungen mit Brüchen (2. Art ihrer Lösung).

17. Die Geichung $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 16$ haben wir so gelöst, daß wir zunächst die Brüche auf ihren Hauptnenner brachten (S. 39). Einfacher ist die Lösung, wenn man die Brüche sofort aus der Gleichung schafft: man multipliziert dazu diese **auf beiden Seiten** mit dem Hauptnenner, z. B.:

a) $15 \cdot \left(\frac{x}{3} + \frac{x}{5}\right) = 15 \cdot 16$ Hn. 15
$5x + 3x = 15 \cdot 16$
ergibt: $\underline{\underline{x = 30}}$

b) $\frac{x-2}{3} + \frac{2x-5}{5} = 2;$ Hn. 15
$5(x-2) + 3(2x-5) = 2 \cdot 15$
ergibt: $\underline{\underline{x = 5}}$

c) $0{,}7(2x-3) - 1{,}6(x-6) = 2{,}4x - 2{,}9;$
multipliziere mit 10 **auf beiden Seiten**
$7(2x-3) - 16(x-6) = 24x - 29$
ergibt: $\underline{\underline{x = 4}}$

18. a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 15$ b) $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = 17$ c) $\frac{x}{7} - \frac{x}{4} + \frac{x}{14} = 11$
d) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3}x = 10$ e) $3\frac{1}{2}x + 7\frac{3}{4}x = 4\frac{1}{2}$ f) $\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x = 4$

19. a) $\frac{x+5}{2} = 3$ b) $\frac{2x+3}{5} = 3$ c) $\frac{3x-4}{4} = 2$
d) $\frac{x+3}{4} = x - 3$ e) $\frac{x-2}{2} = x - 4$ f) $\frac{3x+8}{4} = x + 1$

20. a) $\frac{3x-2}{5} + \frac{4x-1}{3} = 7$ b) $\frac{5x-2}{3} - \frac{3x+1}{11} = 9$ c) $\frac{3x-4}{5} - \frac{7x-22}{6} = 4$
d) $\frac{8x+7}{5} - \frac{4x-1}{3} - \frac{9x-7}{2} = 1$ e) $\frac{x+5}{2} - \frac{2x+5}{3} + \frac{1+3x}{6} = 0$
f) $\frac{11x+3}{10} - \frac{8x-6}{15} - \frac{7x+1}{20} = 0$ g) $\frac{7x-3}{8} + \frac{4x+5}{12} = \frac{2x-8}{3} - \frac{5-28x}{16}$

21. a) $0{,}48x - 2{,}19 + 1{,}22x - 3{,}51 = 2{,}27x + 5{,}14 - 2{,}57x + 1{,}16$
b) $2\frac{2}{5}x - (10\frac{1}{4} - 3\frac{1}{10}x) = 5\frac{3}{8} - (3\frac{1}{2}x - 2\frac{3}{8})$
c) $2{,}5(2x-3) - 3{,}8(3x-11) = 8{,}7(x-3)$
d) $1{,}6(3-2x) - 2{,}5(4+7x) = 3{,}9 - 2{,}7(4+7x) + 1{,}1(3-2x)$

22. a) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = \frac{1}{ab}$ b) $\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = \frac{a-b}{a}$ c) $\frac{x}{2a} + \frac{x}{3a} = \frac{x}{6a} - 2$
d) $\frac{5x}{2a} + \frac{3x}{5a} = \frac{93}{10a}$ e) $\frac{x}{a} + \frac{x}{a^2} = \frac{a+1}{a}$ f) $\frac{x}{a^2} - \frac{x}{a} + x = \frac{a^3+1}{a^2}$

23. a) $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$ b) $\frac{x-a}{a+b} - \frac{x-b}{a-b} + 1 = 0$
c) $\frac{x+2a}{a-b} + \frac{2b-x}{a+b} = 2$ d) $\frac{x-a}{1-a} + \frac{x+1}{1+a} + \frac{1+a^2}{1-a^2} = 0$

24. a) $\frac{3}{x} + \frac{5}{x} = \frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{4x} = \frac{5}{12}$ c) $\frac{2}{5x} + \frac{5}{3x} = 5\frac{1}{3} + \frac{1}{x}$
d) $\frac{1}{4x} - 5 = \frac{1}{5x} - 4$ e) $\frac{x-4}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{3}{10}$ f) $\frac{2x-5}{x} + \frac{2}{3} = \frac{3(x+1)}{4x}$

25. a) $\frac{12x-7}{x-1} + \frac{2x+3}{3x-3} = 14$ b) $\frac{10x+1}{2x+5} - \frac{26x-1}{12x+30} = \frac{2}{3}$
c) $\frac{7x+1}{21x-3} + \frac{35x-4}{14x-2} = \frac{21x+10}{28x-4}$ d) $\frac{2x-2}{x+1} - \frac{x-11}{x^2-1} = 2$
e) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-4}{(x-1)^2} = 1$ f) $1 + \frac{2}{9x^2-25} = \frac{15x+4}{3(3x+5)} + \frac{2x+1}{5-3x}$

Zusammenfassung und Übersicht.

Vergleiche die folgende Zusammenstellung mit der entsprechenden in Band I, S. 116 und S. 143. Die dort in Worten gegebenen Regeln werden hier kürzer durch Formeln wiedergegeben.

Bei Brüchen gelten dieselben Vorzeichenregeln wie bei der Division, der Bruchstrich ist an die Stelle des Doppelpunktes getreten:

$$\frac{+p}{+q} = +\frac{p}{q} \qquad \frac{+p}{-q} = -\frac{p}{q} \qquad \frac{-p}{+q} = -\frac{p}{q} \qquad \frac{-p}{-q} = +\frac{p}{q}$$

Brüche mit **gleichen** **Vorzeichen** im **Zähler** und **Nenner** sind **positiv.** / **Brüche mit** **ungleichen** **Vorzeichen** im **Zähler** und **Nenner** sind **negativ.**

$\pm \frac{p}{q}$ ist ein **echter Bruch,** wenn $\left|\pm \frac{p}{q}\right| < 1$ ist, in allen anderen Fällen ist er unecht.

Erweitern mit n: $\frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{q \cdot n}$. Kürzen durch n: $\frac{p \cdot n}{q \cdot n} = \frac{p}{q}$.

Beim Erweitern und Kürzen bleibt der Wert eines Bruches ungeändert. Nur Faktoren kann man kürzen.

Für das Rechnen mit Brüchen gilt

Addition (u. Subtr.) Gleichnamige: $\frac{a}{n} + \frac{b}{n} - \frac{c}{n} = \frac{a + b - c}{n}$

Ungleichnamige: $\frac{a}{p} + \frac{b}{q} - \frac{c}{r} = \frac{aqr + bpr - cpq}{pqr}$

Multiplikation: $\frac{p}{q} \cdot r = \frac{p \cdot r}{q}$; $\quad \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{p \cdot r}{q \cdot s}$

Division: $\frac{p}{q} : r = \frac{p}{q \cdot r} \quad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r}$

Der **Kehrwert** der Zahl a ist die Zahl $x = \frac{1}{a}$, deren Produkt mit a gleich 1 ist:

$$a \cdot x = 1, \text{ also: } x = \frac{1}{a}.$$

Ist a ein Bruch: $a = \frac{p}{q}$, so ist der Kehrwert: $x = \frac{q}{p}$.

Unter dem **arithmetischen Mittel** m der n Größen $a_1, a_2 \ldots a_n$ versteht man:

$$m = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

Eine **Bestimmungsgleichung** auflösen heißt die Unbekannte bestimmen. Dabei ist folgendes zu beachten:

1. **Brüche schafft man fort.**

Man multipliziert die Gleichung auf beiden Seiten mit dem Hauptnenner.

2. **Klammern,** die die Unbekannte enthalten, **löst man auf.**

3. **Man ordnet die Gleichung,** d. h. alle Glieder, die die Unbekannte enthalten, vereinigt man auf der einen Seite (gewöhnlich auf der linken), die bekannten Glieder auf der anderen. Die geordnete Gleichung hat die Form

$$ax = b.$$

4. **Man löst sie auf,** d. h. man teilt beide Seiten durch a und erhält:

$$x = \frac{b}{a}.$$

5. **Man macht die Probe** auf die Richtigkeit der Lösung, indem man den gefundenen Wert für x in die gegebene Bestimmungsgleichung einsetzt.

IV. Wiederholung und Ergänzung zur Geometrie.

13. Abschnitt: Weitere Anwendungen zu den Winkeln.

1. Bei Wehrmacht und Handelsmarine zählt man die Winkel von 0^0 bis 360^0 von Nord über Ost, also im Sinne des Uhrzeigers (rw = rechtweisend). Der Winkel 270^0 bedeutet Westen, die Angabe 180^0 Süden. — Mache dir zu den folgenden Aufgaben eine Skizze.

Windrose 2. Bild 37 stellt eine Windrose dar (Bd. I). Welchen Winkel mit der Nordrichtung bildet die Richtung nach a) O, b) W, c) S, d) SW, e) NO, f) ONO, g) NW, h) WNW, i) NNO, k) OSO, l) SSW?

3. Welchen Winkel bilden miteinander die Richtungen a) NNO und N, b) NNW und SW, c) WSW und O, d) SSO und WNW?

4. Welche Himmelsrichtung liegt vor, wenn angegeben wird: a) 180^0, b) 135^0, c) 270^0, d) 315^0, e) $22\frac{1}{2}^0$, f) 225^0, g) $292\frac{1}{2}^0$, h) $157\frac{1}{2}^0$?

Bild 37.

Marine 5. In der Handelsmarine rechnet man auch viertelkreisig. Beliebige Richtungen werden durch die östlichen oder westlichen Abweichungen von der Nordsüdrichtung gemessen. Die Angabe N 20^0 O (gelesen: Nord 20 Grad Ost) bedeutet, daß die Richtung um 20^0 von Nord nach Ost abweicht (Bild 38). Lies ebenso a) N 33^0 W, b) S 71^0 O (Bild 39), c) S 30^0 W, d) S 25^0 O (Zeichnung).

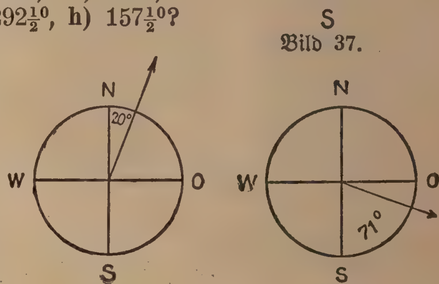


Bild 38. Bild 39.

6. a) Wie groß kann bei dieser Bezeichnung der Winkel höchstens werden? b) Wie groß sind die Winkel in Nr. 2 und 3 nach Nr. 5?

7. Welchen Winkel bilden die Richtungen (Zeichnung!) a) N 33^0 W und N 18^0 O, b) S 35^0 O und N 48^0 O, c) S 20^0 W und N 7^0 W?

8. Ein Dampfer hat den Kurs N 63^0 W. Um welchen Winkel muß er seinen Kurs ändern, wenn er einen Hafen, der a) in N 28^0 W, b) in S 71^0 W liegt, anlaufen soll? Zeichnung!

9. Ein Dampfer (D) steuert S 59^0 W. In welcher Richtung liegt ein Feuerschiff (F), das querab (senkrecht zur Fahrtrichtung) a) backbord (links), b) steuerbord (rechts) erscheint? Zeichnung!

10. Wandle in Grad und Min. um a) $13{,}5^0$, b) $48{,}1^0$, c) $36{,}6^0$, d) $67{,}9^0$.

11. Wandle in Grad um a) $30'$, b) $6'$, c) $43'$, d) $15^0\,24'$, e) $50^0\,43'$, f) $73^0\,21'$.

Teilstrichteilung

12. **a)** Am schweren Maschinengewehr und Geschütz mißt man Winkel mit dem Richtkreis, dessen Umfang nicht in 360°, sondern in 6400⁻ (lies: Teilstrich oder Strich) eingeteilt ist. Diese Einteilung findet sich auch beim Kartenwinkelmesser[1]) (Bild 40) und Marschkompaß (Bild 304).

b) Für die Umrechnung von Grad in Teilstrich und umgekehrt gilt: $360^\circ \triangleq 6400^-$. Daraus folgt: $1^\circ \triangleq 17{,}78^-$, $1^\circ \approx 18^-$; $1^- \triangleq 0{,}05625^\circ$, $100^- \triangleq 5{,}625^\circ$. Prüfe diese Angaben nach.

Kartenwinkelmesser

13. Rechne in Teilstrich um **a)** 10°, 25°, 70°; **b)** 120°, 135°, 180°; **c)** 65°, 145°, 255°; **d)** 28°, 246°.

14. Rechne in Grad um 200⁻, 900⁻, 1700⁻, 3200⁻, 4850⁻, 1280⁻.

Bild 40.

Marschkompaß

Der Marschkompaß (Bild 304) trägt eine Stricheinteilung von 6400⁻, die aber nur von 100 zu 100 Strich durch die Marken 0, 1, 2 . . . 64 gekennzeichnet ist. Bei ihm wird der Winkel von N über W gemessen. Beim Kartenwinkelmesser wird von N über O gezählt. Dies ist bei Umrechnungen zu beachten.

15. Welche Marschrichtungen (Kompaßzahlen) entsprechen den Richtungen **a)** W, **b)** S, **c)** O, **d)** NW, **e)** SO, **f)** NNW, **g)** WNW, **h)** OSO?

Miß im folgenden Winkel im Uhrzeigersinn und im Uhrzeigergegensinn.

16. Schätze und miß folgende Winkel in Grad und bestimme die Schätzungsfehler. Miß sie dann in Teilstrich. (Tabelle!)

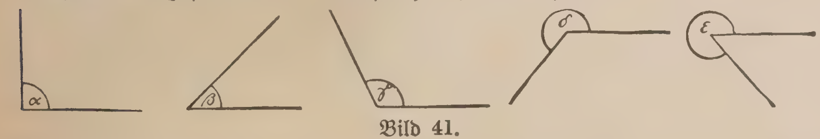


Bild 41.

Anstieg

17. **a)** Bild 42 stellt eine Straße dar, ∢ α ihren **Anstiegswinkel**. Er bestimmt den **Anstieg** der Straße. Das Maß für den Anstieg wird vielfach in der Form h : s (gelesen h zu s) angegeben, wobei s die in m waagerecht gemessene Strecke und h die Erhebung ihres Endpunktes über den Anfangspunkt in m angibt (Bild 42). Die Angabe 1 : 5 bedeutet, daß auf

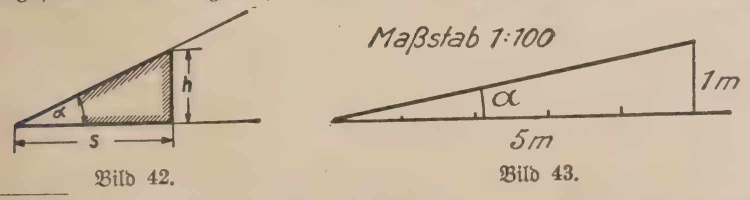


Bild 42. Bild 43.

---

[1]) Es liegt Bd. I ein vereinfachter Winkelmesser in Grad- und Teilstrichteilung bei.

eine waagerechte Strecke von 5 m Länge ein Anstieg von 1 m kommt (Bild 43). Der Steigungswinkel α beträgt in diesem Falle 11^0. Miß!

b) Ist wie bei Angaben an der Eisenbahn die Länge der waagerechten Strecke (Bild 44) angegeben, für welche dieser Anstieg beständig bleibt, so kann man aus einer maßstäblichen Zeichnung Winkel und Endhöhe entnehmen. Die Angabe in Bild 44 bedeutet, daß die Erhebung 1 m auf je 10 m waagerechter Strecke beträgt und dies für eine Länge von 1200 m gilt. Bild 45 liefert den Steigungswinkel $\alpha = 6^0$ und Bild 46, in welches aus Bild 45 $\sphericalangle \alpha$ übertragen worden ist, die Enderhöhung $h_1 = 120$ m.

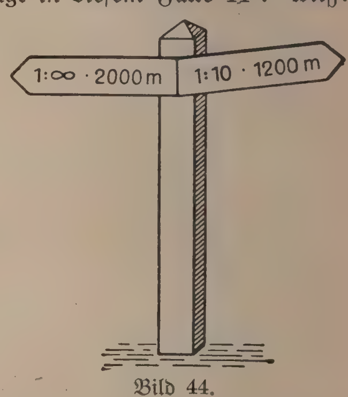


Bild 44.

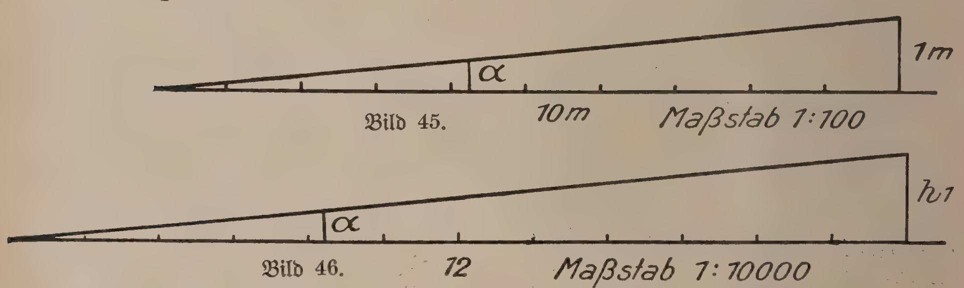


Bild 45.

Bild 46.

Anstieg in v. H. 18. Häufig wird der Anstieg in Prozenten angegeben. Die Angabe 14 v. H. bedeutet, daß auf 100 m waagerechter Strecke eine Erhebung von 14 m kommt. (Bild 47.)

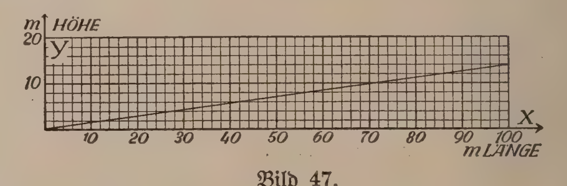


Bild 47.

Bei unseren Reichsautobahnen beträgt der Anstieg höchstens 5—7 v. H.

19. Bestimme an Hand einer maßstäblichen Zeichnung, am besten mit Hilfe von Gitterpapier, den Anstiegswinkel α bei einem

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
Anstieg von	5 %	7 %	9 %	10 %	18 %	32 %	50 %
Winkel α							

20. Die Motorgruppe Ostmark im NSKK. führte vom 28. · · · 30. Juli 1938 die erste deutsche Alpenfahrt im Großreich durch. Die zu überwindenden Höchststeigungen auf den für die Fahrer vorgeschriebenen Alpenstraßen betrugen am Thurner Paß 10%, auf der Großglocknerstraße 12%, am Kreuzbergsattel 26%, am Katschberg 32%, auf dem Paß Gschütt 23% und dem Packsattel 8%. Ermittle durch Zeichnung die zugehörigen Steigungswinkel dieser Straßen. **NSKK.**

21. Vom KdF.-Wagen sind u. a. folgende Angaben bekannt: bei einer Nutzlast von 300 kg hat er im **KdF.-Wagen**

3. Gang bei einer Dauergeschwindigkeit	von 65 km	9%	Steigfähigkeit,
2. „ „ „ „	„ 40 „	18%	„
1. „ „ „ „	„ 20 „	32%	„

Die Zeitung „Der NSKK.-Mann" vom 20. 8. 1938 brachte dazu die nebenstehende Skizze. Fertige selbst nach obigen Angaben eine Zeichnung an, miß die Winkel in Bild 48 und in deiner Zeichnung und prüfe auf diese Weise, ob die Zeitungsskizze richtig ist.

Bild 48.

22. a) Bei dem Steigungswinkel handelt es sich eigentlich nicht um den Winkel zweier Geraden, sondern um den Winkel zweier Ebenen, nämlich der Straße gegen die Waagerechte. In diesem besonderen Falle nennt man den Winkel, den die zweite Ebene mit der Waagerechten bildet, auch den N e i g u n g s w i n k e l. **Neigungswinkel**

Man spricht von ihm bei: Eisenbahnstrecke, Dach, Hang, Pult . . .

b) Schlägt man ein Buch auf (Bild 49), so ist die eine Deckelebene gegen die andere gedreht. Die beiden oberen (und unteren) Deckelränder bilden einen Winkel miteinander, der von der Größe der Öffnung abhängt, und den man den W i n k e l d e r b e i d e n E b e n e n nennt. **Winkel zweier Ebenen**

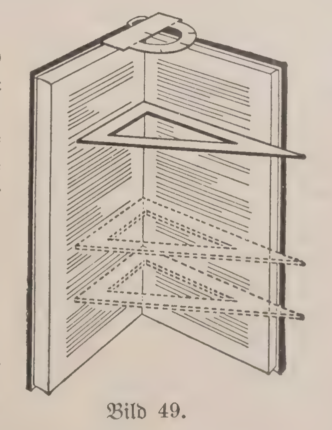


Bild 49.

c) Die Geraden, die die beiden Ränder bilden, stehen auf der Drehachse (die im Buchrücken liegt) senkrecht. Legt man bei entsprechender Öffnung des Buches ein Zeichendreieck oben an, so gibt sein Winkel den Winkel der beiden Ebenen an; verschiebt man es parallel zu sich selbst, so ändert sich dadurch die Neigung der beiden Ebenen zueinander nicht. Mit dem Winkelmesser kann man den Winkel der beiden Ebenen bestimmen (Bild 49).

14. Abschnitt: Neben- und Scheitelwinkel.

Er-hebungs-winkel

1. a) Der Winkel (α), Bild 50, den der Sehstrahl nach der Spitze C eines Turmes mit der Waagerechten (Horizontalen) bildet, wird Erhebungswinkel (Höhenwinkel) genannt.

b) Wie kann man mit Hilfe des Winkelmessers und eines im Mittelpunkte angebrachten Lotes den Erhebungswinkel finden?

Anl.: $\alpha + \beta = 90^0$. Grund?

Bestimme in dieser Weise den Erhebungswinkel c) des gegenüberliegenden Dachrandes, d) eines Baumes.

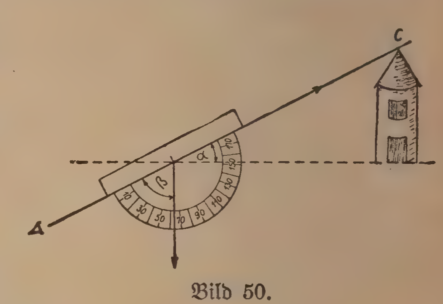


Bild 50.

2. a) Die Lotrechte (Bild 50) bildet mit dem Sehstrahl nach C und der rückwärtigen Verlängerung zwei Winkel, die Nebenwinkel heißen.

Neben-winkel

b) Allgemein: Verlängert man einen Schenkel eines Winkels (α) (Bild 51) rückwärts, zieht also seinen Gegenstrahl, so ist der neu entstandene Winkel (β) der Nebenwinkel von α.

Erkl. 1: **Nebenwinkel sind Nachbarwinkel, deren nichtgemeinsame Schenkel Gegenstrahlen sind.**

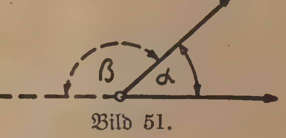


Bild 51.

c) Da die beiden Nebenwinkel α und β zusammen stets einen gestreckten bilden, folgt der

Lehrs. 1: Nebenwinkel betragen zusammen 180⁰.

3. a) α und β sind Nebenwinkel. Ergänze die nebenstehende Tabelle, wenn ∢ α stets um 14⁰ wächst.

α	13⁰	27⁰	41⁰	......
β	167⁰	153⁰	......	......

b) Wie groß ist ∢ β, wenn sein Nebenwinkel α gegeben ist?

c) Wie ändert sich ∢ β, wenn ∢ α wächst (abnimmt)?

4. a) ∢ $\alpha = 80^{-}$ soll gleichmäßig um 350^{-} wachsen; ergänze die nebenstehende Tabelle für seinen Nebenwinkel β.

α	80^{-}	430^{-}	780^{-}	......
β	3120^{-}	2770^{-}	......	......

b) Wie heißt jetzt die Formel (Nr. 3 b) in Teilstrich?

5. a) Zeichne zu einem beliebigen Winkel den Ergänzungswinkel zu 180⁰.
b) Zeichne zu einem spitzen Winkel den Ergänzungswinkel zu 90⁰.

6. Bestimme die Ergänzungswinkel von a) 121⁰ 22′, b) 97⁰ 54′, c) 43⁰ 46′ zu 180⁰; ebenfalls von d) 65⁰ 13′, e) 19⁰ 51′, f) 37⁰ 37′ zu 90⁰.

7. Ergänze nebenstehende Tabelle, so daß stets $\alpha + \beta = 90^0$ ist. Dann ist $\beta = 90^0 - \alpha$.

α	87⁰	79⁰	71⁰	......
β	3⁰	11⁰	......	......

Senkungswinkel

8. a) In Bild 52 stellt β den Senkungswinkel (Tiefenwinkel) dar; d. h. den Winkel, den der Sehstrahl nach einem tiefer gelegenen Punkt mit der Waagerechten bildet.

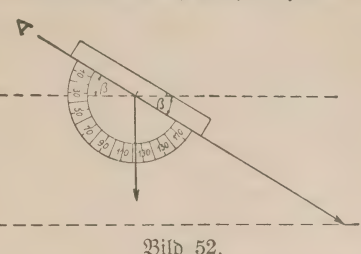


Bild 52.

b) Wie kann man den Senkungswinkel mit Hilfe des Lotes feststellen?

c) Bestimme ebenso den Senkungswinkel zur Fußbodenleiste, zum gegenüberliegenden Straßenrand.

Erhebungs- und Senkungswinkel spielen in der Vermessungskunde, in Luftfahrt, Schiffahrt und Wehrmacht eine hervorragende Rolle.

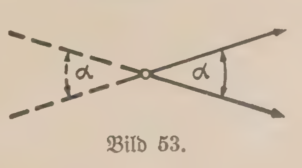
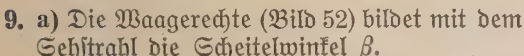


Bild 53.

Scheitelwinkel



9. a) Die Waagerechte (Bild 52) bildet mit dem Sehstrahl die Scheitelwinkel β.

b) Allgemein: Verlängert man beide Schenkel eines Winkels (α) rückwärts, so bilden die Verlängerungen einen neuen Winkel. Dieser und der erste heißen Scheitelwinkel (Bild 53).

Erkl. 2: **Scheitelwinkel sind Winkel, bei denen die Schenkel des einen die Gegenstrahlen des anderen sind.**

c) Da beide Winkel durch dieselbe Drehung gemessen werden, ergibt sich der

Lehrs. 2: Scheitelwinkel sind einander gleich.

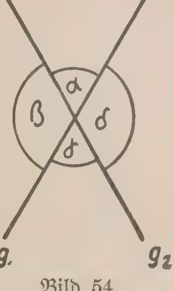
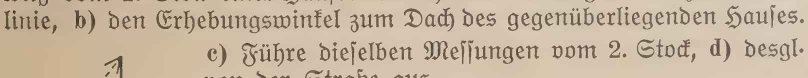


Bild 54.

10. Zwei sich schneidende Geraden bilden vier Winkel miteinander (Bild 54). Nenne **a)** Scheitelwinkel, **b)** Nebenwinkel. **c)** Wie groß sind die Winkel β, γ, δ, wenn $\sphericalangle \alpha = 1 \llcorner$ ist? (Zeichnung.)



11. Miß vom 1. Stock eines Hauses aus **a)** den Senkungswinkel zur Grundlinie, **b)** den Erhebungswinkel zum Dach des gegenüberliegenden Hauses. **c)** Führe dieselben Messungen vom 2. Stock, **d)** desgl. von der Straße aus.

Sehwinkel

12. Man nennt den ganzen Winkel $(\alpha + \beta)$, unter dem die Höhe des Hauses erscheint, auch Sehwinkel. (Bild 55.)

Allgemein nennt man Sehwinkel einer Strecke den Winkel der Sehstrahlen nach ihren Endpunkten (Bild 56).

Bild 55.

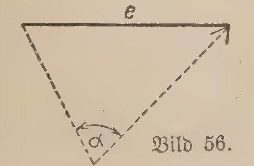


Bild 56.

13. Bestimme für einen Kirchturm den Sehwinkel. Verändere deine Entfernung vom Turm; wie ändert sich der Winkel?

V. Symmetrie.

15. Abschnitt: Zentrale Symmetrie.

1. a) Um wieviel Grad muß man sich das Bild eines Propellers (Bild 57) um seinen Mittelpunkt in der Zeichenebene gedreht denken, um wieder das gleiche Bild zu erhalten?

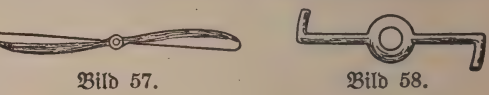


Bild 57. Bild 58.

b) Beantworte die gleiche Frage für Bild 58, das den oberen Teil eines Rasensprengers zeigt (Segnersches Wasserrad).

c) Bild 59 zeigt zwei Scheitelwinkel. Bei einer Drehung um 180° um den Scheitel M fallen MA und MA′, MB und MB′ zusammen. Punkt A gelangt bei dieser Bewegung nach A′ (und umgekehrt), Punkt B nach B′ (und umgekehrt). M halbiert die Strecken $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$. Man sagt, A und A′ liegen symmetrisch[1] zu M.

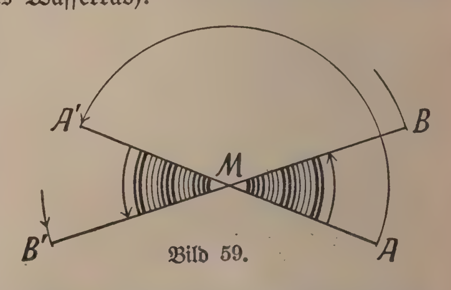


Bild 59.

Erkl. 1: **Zwei Punkte liegen symmetrisch in bezug auf den Mittelpunkt ihrer Verbindungsstrecke.**

Punkt- oder Zentralsymmetrie

Erkl. 2: **Eine ebene Figur heißt symmetrisch in bezug auf einen Punkt oder zentralsymmetrisch, wenn sich bei einer Drehung um 180° die Figur selbst deckt. Der Punkt heißt Symmetriezentrum** (Mittelpunkt).

2. Die Verbindungsstrecken entsprechender Punkte heißen Durchmesser. Sie werden im Mittelpunkt halbiert.

Bestätige dies durch Zeichnung einiger Mittelpunktsgeraden **a)** an Bild 58 und Bild 59, **b)** an Bild 60, das eine germanische Bronzefibel zeigt. Zeichne einige zentralsymmetrisch gelegene Punkte ein.

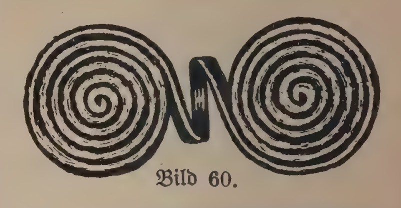


Bild 60.

Bauernkunst

3. Bild 61 zeigt zwei Gruppen von Ornamenten deutscher Bauernkunst. Die eine geht auf den vier- und sechsgeteilten Kreis zurück, die andere auf den Lebensbaum. Beide Urformen lassen sich als Glücks- und Segenszeichen zum Teil bis in vorgeschichtliche Zeiten zurückverfolgen. Trotz der mannigfachen Abwandlung der ursprünglichen Sinnbilder ist die Erinnerung an den Bildsinn im Volke wach geblieben. Bei welchen von ihnen liegt Zentralsymmetrie vor?

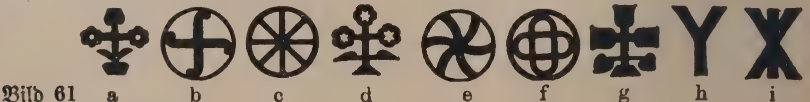


Bild 61 a b c d e f g h i

[1] griech.: = gleichmäßig.

4. Bild 62a···c zeigt, wie man zu einer beliebigen (geradlinigen) Figur ihre zentralsymmetrische zeichnet, wenn das Symmetriezentrum M gegeben ist. Erkläre die Konstruktion.

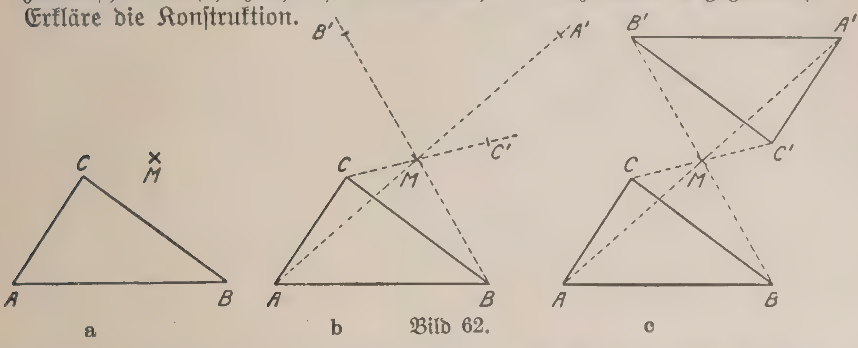


Bild 62.

5. Zeichne zu einem beliebigen Viereck das zentralsymmetrische, wenn das Symmetriezentrum a) außerhalb, b) innerhalb des Vierecks angenommen wird.
6. Begründe mit Hilfe der Symmetrie, daß die Halbierungslinien zweier Scheitelwinkel in eine Gerade fallen.

16. Abschnitt: Spiegelung an einer Ebene, Spiegelung an einer Geraden (Axialsymmetrie).

Spiegelung an einer Ebene

1. Bild 63 zeigt das Völkerschlachtdenkmal und sein Spiegelbild im Wasser.

Vergleicht man Größe, Gestalt und Lage von Gegenstand und Bild, so findet man, daß bei beiden Größe und Gestalt übereinstimmen, aber oben und unten vertauscht sind.

Ein Gegenstand oder eine Person erscheint bei einer Spiegelung an einem lotrechten Spiegel ebenfalls in wahrer Größe und Gestalt, aber links und rechts sind vertauscht.

Man sagt:
Gegenstand und Bild sind spiegelgleich, sie liegen symmetrisch zu der Spiegelfläche.


Bild 63. Völkerschlachtdenkmal Leipzig.

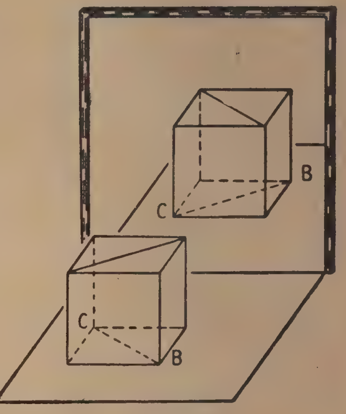


Bild 64.

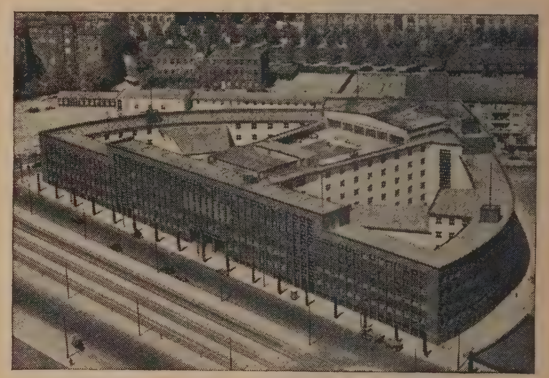
2. Bild 64 stellt einen Quader und sein Spiegelbild dar. Vergleiche die Lage der eingezeichneten Ecklinien auf Grund- und Deckfläche in Gegenstand und Bild.

Erkl. 1: **Ein Gegenstand und sein Spiegelbild liegen symmetrisch in bezug auf die Spiegelebene als Symmetrieebene.**

Erkl. 2: **Ein Körper heißt symmetrisch, wenn er durch eine Ebene in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften zerlegt wird. Die Ebene heißt Symmetrieebene.**

3. Gib Beispiele aus Natur, Kunst und Technik an.

4. Beschreibe die Lage der Symmetrieebenen in Bild 65 und 66.


Bild 65. Haus des Rundfunks in Berlin.

5. Gib Lage und Anzahl der Symmetrieebenen
a) eines Würfels,
b) einer quadratischen Säule,
c) eines Rechtflachs,
d) einer quadratischen Pyramide,
e) einer regelmäßigen sechsseitigen Säule an.
— Welche Symmetrieebenen des Würfels sind bei der quadratischen Säule, welche beim Rechtflach nicht mehr vorhanden?

6. a) Gib Symmetrieebenen anderer einfacher Körper an (z. B. Walze, Kugel, Kegel). Bei der Kugel gehen alle Symmetrieebenen durch den Mittelpunkt. Erkläre den Namen Äquator (Gleicher).


Bild 66. Schloß Sanssouci in Potsdam.

b) Desgl. an den Bildern der Bauwerke in Band I.

7. **a)** Bild 64 zeigt die Spiegelung eines Körpers, Bild 67 zeigt dagegen eine ebene Figur, die waagerecht vor einem lotrecht stehenden Spiegel liegt. Vergleiche Figur und Bild nach Größe, Lage und Umlaufssinn. **Axiale Symmetrie**

In diesem Falle spricht man von einer Spiegelung an einer Geraden, nämlich der Schnittgeraden von Zeichenebene und Spiegel.

Erkl.: **Eine ebene Figur heißt symmetrisch in bezug auf eine Gerade oder axialsymmetrisch, wenn sich beim Umklappen um diese die beiden Teile decken. Die Gerade heißt Symmetrieachse.**

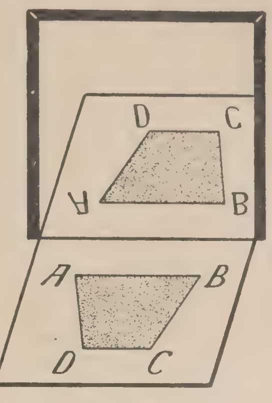


Bild 67.

b) Gib in Bild 67 die Symmetrieachse an.

c) Punkte, Strecken, gerade und krumme Linien, die beim Umklappen aufeinanderfallen, heißen symmetrisch gelegen.

d) Eine axialsymmetrische Figur wird durch die Symmetrieachse in deckungsgleiche Hälften zerlegt.

8. Mache auf die eine Seite eines geknifften Bogens einen Tintenklecks, klappe die andere Seite um den Kniff und falte wieder auseinander (Bild 68). (Klexographie.) **Umklappung**

a) Vergleiche die beiden Seiten des Bildes nach Größe und Form.

b) Stelle ein Spiegelchen mit seiner Kante auf den Kniff und betrachte das Spiegelbild der einen Hälfte der Figur. Es ist gleich der anderen verdeckten Hälfte der Figur.


Bild 68.

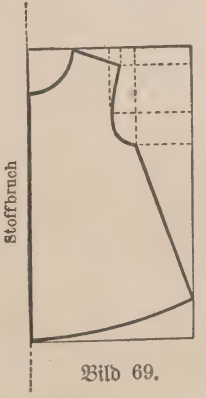


Bild 69.

c) Umfahre vor dem Spiegel die eine Hälfte mit der Bleistiftspitze und verfolge die Bewegung im Spiegel. — Umlaufssinn?

d) Auch bei Schnittmustern findet die Symmetrie praktische Anwendung, wenn am Rande des Schnitteiles angegeben ist, daß diese Kante am Stoffbruch anzulegen ist. Erkläre dies. Wo ist hier die Symmetrieachse?

9. a) In Natur, Technik und Kunst spielen ebene symmetrische Figuren eine große Rolle. Gib die Symmetrieachse in Bild 70 und 71 an.



Bild 70. Bild 71.

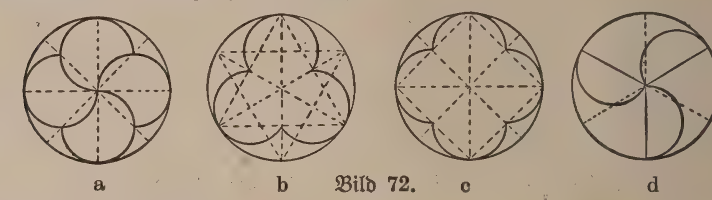
Wieviel Symmetrieachsen hat ein Quadrat, ein Rechteck, ein Kreis, ein gleichseitiges, ein gleichschenkliges Dreieck?

b) Welche Sinnbilder (Bild 61a···i) weisen axiale Symmetrie auf?

c) Beachte die Art der Symmetrie bei Abzeichen verschiedener Gliederungen (z. B. Raute der Hitlerjugend, Zeichen der Deutschen Arbeitsfront usw.).

10. Besorge dir einige Bilder von Fabrikmarken bekannter deutscher Autofirmen oder andere Firmenzeichen und stelle fest, ob axiale oder zentrale Symmetrie vorliegt (oder beide).

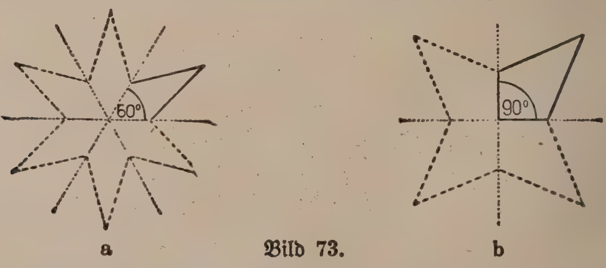
Zirkelspiele



a b Bild 72. c d

Zeichne Bild 72a···d vergrößert nach; welche Art von Symmetrie liegt bei a···c vor (vgl. Bd. I)?

11. Stelle zwei Spiegelchen a) auf zwei anstoßende Seiten eines Quadrats, b) auf die Lotseiten eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks und betrachte die entstehenden Figuren. Stelle mit einfachsten geometrischen Figuren entsprechende Spiegelversuche an. Beachte den Einfluß des W i n k e l s zwischen den beiden Spiegelebenen auf die entstehenden Figuren. Deute Bild 73a und b als solche Spiegelbilder.



a Bild 73. b

Kaleidoskop

c) Das bekannte Spielzeug Kaleidoskop (Schönbildseher) beruht hierauf.

17. Abschnitt: Eigenschaften und Anwendungen symmetrischer Punkte und Geraden.

1. Im Bild 74 liegen die Punkte A und A′ symmetrisch in bezug auf PQ = s. **a)** Wohin fällt A′ beim Umklappen um die Symmetrieachse s?
b) Vergleiche $\overline{PA}$ und $\overline{PA'}$.
c) Zeige, daß ∢ APQ und ∢ A′PQ gleich sind und jeder 1 ∟ ist. Es ergibt sich:

Lehrs. 1: Die Symmetrieachse zweier Punkte steht auf ihrer Verbindungsstrecke senkrecht und halbiert sie.

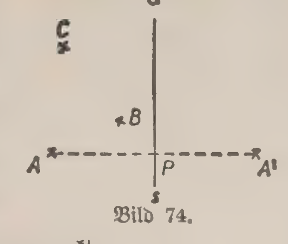


Bild 74.

2. Bestimme zu B und C die symmetrischen Gegenpunkte.

3. Ziehe $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ (Bild 74) und ebenso $\overline{A'B'}$, $\overline{B'C'}$ und $\overline{C'A'}$ und stelle in beiden Dreiecken den Umlaufsinn fest.

Axialsymmetrische Figuren haben entgegengesetzten Umlaufsinn. **Umlaufsinn**

4. Bild 75 zeigt die beiden zur Geraden s symmetrisch liegenden Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$. Zeige, daß beim Umklappen um s die beiden Teilwinkel bei P sich decken. Anleitung: Jeder Punkt von AB fällt auf den entsprechenden von A′B′. Welcher allein bleibt unverändert?

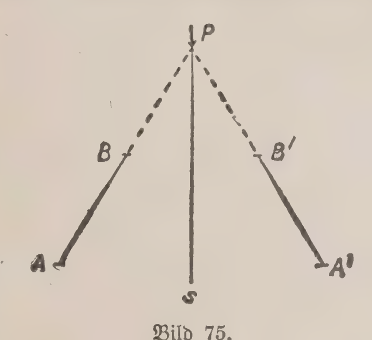


Bild 75.

Lehrs. 2: Die Symmetrieachse zweier Geraden geht durch ihren Schnittpunkt und halbiert ihren Winkel.

Diese Sätze 1 und 2 kann man auch so aussprechen:

Lehrs. 1a: Die Mittelsenkrechte einer Strecke ist ihre Symmetrieachse.

Lehrs. 2a: Die Halbierungslinie eines Winkels ist seine Symmetrieachse.

Lehrs. 2 besagt auch: Symmetrisch liegende Geraden schneiden sich auf der Achse.

5. Verbinde beliebige Punkte Q, R, S der Symmetrieachse mit den beiden symmetrisch liegenden

Bild 76

Punkten A und A′ (Bild 76). Mit welchen Geraden fallen AQ, AR und AS beim Umklappen um s zusammen? Es folgt:

Lehrs. 3: Jeder Punkt der Achse ist von zwei symmetrisch liegenden Punkten gleich weit entfernt.

Zusammenfassung

6. Zusammenfassend läßt sich sagen:

Für zwei Punkte ist

ihre Symmetrieachse die Mittelsenkrechte	**ihr Symmetriezentrum der Halbierungspunkt**

ihrer Verbindungsstrecke.

Zwei Punkte liegen also stets axial- und zentralsymmetrisch.

Für zwei Geraden ist

ihre Symmetrieachse die Halbierende	**ihr Symmetriezentrum der Scheitel**

ihres Schnittwinkels.

Zwei sich schneidende Geraden liegen also stets axial- und zentralsymmetrisch.

Gleichschenklige Dreiecke

7. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC; verbinde die Mitte D seiner Grundlinie $\overline{AB}$ mit der Spitze C. Die Endpunkte A und B haben von D und von C gleiche Entfernung. Daher ist CD die Symmetrieachse; es folgt nach Lehrs. 1 ⋯ 3:

Lehrs. 4: Im gleichschenkligen Dreieck fallen die Seitenhalbierende, die Höhe, die Mittelsenkrechte der Grundlinie und die Halbierungslinie des Winkels an der Spitze zusammen[1].

8. a) Aus der Eigenschaft, daß die beiden Teildreiecke des gleichschenkligen Dreiecks beim Umklappen sich decken, folgt:

Lehrs. 5: Im gleichschenkligen Dreieck sind die Grundlinienwinkel gleich.

Dieser Satz wird häufig in der Form benutzt:

Lehrs. 5a: Gleichen Seiten eines Dreiecks liegen gleiche Winkel gegenüber.

b) Wie heißt die Umkehrung des Lehrsatzes 5a?

c) Aus Lehrsatz 5a ergibt sich die Folg.:

Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich.

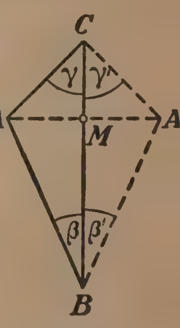


Bild 77.

Drachensatz

9. Zeichne das zum △ ABC in bezug auf BC als Achse symmetrische △ A′BC. Verbinde A mit A′; AA′ schneidet BC in M (Bild 77). Es ist: $\overline{AM} = \overline{A'M}$ und $BC \perp AA'$ (Lehrs. 1), ferner $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$ und $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma'$ (Lehrs. 2). Da die Dreiecke AA′C und AA′B gleichschenklig sind, folgt:

Lehrs. 6: Die Verbindungslinie der Spitzen gleichschenkliger Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie halbiert diese, steht auf ihr senkrecht und halbiert die Winkel an den Spitzen (Drachensatz).

[1] Vgl. dazu die Bezeichnungen S. VII.

18. Abschnitt: Weitere Anwendungen der Symmetrie.

Vorbemerkung: Die folgenden Aufgaben sind z. T. schon mit Hilfe von Lineal, Maßstab, Winkelmesser, Winkeldreieck, Zirkel und Gitterpapier gelöst worden (Bd. I). Sie werden im folgenden nur unter Benutzung von Lineal und Zirkel auf Grund der Symmetriesätze 1 · · · 4 behandelt.

1. Zu Punkt (A) den symmetrischen (A′) für eine Gerade (s) als Achse zu zeichnen.

Anl.: Die Lösung besteht aus drei Schritten: 1. ○ um A, 2. ○ um B, 3. ○ um C (immer der gleiche Halbmesser) (Bild 78).

a) Beschreibe dies ausführlich. **b)** Nenne die benutzten Lehrsätze.

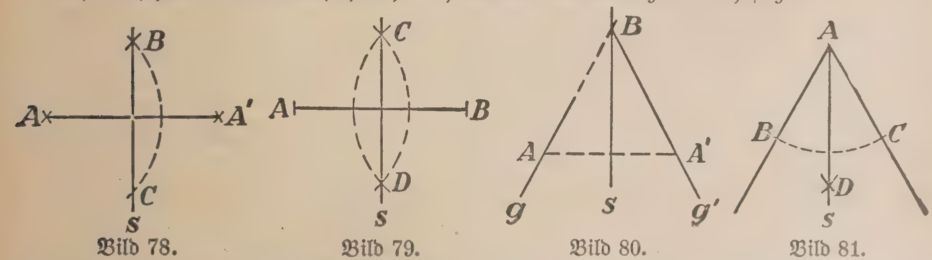


Bild 78. Bild 79. Bild 80. Bild 81.

2. a) Zu zwei gegebenen Punkten (A und B) die Symmetrieachse (s) zu zeichnen.

Anl.: Die Lösung besteht aus drei Schritten: 1. ○ um A, 2. ○ um B (mit gleichem Halbmesser), 3. Verbindungslinie CD (Bild 79).
Beschreibe dies ausführlich.

b) Das ist dieselbe Aufgabe wie:
Die Mittelsenkrechte einer Strecke zu zeichnen.

c) Da die Symmetrieachse der beiden Punkte ihre Verbindungsstrecke halbiert, ist mit a) zugleich die Aufgabe gelöst:

Eine gegebene Strecke zu halbieren. **1. Grundaufgabe**

d) Die Aufgabe kann auch so gestellt werden:
Zeichne zu zwei Punkten A und B das Symmetriezentrum.

3. Zu einer gegebenen Geraden (g) die symmetrischgelegene (g′) für eine Gerade (s) als Achse zu zeichnen (Bild 80).

Anl.: 1. Schnittpunkt B. 2. Zu dem beliebigen Punkte A auf g den symmetrischen Punkt A′ nach Nr. 1 zeichnen, 3. die Verbindungslinie A′B ziehen.
Ausführliche Beschreibung.

4. a) Zu zwei gegebenen Geraden (g und g′) die Symmetrieachse (s) zu zeichnen (Bild 81).

Anl.: 1. ○ um Schnittpunkt A, 2. und 3. ○ um B und ○ um C (mit gleichem Halbmesser), 4. Verbindungslinie AD.
Ausführliche Beschreibung.

b) Da die Symmetrieachse der Schenkel den Winkel halbiert, ist mit a) auch zugleich die Aufgabe gelöst:

2. Grundaufgabe **Einen gegebenen Winkel zu halbieren.**

3. Grundaufgabe **5. In einem Punkte (P) auf einer Geraden (g) die Senkrechte zu errichten.**

Anl.: Man braucht nur zwei Punkte auf g so zu bestimmen, daß ihre Symmetrieachse durch P geht (Bild 82). Lösung: 1. Schritt: ○ um P mit beliebigem Radius (A und A′), dann nach Nr. 2.

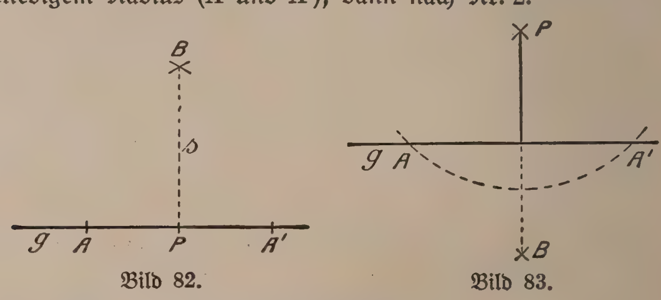


Bild 82. Bild 83.

4. Grundaufgabe **6. Von einem Punkte (P) auf eine Gerade (g) das Lot zu fällen.**

Anl.: Man braucht auf g nur zwei Punkte so zu bestimmen, daß ihre Symmetrieachse durch P geht (Bild 83).

Lösung: 1. Schritt: ○ um P mit beliebigem Radius (A und A′), dann nach Nr. 2.

Zeichne in einem Dreieck, das
a) nur spitze Winkel
b) einen rechten Winkel
c) einen stumpfen Winkel enthält

7. die Mittelsenkrechten,
8. die Winkelhalbierenden (w_α, w_β, w_γ),
9. die Höhen (h_a, h_b, h_c).
10. die Seitenhalbierenden (s_a, s_b, s_c). — Vergleiche im rechtwinkligen Dreieck die Spannseite mit ihrer Seitenhalbierenden,
11. Bild 84 stellt, von oben gesehen, die eine Hälfte eines Flugzeugs vereinfacht dar. Zeichne die andere Hälfte.
12. Bild 69 S. 53 zeigt ein halbes Schnittmuster. Ergänze es.
13. Beim Sticken macht es zuweilen Schwierigkeiten, bei einer Ecke das Muster richtig fortzusetzen. Man kann sich mit einem Spiegel helfen. Erkläre danach Bild 85.
14. Zeichne (nur mit Zirkel und Lineal) Winkel von a) 90°, b) 45°, c) $22\frac{1}{2}°$, d) $67\frac{1}{2}°$, e) 225°.

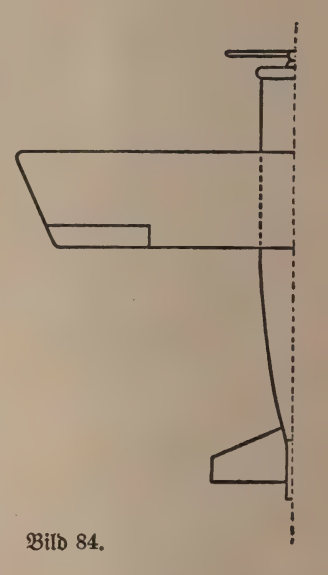


Bild 84.



Bild 85.

15. a) Gegeben sind eine Gerade g und ein beliebiger Punkt P. Gesucht zwei Punkte auf g, die von P die Entfernung a haben. **b)** Welche besondere Lage kann P haben? **c)** Wieviel Lösungen erhält man im allgemeinen? **d)** Wann ist die Aufgabe unlösbar? **e)** Wann hat sie nur eine Lösung?

16. Schreibe einige große Buchstaben der Normalschrift in Spiegelschrift. **Spiegelschrift**

17. Verbinde die Endpunkte einer unregelmäßigen gebrochenen Linie durch eine Gerade. Zeichne in bezug auf diese die symmetrische gebrochene Linie.

18. Zeichne die Symmetrieachse **a)** zweier verschiedener **b)** zweier gleicher Kreise. Wieviele gibt es bei **b)**?

19. Zeichne die Symmtrieachse eines Kreises und einer Geraden.

VI. Parallelen.

19. Abschnitt: Parallele Geraden. Winkel an Parallelen.

1. Wo treten Parallelen auf an der Leiter, am Fensterrahmen, Schrank, Tisch, im Turnsaal, bei Bauten (Bild 65 u. 66), an der Schreibmaschine, Schublehre?

2. Gib parallele Verschiebungen an der Schreibmaschine, an der Schublehre, am Fernrohr, beim photographischen Stativ, bei der Kolbenbewegung, beim Schlitten, beim Transportband, beim Wagen, bei der Drehbank (Bewegung des Werkstücks) an. **Parallelverschiebung**

3. Verschiebe die Strecke $\overline{AB}$ **a)** auf der Geraden g um die Strecke c und bestimme die neuen Endpunkte A'B' (zwei Möglichkeiten!), **b)** parallel zu sich in einer anderen Richtung. **c)** Die Parallelverschiebung eines Zeichendreiecks zeigt Bild 139, Bd. I.

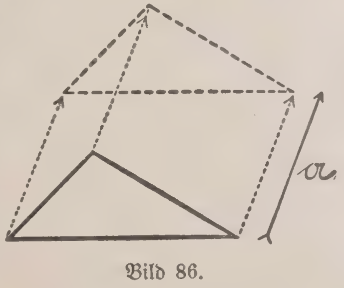


Bild 86.

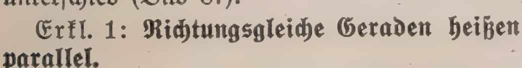
4. Zeichne (Bild 86) zu einem gegebenen beliebigen Dreieck (Viereck, Fünfeck) die durch Parallelverschiebung entstehende Figur, wenn die Größe a der Verschiebung und ihre Richtung gegeben sind.

5. Der Richtungsunterschied zweier Geraden legt einen Winkel fest (Bd. I). Die beiden Schienen eines Eisenbahngleises haben keinen Richtungsunterschied (Bild 87).

g'

g

Bild 87.


Erkl. 1: **Richtungsgleiche Geraden heißen parallel.**

Da richtungsgleiche Geraden sich nicht schneiden, ergibt sich gleichwertig:

Erkl. 2: **Geraden einer Ebene, die einander nicht schneiden, heißen parallel.**

6. Zeichne eine Gerade g und durch einen Punkt P beliebige Geraden. Wieviele unter diesen können die gleiche Richtung wie g haben? (Bild 88). — Es ergibt sich:

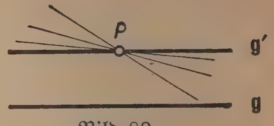


Bild 88.

Grundsatz: Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt nur eine Parallele.

Euklids Parallelengrundsatz

Bemerkung: Dieser Grundsatz heißt das Euklidische Parallelenaxiom (Axiom = Grundsatz). Man hat über 2000 Jahre lang versucht, es zu beweisen. Das ist nicht gelungen, und wir wissen heute durch C. F. Gauß (Anh. I), daß ein „Beweis" unmöglich ist. Dieser Grundsatz ist kennzeichnend für die Geometrie, die wir hier behandeln; es ist die sog. „Euklidische Geometrie".

Abstand bei Parallelen

7. Bild 89 veranschaulicht, daß zwei parallele Geraden g und g' den gleichen (senkrechten) Abstand haben (Bd. I). Würde dieser Abstand nach einer Seite hin kleiner werden, so folgern wir wieder aus der Anschauung, daß wir schließlich zu einem Schnittpunkt von g und g' gelangen müssen; dieser ist aber wegen der Parallelität der beiden Geraden nicht vorhanden.

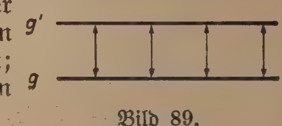


Bild 89.

Somit ergibt sich der

Lehrs. 1: Parallele Geraden haben überall den gleichen Abstand.

8. a) Wo liegen in der Ebene alle Punkte, die von einer gegebenen Geraden g den gleichen (senkrechten) Abstand h haben?
b) Was für eine Gestalt hat der Windfang bei einer Drehtür?
c) Welchen Abstand haben die Punkte jeder Mantellinie einer Walze von ihrer Achse, wenn der Halbmesser des Grundkreises r ist? (Bd. I).
d) Wo liegen alle Punkte im Raume, die von einer Geraden g den gleichen Abstand r haben? — Wie kann man sich daher nach Bild 90 die Walze entstanden denken?

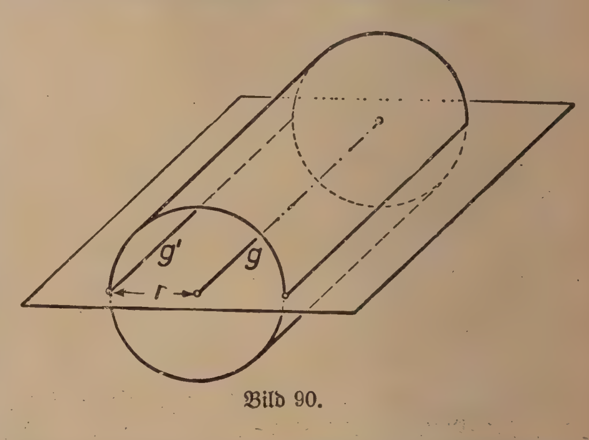


Bild 90.

Auch bei zwei parallelen Geraden tritt Axial- und Zentralsymmetrie auf.

Axialsymmetrie bei Parallelen

9. Verbinde zwei beliebige Punkte auf gegenüberliegenden Rändern eines Löschblattes und falte es so zusammen, daß diese Ränder aufeinanderfallen. Vergleiche die durch den Kniff entstehenden Teilstrecken. Wie liegt der Kniff zu diesen Rändern?

10. Bestimme Punkte, die von beiden parallelen Geraden g und g′ (Bild 91) gleichen Abstand haben. Verbinde sie miteinander. **a)** Auf was für einer Linie liegen sie? **b)** Bringe g und g′ durch Umklappen (Falten) des Zeichenblattes zur Deckung und bestimme so die Symmetrieachse. Es folgt:

Bild 91.

Lehrs. 2: Zwei Parallelen haben als Symmetrieachse ihre Mittelparallele, oder anders ausgedrückt:

Lehrs. 2a: Zwischen zwei Parallelen halbiert die Mittelparallele jede Querstrecke.

11. Daraus folgt, daß $\overline{MA} = \overline{MA'}$ und $\overline{MB} = \overline{MB'}$ ist. Also sind $\overline{A'}$ und $\overline{B'}$ zentralsymmetrisch zu A und B in bezug auf M, d. h. aber, da A und B beliebig angenommen sind, daß g und g′ zentralsymmetrisch in bezug sowohl auf M wie auf jeden Punkt der Mittelparallelen sind. — Die Zusammenfassung von S. 56 ist demnach zu ergänzen: Zentralsymmetrie bei Parallelen

Für zwei parallele Geraden ist Zusammenfassung

Symmetrieachse die Mittelparallele	**Symmetriezentrum jeder Punkt der Mittelparallelen.**

12. Löst man Bild 92 in die drei Teilbilder 93a ⋯ c auf, so erkennt man:
a) Die gleichliegenden Winkel, z. B. β und β', können durch Parallelverschiebung,
b) die inneren Winkel β' und δ oder die äußeren γ' und α können durch Drehung um 180^0 zur Deckung gebracht werden. Daraus folgt:

Lehrs. 3a: An Parallelen sind alle spitzen Winkel und alle stumpfen Winkel untereinander gleich.

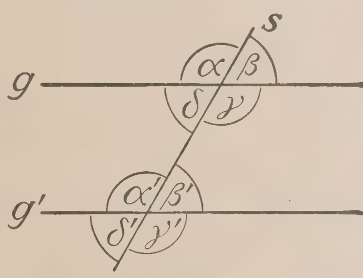


Bild 92.

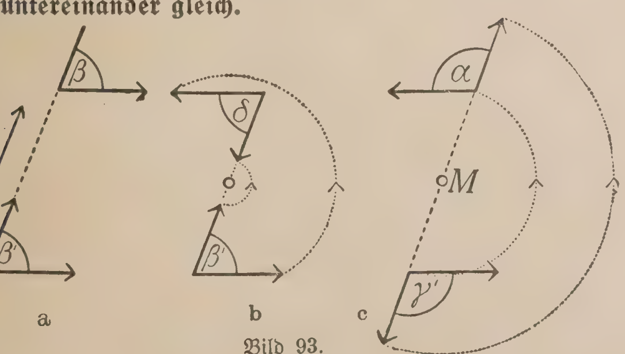


Bild 93.

13. Für je zwei Winkel an den verschiedenen Schnittpunkten (Bild 92) hat man folgende Bezeichnungen:

Stufenwinkel

Erkl. 3: **Stufenwinkel sind ein innerer und ein äußerer Winkel an derselben Seite der schneidenden Geraden, z. B.** α **und** α'.

Wechselwinkel

Erkl. 4: **Wechselwinkel sind zwei innere oder zwei äußere Winkel an verschiedenen Seiten der schneidenden Geraden, z. B.** β **und** δ', α' **und** γ.

14. Stelle nach Bild 92 zusammen alle Paare von **a)** Stufenwinkeln, **b)** Wechselwinkeln, **c)** Nebenwinkeln, **d)** Scheitelwinkeln.

15. Was für Winkel sind (Bild 92) **a)** α und γ', **b)** δ' und δ, **c)** α' und γ', **d)** δ und γ, **e)** β und β', **f)** β' und δ?

16. Bestimme Neben-, Scheitel-, Stufen- und Wechselwinkel zu **a)** α, **b)** β', **c)** γ', **d)** δ.

17. Mit diesen neuen Bezeichnungen läßt sich Lehrs. 3a in folgende zwei auflösen:

Lehrs. 3b: Stufenwinkel an Parallelen sind gleich.

Lehrs. 3c: Wechselwinkel an Parallelen sind gleich.

18. Umgekehrt ergibt sich aus der Gleichheit gleichartiger Winkel an solcher Figur, daß die beiden Geraden (g und g') sich nicht schneiden können, da ein Richtungsunterschied (im Bild 92 gegen s) nicht vorhanden ist. Es folgen entsprechend 3a bis 3c:

Umkehrungssatz 4a: Sind zwei gleichartige Winkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Umkehrungssatz 4b: Sind zwei Stufenwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Umkehrungssatz 4c: Sind zwei Wechselwinkel gleich, so sind die geschnittenen Geraden parallel.

Beachte: Die Parallelität der Geraden einerseits und die Gleichheit gleichartiger Winkel (Stufenwinkel und Wechselwinkel) andererseits gehören also untrennbar zusammen.

19. Mit Hilfe dieser Eigenschaften von Parallelen löst man die folgenden Aufgaben:

5. Grundaufgabe

a) Durch einen Punkt (P) **zu einer Geraden** (g) **die Parallele zu ziehen.**

1. Lösung: Mit Zeichendreieck und Lineal (Bd. I); begründe sie!

2. Lösung: (Bild 91) Verbinde P mit einem beliebigen Punkt A auf g, halbiere $\overline{PA}$ in M, verbinde einen anderen beliebigen Punkt B auf g mit M. Der Endpunkt der Verdoppelung von $\overline{BM}$ ist B'. Die Verbindungsgerade B'P ist die gesuchte Parallele.

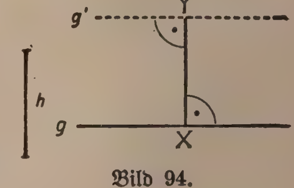


Bild 94.

6. Grundaufgabe

b) Zu einer Geraden (g) **im Abstande** (h) **eine Parallele zu ziehen.**

Anl.: Errichte im beliebigen Punkte X auf g die Senkrechte $\overline{XY} = h$ und in Y auf XY die Senkrechte g' (Bild 94).

20. Ein Dampfer (D) peilt[1]) einen Leuchtturm (L) in S 38°O (Bild 95). In welcher Richtung erscheint das Schiff vom Leuchtturm aus? Wie groß ist ∢ DLN?

21. Bei der Anfertigung einer technischen Zeichnung fällt der Schnittpunkt zweier Geraden nicht mehr auf das Zeichenbrett. Wie kann der Zeichner den Schnittwinkel trotzdem finden?

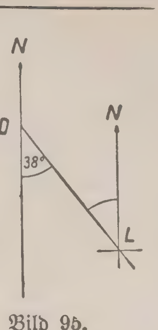


Bild 95.

22. a) Prüfe nach, ob die Geraden im Bild 96 parallel sind. b) Schätze, umwieviel Millimeter sich s und s′ unterscheiden (Bild 97). Miß nach! c) Wieviel Würfel (Bild 98) siehst du? Drehe das Buch um 180°! Wieviel Würfel siehst du jetzt?

Optische Täuschungen


Bild 96.

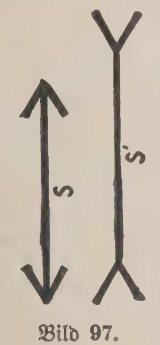
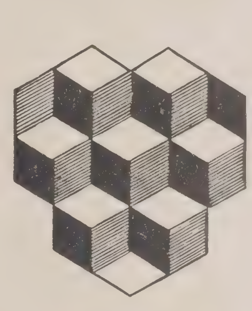


Bild 97.


Bild 98.

23. Parallel zum unteren und zum linken Rand des Zeichenblattes sind im Abstand von $\frac{1}{2}$ cm zwei Geraden gezogen (x- und y-Achse). Wo liegen auf dem Zeichenblatt alle Punkte, die a) 1 cm, b) 2 cm, c) 3 cm, d) 10 cm von der x-Achse und e) 1 cm, f) 2 cm, g) 3 cm, h) 10 cm von der y-Achse entfernt sind? i) Warum entsteht ein quadratisches Netz (Raster)? (Bd. I.) **Quadratischer Raster**

24. Bestimme in diesem quadratischen Raster den Punkt mit den Rechts- und Hochwerten a) $x = 1$ cm, $y = 2$ cm, b) $x = 10$ cm, $y = 3$ cm, c) $x = 2$ cm, $y = 10$ cm. d) Welchen Rechtswert haben alle Punkte, die auf der Parallelen zur y-Achse im Abstande 6 cm, e) welchen Hochwert haben alle Punkte, die im Abstande 7 cm von der x-Achse liegen? **Rechts-, Hochwert**

25. Trage im Schnittpunkt der x- und y-Achse einen Winkel von a) $\alpha = 45°$, b) $\beta = 30°$, c) $\gamma = 60°$ an die x-Achse an. Bestimme die Hochwerte der Schnittpunkte der drei freien Schenkel mit den Parallelen, die zu den Rechtswerten 2 cm (4 cm; 8 cm) gehören (auf mm genau). **Anstieg**

26. Bestimme einen Punkt a) der von den Geraden g_1 und g_2 je 3 cm entfernt ist, b) der von g den Abstand $d = 2$ cm und vom Punkte M die Entfernung $r = 4$ cm hat, c) der von P 4 cm entfernt ist und von den

[1]) Peilen heißt, die Richtung vom Schiff zum Leuchtturm bestimmen.

beiden Geraden g_1 und g_2 gleichen Abstand hat, d) der von zwei Parallelen g_1 und g_2 und dem Punkte P gleichen Abstand hat.

Übungssätze

27. Beweise die folgenden Sätze:
a) Winkel mit gleichgerichteten parallelen Schenkeln sind gleich (Bild 99).
b) Winkel mit entgegengesetzt gerichteten parallelen Schenkeln sind gleich (Bild 100).

Bild 99.

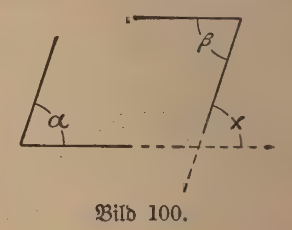


Bild 100.

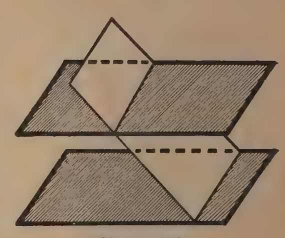
c) Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so haben das abgeschnittene und das ursprüngliche Dreieck gleiche Winkel.

20. Abschnitt: Parallele Ebenen.

1. Eine Tür wird geöffnet, ein Heftdeckel aufgeklappt. a) Welcher Teil behält seine Lage im Raum bei? b) Wieviel Punkte der gedrehten Ebene muß man außerdem festhalten, damit die Bewegung unmöglich wird? c) Wodurch ist danach eine Ebene bestimmt? d) Durch wieviel Punkte ist eine Gerade bestimmt, durch wieviel Punkte demnach eine Ebene? (Dreibeiniger Tisch, Stativ.)
2. Versuche, z. B. mit dem Zeichendreieck, durch a) zwei sich schneidende, b) zwei parallele, c) zwei windschiefe Geraden eine Ebene zu legen. Wann ist es möglich?
3. Nenne Körper, die a) nur von ebenen Flächen, b) auch von krummen Flächen, c) nur von einer krummen Fläche begrenzt werden (Bd. I).
4. Verbinde zwei beliebige Punkte
a) einer Begrenzungsfläche des Quaders,
b) des Mantels der Walze,
c) der Kugelfläche durch eine Gerade. —
Man hat festgesetzt:
Erkl. 1: **Ebene heißt diejenige Fläche, der die Verbindungsgerade irgend zweier ihrer Punkte vollständig angehört.**
Die anderen Flächen nennen wir krumme Flächen (Bd. I).


Bild 101.

5. Zeige an Bild 101 parallele Ebenen und ihren Abstand.
6. a) Was für einen Winkel bilden zwei sich schneidende Ebenen am Quader? b) Von zwei gegenüberliegenden Begrenzungsflächen kann man keinen Schnittwinkel mehr angeben; sie sind gleichgerichtet (haben gleiche „Stellung") (Bild 102).
Entsprechend Erkl. 1 (S. 59) setzen wir fest:
Erkl. 2: **Stellungsgleiche Ebenen heißen parallel.**
Damit gleichwertig ergibt sich entsprechend zu Erkl. 2: (S. 59)
Erkl. 3: **Ebenen, die einander nicht schneiden, heißen parallel.**


Bild 102.

7. Nimm auf der oberen Grundfläche eines Quaders einen Punkt an und denke dir durch ihn alle möglichen Ebenen. Wieviel schneiden die untere Grundfläche nicht? Entsprechend zu Nr. 6 ergibt sich der

Grundsatz: Durch einen Punkt gibt es zu einer Ebene nur eine Parallelebene.

8. Da je zwei gegenüberliegende Ebenen am Quader (oder Würfel) überall die gleiche senkrechte Entfernung, den gleichen Abstand, haben (Kantenlänge!), schließen wir allgemein:

Lehrs. 1: Parallele Ebenen haben überall den gleichen Abstand.

9. Vom Quader her wissen wir schon, daß die drei Symmetrieebenen zu je zwei begrenzenden Ebenen parallel sind und von ihnen gleichen Abstand haben. Allgemein ergibt dies

Lehrs. 2a: Zwei Parallelebenen haben als Symmetrieebene ihre Mittelebene, anders ausgedrückt:

Lehrs. 2b: Zwischen zwei parallelen Ebenen halbiert die Mittelebene jede Querstrecke.

VII. Das Dreieck.

21. Abschnitt: Seiten und Winkel am Dreieck.

1. a) Zeichne beliebige Dreiecke und miß die Seiten. Bilde für jedes die Summe zweier Seiten und vergleiche diese mit der dritten. Was findest du? — Da der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ihre Verbindungsstrecke ist, muß jede einzelne Seite kleiner sein als die beiden anderen zusammen. Seiten

Lehrs. 1: In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte. $a + b > c$

b) Bilde entsprechend die Differenz je zweier Seiten und vergleiche sie mit der Länge der dritten Seite. Allgemein ist nach Lehrs. 1: $b + c > a$. Subtrahiert man auf beiden Seiten b, so ergibt sich $c > a - b$, oder auch $a - b < c$; also gilt die

Folg.: **In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.** $a - b < c$

2. a) Wieviel gleiche Seiten kann ein Dreieck haben? (Bd. I). Einteilung nach Seiten

b) Wie kann man daher die Dreiecke nach den Seiten einteilen?

3. a) Zeichne ein beliebiges Dreieck, miß seine Winkel und bestimme ihre Summe. Führe dies auch noch für einige andere Dreiecke durch. Was ergibt sich? Welcher Mittelwert ergibt sich für die Winkelsumme?

b) Schon folgender Versuch führt auf die Antwort. Bild 103 zeigt, daß man die abgerissenen Ecken des Dreiecks ABC mit den Winkeln α und β durch Drehung um M_1 und M_2 in die Lage bei C bringen kann. Aus den Eigenschaften zentralsymmetrischer Figuren folgt der

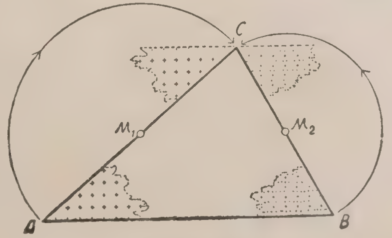


Bild 103.

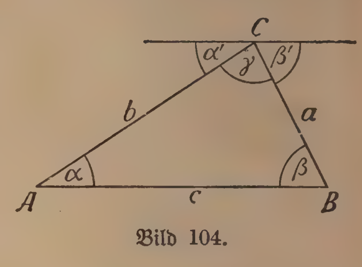


Bild 104.

Lehrs. 2: Die Summe der Winkel im Dreieck beträgt stets 180°.

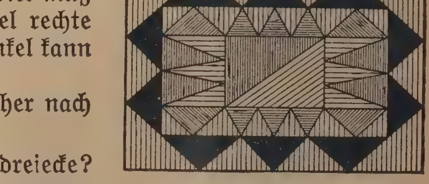
Diesen Satz beweisen wir unter Benutzung derselben Überlegungen. Wir ziehen als Hilfslinie durch C die Parallele zur Gegenseite $\overline{AB}$ (Bild 104). Dann ist

$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ } (als Wechselwinkel
$\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$ } an Parallelen)
$\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma$

$\alpha + \beta + \gamma$ $= 180^0$ $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma = 180^0$ (als gestreckter Winkel).

4. Folgerungen. a) Wieviel spitze Winkel kann ein Dreieck enthalten? Wieviel muß es mindestens haben? b) Wieviel rechte Winkel und c) wieviel stumpfe Winkel kann es höchstens enthalten?

Einteilung nach Winkeln d) Wie kann man die Dreiecke daher nach den Winkeln einteilen?


Bild 105.

5. Was für Dreiecke sind deine Zeichendreiecke?

6. Was für Dreiecke kommen in dem Gewebemuster (Bild 105) vor?

7. Was für Dreiecke kommen in dem Fachwerk (Bild 161) vor?

8. Wie groß ist $\sphericalangle \gamma$, wenn a) $\alpha = 50^0$, $\beta = 70^0$, b) $\alpha = 43^0$, $\beta = 69^0$, c) $\alpha = 33^0\,17'$, $\beta = 86^0\,29'$ ist? Drücke $\sphericalangle \gamma$ allgemein mit Hilfe der Summe von α und β aus.
Durch zwei Dreieckswinkel ist der dritte bestimmt.

9. Erkl. 1: Die Nebenwinkel der Dreieckswinkel heißen Außenwinkel des Dreiecks.

Sie werden von einer Dreiecksseite und der Verlängerung einer anderen gebildet. — Aus der Erklärung folgt unmittelbar, daß $\sphericalangle \gamma'$ ebenso groß sein muß wie $(\alpha + \beta)$, da sowohl $\sphericalangle \gamma'$ wie auch die Summe $(\alpha + \beta)$ $\sphericalangle \gamma$ zu 180^0 ergänzt:

$\gamma' = \alpha + \beta$ $\gamma' = \alpha + \beta$ ergibt?

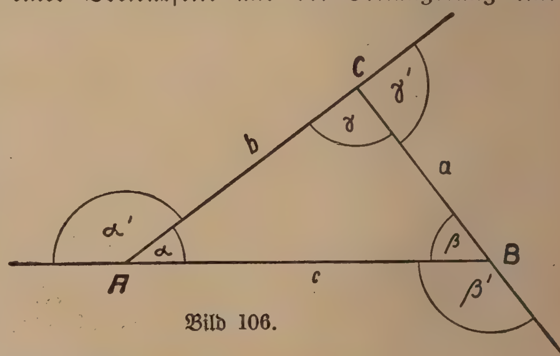


Bild 106.

Lehrs. 3: Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden nicht anliegenden Innenwinkel.

10. a) Miß in verschiedenen Dreiecken die Größe zweier Seiten und ihrer gegenüberliegenden Winkel; welche Zuordnung haben sie? **Seiten und Winkel**

b) Im Dreieck ABC (Bild 107) ist die Seite $b > a$. $\sphericalangle \beta$ ist größer als sein Teilwinkel β_1, und da dieser gleich $\sphericalangle \alpha$ ist (warum?), ergibt sich, daß auch $\beta > \alpha$ sein muß. Es gilt allgemein:

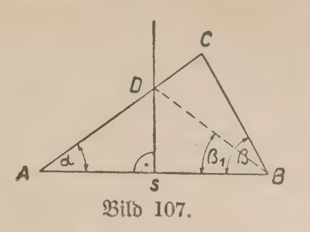


Bild 107.

Lehrs. 4: **Der größeren von zwei Seiten eines Dreiecks liegt der größere Winkel gegenüber.** **$a \gtreqless b$, $\alpha \gtreqless \beta$**

c) Ebenso gilt die Umkehrung:

Lehrs. 4a: **Dem größeren von zwei Winkeln eines Dreiecks liegt die größere Seite gegenüber.**

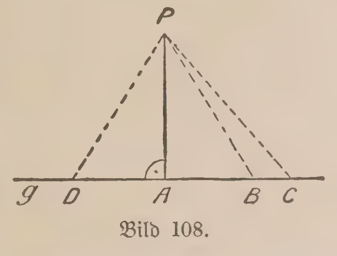


Bild 108.

11. Begründe daraus die Folgerungen:

a) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Spannseite (Hypotenuse) am größten.

b) Das Lot ist die kürzeste Verbindung zwischen einem Punkt und einer Geraden (Bild 108).

12. a) Nach Nr. 8 ist $\sphericalangle \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$. Drücke entsprechend α durch die Summe von β und γ, β durch die Summe von γ und α aus.

b) Von den drei Winkeln eines Dreiecks können nur zwei beliebig gewählt werden, der dritte ist von der Summe der beiden ersten abhängig. **Abhängigkeiten**

c) In Nr. 3, S. 48, ist eine Tabelle für Nebenwinkel aufgestellt. Wenn wir den einen Winkel dabei verändern, nimmt der andere in bestimmter Weise zu oder ab; er hängt von dem ersten ab.

Erkl. 2: **Wenn die beliebige Änderung einer Größe eine gesetzmäßige Änderung einer zweiten Größe bewirkt, so nennt man die zweite Größe eine Funktion der ersten.** **Funktion**

d) Ist beispielsweise $\beta = 180^0 - \alpha$, und sind α und β Veränderliche (Variable), so heißt β die abhängige Veränderliche (Funktion), weil ihre Größe von α, der unabhängigen Veränderlichen, die willkürlich gewählt werden kann, abhängt. **Veränderliche**

13. Wie groß ist im rechtwinkligen Dreieck der spitze Winkel β, wenn $\sphericalangle \alpha$ gegeben ist?

14. In einem Dreieck ist $\alpha = 65^0$, $\beta = 43^0$; berechne die fehlenden Winkel γ, α', β', γ' (Bild 106).

15. Zeichne einen Winkel $\alpha = 39^0$ und eine Gerade, die einen Schenkel unter dem Winkel $\beta = 67^0$ schneidet. Berechne alle entstehenden Winkel. (Achtung! Zwei verschiedene Lagen!)

16. Beweise die Sätze: a) Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß wie jeder Grundlinienwinkel; **Außenwinkel an der Spitze**

b) Im gleichseitigen Dreieck beträgt jeder Winkel 60^0.

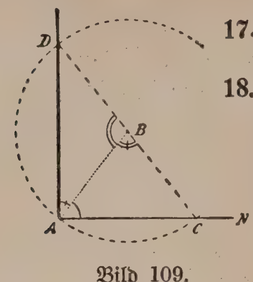
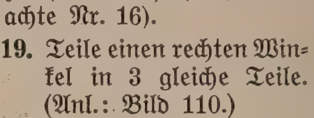


Bild 109.

17. Zeichne nur mit Zirkel und Lineal einen Winkel von 60°.

18. Errichte im Endpunkt einer Strecke am Rande des Zeichenblattes die Senkrechte zu (Bild 109) (Anl.: Beachte Nr. 16).

19. Teile einen rechten Winkel in 3 gleiche Teile. (Anl.: Bild 110.)



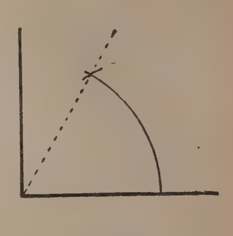


Bild 110.

Stelle für jede der folgenden Aufgaben eine Tabelle auf und beachte die Abhängigkeit der einzelnen Größen voneinander.

20. Wie groß ist die Winkelsumme a) im Viereck, b) im Fünfeck, c) im Sechseck, d) im Siebeneck, e) im Zehneck, f) im n-Eck? (Formel! Die Winkelsumme ist abhängig von der Anzahl der Ecken.) — Anleitung: Zerlege jedes Vieleck von einem Punkte im Innern aus in Dreiecke.

n[1]	3	4
σ[2]	2∟	

21. In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Basiswinkel $\alpha = 32^0$; er wächst um 7^0. Wie groß ist jedesmal der Winkel γ an der Spitze und sein Außenwinkel γ'? Stelle eine Formel für γ und für γ' auf. Tabelle!

22. Verfahre wie in Nr. 21, wenn $\gamma = 150^0\,40'$ ist und immer um $11^0\,20'$ abnimmt. Stelle α und γ' zusammen. Welche Formel gilt für α? Tab.

23. In einem Dreieck sei $\alpha = 23^0\,17'$ und $\beta = 19^0\,41'$; α wachse stets um $6^0\,9'$, β um $8^0\,4'$. Bestimme jedes Mal γ, α', β', γ'. Tabelle!

24. Zeichne gleichschenklige Dreiecke mit der Basis c = 5 cm und dem Basiswinkel $\alpha = 20^0, 30^0, 40^0 \ldots 80^0$. Miß jedesmal die zugehörige Höhe h_c.

25. In welchem Sinne ändert sich die Höhe im gleichschenkligen Dreieck, wenn a) bei gleichbleibender Grundlinie die Winkel an ihr verkleinert oder vergrößert werden (Höhe als „Funktion" des Basiswinkels), b) der Winkel an der Spitze verkleinert oder vergrößert wird?

22. Abschnitt:

Die Grundaufgaben des Dreiecks; Deckungsgleichheit.

1. a) Zeichne eine Strecke $\overline{AB} = c = 6$ cm. Wo liegen **alle** Punkte, die b = 5 cm von A entfernt sind? Wo liegen **alle** Punkte, die a = 4 cm von B entfernt sind? Zeichne **einen** Punkt C, der von A 5 cm **und** von B 4 cm entfernt ist. Wie lang sind die Seiten des Dreiecks ABC? b) Zeichne mehrere Dreiecke mit den Seiten c = 6 cm, a = 4 cm und einer dritten Seite b, die du beliebig wählst. Wie groß muß b **mindestens**

---

[1] n Anzahl der Ecken. [2] σ (Sigma) Summe der Winkel.

sein, wie groß darf sie höchstens sein? **c)** Sind nur zwei Seiten a und b gegeben, so kann man beliebig viele Dreiecke zeichnen, d. h. die Aufgabe ist unbestimmt. **d)** Gleichschenklige und gleichseitige Dreiecke haben wir schon aus ihren Seiten gezeichnet (Bd. I). Wir wollen jetzt die allgemeine Aufgabe für ein ungleichseitiges Dreieck lösen.

2. △ **aus: a, b, c** (a = 4 cm, b = 5 cm, c = 6 cm). **Grundaufgabe s, s, s**

Ein Dreieck aus den Seiten zu zeichnen.

Lösung: Zeichne c mit den Endpunkten A und B. Beschreibe um A mit b und um B mit a die Kreise, die sich in C schneiden. Ziehe CA und CB. △ABC ist das gesuchte.

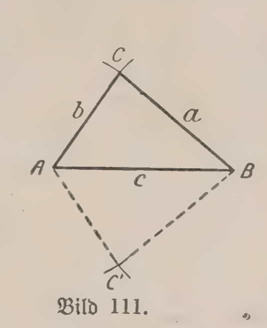


Bild 111.

Grenzbetrachtung: Die beiden Kreise schneiden sich noch einmal in C'. △ABC' liegt zu △ABC symmetrisch und ist deckungsgleich. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn $a + b > c$ und $a - b < c$ ist. (Grund?)

Wann gibt es nur einen Schnittpunkt C, wann gibt es keinen?

Bemerkung: Jede Wiederholung der Zeichnung mit den gleichen Stücken führt zu einem Dreieck von gleicher Gestalt und Größe. Alle diese Dreiecke können ausgeschnitten und so aufeinander gelegt werden, daß sie sich vollständig decken.

Dies führt zu dem

Ergebnis: Durch drei Seiten ist ein Dreieck eindeutig bestimmt.

Erkl. 1: **Figuren, die sich beim Aufeinanderlegen vollständig decken, heißen deckungsgleich oder kongruent.** (Im Zeichen ≅).

Kongruenzsatz: Dreiecke sind deckungsgleich, wenn sie übereinstimmen in den drei Seiten.

Erkl. 2: **Aufeinanderfallende Stücke** (Strecken oder Winkel) **heißen entsprechende** (homologe).

Daraus ergibt sich:

In kongruenten Dreiecken sind die entsprechenden (homologen) Stücke gleich.

Bisher haben wir die Winkel mit Hilfe des Winkelmessers angetragen (Bd. I). Mit Hilfe der Grundaufgabe s, s, s ist es möglich, einen durch Zeichnung gegebenen Winkel ohne Benutzung des Winkelmessers nur mit Zirkel und Lineal anzutragen.

3. Zu den 6 Grundaufg. S. 58 (62) tritt noch als siebente hinzu: **Winkel antragen**

a) Aufg.: **In einem Punkte** (P) **an eine Gerade** (g) **einen Winkel** (α) **anzutragen.**

Lösung (Bild 112): Die Lösung besteht aus vier Schritten: 1. ○ um A mit beliebigem Radius, Schnittpunkte B und C; 2. ○ um P mit gleichem Radius, Schnittpunkt Q; 3. ○ um Q mit $\overline{BC}$, Schnittpunkt R; 4. Verbindungsstrahl PR.

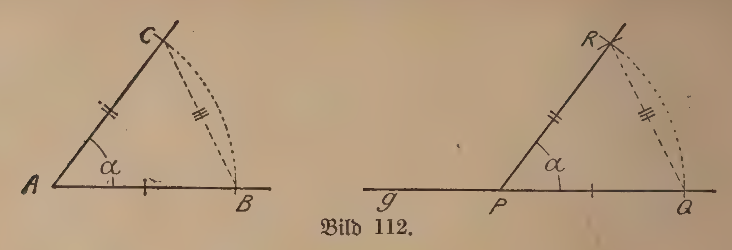


Bild 112.

Beschreibe die Lösung ausführlich.

Bew.: Zieht man BC und QR, so sind die Dreiecke ABC und PQR nach s, s, s kongruent, also ∢ P = ∢ A = ∢ α als entsprechende Stücke.

Parallele ziehen

b) Mit Hilfe dieser Aufgabe können wir jetzt für die 5. Grundaufgabe (S. 62) eine dritte Lösung angeben: Sie besteht aus zwei Schritten: 1. beliebige Gerade s durch P, die ∢ α mit g bildet; 2. ∢ α in P an s nach der anderen Seite antragen. (Bild 113).

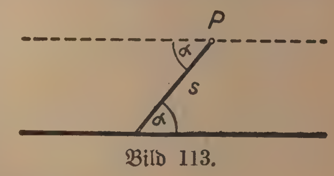


Bild 113.

Auf welchem Satz beruht diese Lösung?

Grundaufgabe s, w, s

4. **△ aus: b, c, α** (b = 3 cm, c = 5 cm, $\alpha = 60^0$).

Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Lösung (Bild 114): Zeichne c mit den Endpunkten A und B; trage in A an AB ∢ α an und beschreibe um A mit b den Kreis, der den freien Schenkel in C schneidet. Ziehe BC; △ ABC ist das gesuchte.

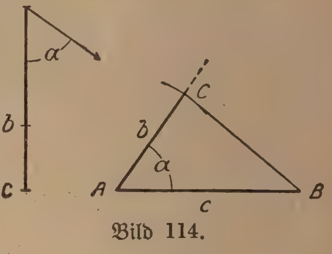


Bild 114.

Grenzbetrachtung: ∢ α läßt sich in A an AB nach beiden Seiten hin antragen. Der Kreis um A mit b schneidet den freien Schenkel des zweiten Winkels in C′. Es ergeben sich zwei symmetrischgelegene Dreiecke; sie sind deckungsgleich. Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn ∢ $\alpha < 180^0$ ist. — Wir erhalten als

Ergebnis: Durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel ist ein Dreieck eindeutig bestimmt.

Kongruenzsatz: Dreiecke sind deckungsgleich, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel.

Grundaufgabe s, w, w

5. **△ aus: c, α, β** (c = 5 cm, $\alpha = 60^0$, $\beta = 40^0$) (1. Fall).

Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite und zwei Winkeln.

1. Fall: Die beiden Winkel liegen der Seite an.

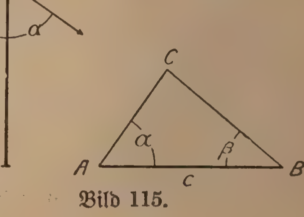


Bild 115.

Lösung: Die Lösung besteht aus 3 Schritten: 1. $\overline{AB} = c$. 2. $\sphericalangle \alpha$ in A an AB. 3. $\sphericalangle \beta$ in B an BA; Schnittpunkt C (Bild 115). $\triangle ABC$ ist das gesuchte.

2. Fall: Ein Winkel liegt der Seite an, der andere ihr gegenüber. $\triangle$ aus c, α, γ ($c = 5$ cm, $\alpha = 60^0$, $\gamma = 80^0$).

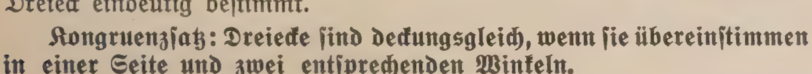
Lösung: Durch zwei Winkel α und γ ist auch der dritte Winkel β bestimmt (Bild 116). Damit ist dieser Fall auf den ersten zurückgeführt. Im folgenden brauchen wir also die beiden Fälle nicht mehr zu unterscheiden.

Grenzbetrachtung: Da sich die beiden Winkel α und β auch nach der anderen Seite von AB antragen lassen, ergeben sich zwei symmetrisch gelegene, deckungsgleiche Dreiecke.

Die Aufgabe ist nur lösbar, wenn die Summe der beiden gegebenen Winkel kleiner als 180^0 ist.

Ergebnis: Durch eine Seite und zwei Winkel ist ein Dreieck eindeutig bestimmt.

Bild 116.


Kongruenzsatz: Dreiecke sind deckungsgleich, wenn sie übereinstimmen in einer Seite und zwei entsprechenden Winkeln.

Anm.: Die Lösung des 2. Falles kann auch ohne $\sphericalangle \beta$ gefunden werden; 1. und 2. Schritt wie oben, dann trage man in einem beliebigen Punkte X des freien Schenkels von $\sphericalangle \alpha$ an diesen $\sphericalangle \gamma$ an und ziehe durch B zu seinem freien Schenkel XY die Parallele, die AX in C schneidet. $\triangle ABC$ ist das gesuchte (Bild 117).

6. $\triangle$ **aus:** a, c, α ($a > c$) ($a = 5$ cm, $c = 4$ cm, $\alpha = 80^0$).

Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel. Grund- aufgabe 8, 8, W

Lösung: Die Lösung besteht aus 4 Schritten: 1. $\overline{AB} = c$. 2. $\sphericalangle \alpha$ in A an AB. 3. Kreis um B mit a, Schnittpunkt C (und C'). 4. Verbindungsstrecke $\overline{BC}$ (und $\overline{BC'}$) (Bild 118).

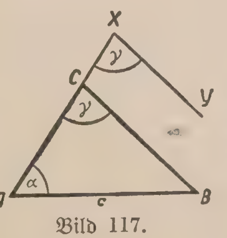


Bild 117.

Grenzbetrachtung: $\triangle ABC$ enthält die gegebenen Stücke, $\triangle ABC'$ enthält $\sphericalangle \alpha$ nicht.

Ergebnis: Durch zwei Seiten und den der größeren gegenüberliegenden Winkel ist ein Dreieck eindeutig bestimmt.

Kongruenzsatz: Dreiecke sind deckungsgleich, wenn sie übereinstimmen in zwei Seiten und dem der größeren gegenüberliegenden Winkel.

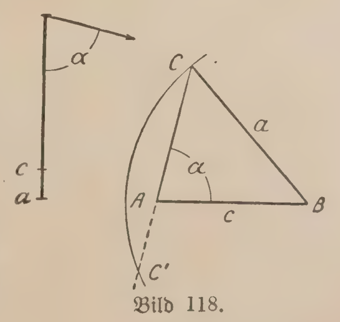


Bild 118.

Anmerkg. Aufgabe: $\triangle$ aus: a, c, α, ($a < c$) — i. W.?

Lösung (Bild 119): Der Gang der Lösung ist der gleiche wie bei der 4. Grundaufgabe. Beide Dreiecke ABC und ABC′ enthalten die gegebenen Stücke, sind aber nicht deckungsgleich. Die Aufgabe ist daher nicht eindeutig. — Wann schneidet der Kreis um B mit a den freien Schenkel des Winkels α nicht? Wann gibt es bei dieser Aufgabe nur eine Lösung?

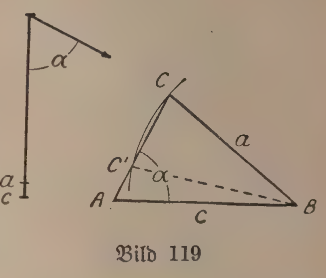


Bild 119

Damit ist gezeigt, daß Dreiecke, die in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren übereinstimmen, nicht deckungsgleich zu sein brauchen. Weise dies auch noch einmal an den beiden Teildreiecken ACD und BCD des gleichschenkligen Dreiecks ABC nach (Bild 120).

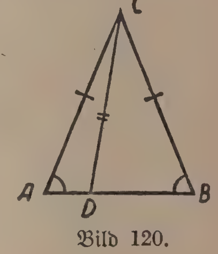


Bild 120.

Zusammenfassung

7. Zusammenfassung: Die große Bedeutung der vorhergehenden vier Sätze über die Deckungsgleichheit von Dreiecken liegt darin, daß man aus der Übereinstimmung zweier Dreiecke in den in diesen Sätzen genannten drei Stücken die Übereinstimmung in den drei übrigen folgern kann.

Ausnahme: **a)** Zeichne zwei verschieden lange Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ und trage in den Endpunkten dieser Strecken $\sphericalangle \alpha = 55^0$ und $\sphericalangle \beta = 45^0$ beide Male an. Wie groß sind die dritten Winkel bei C und C′ in beiden Dreiecken? In welchen Stücken stimmen die beiden Dreiecke überein, in welchen nicht?

b) Also muß für eine eindeutige Lösung unter den gegebenen Stücken stets mindestens eine Strecke sein.

Vorbemerkung: In den folgenden Aufgaben sollen nach ausgeführter Konstruktion die fehlenden Stücke ausgemessen werden.

8. Zeichne ein Dreieck aus: **a)** $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, $c = 5$ cm; **b)** $a = 5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 4{,}5$ cm; **c)** $a = 2{,}5$ cm, $b = 6$ cm, $c = 6{,}5$ cm.

9. Desgl. aus: **a)** $a = 4$ cm, $b = 5$ cm, $\gamma = 75^0$; **b)** $b = 4{,}8$ cm, $c = 5{,}2$ cm, $\alpha = 55^0$; **c)** $c = 4{,}2$ cm, $a = 5{,}3$ cm, $\beta = 100^0$.

10. Desgl. aus: **a)** $a = 4$ cm, $\beta = 45^0$, $\gamma = 70^0$; **b)** $c = 5{,}5$ cm, $\alpha = 40^0$, $\beta = 65^0$; **c)** $b = 6{,}1$ cm, $\alpha = 75^0$, $\gamma = 25^0$.

11. Desgl. aus: **a)** $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $\alpha = 50^0$; **b)** $b = 4{,}5$ cm, $c = 5{,}5$ cm, $\gamma = 30^0$; **c)** $a = 4{,}7$ cm, $c = 7{,}3$ cm, $\gamma = 77^0$ (vgl. auch Nr. 17).

12. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ($\sphericalangle C = \sphericalangle \gamma = 1 \llcorner$) **a)** aus: a, b; **b)** aus a, β; **c)** aus c, α; **d)** aus a, c.

13. Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck aus den drei Seiten a = 3 cm, b = 4 cm, c = 6 cm. Achtung: Nachmessen!!

14. Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck (Spitze stets bei C) aus **a)** a, γ; **b)** c, α; **c)** a, β; **d)** a, c.

15. Welche Grundaufgabe allein ist auf das gleichseitige Dreieck anwendbar?

16. Nach welchem der vier Kongruenzsätze sind gleichschenklige Dreiecke kongruent, wenn sie übereinstimmen in a) der Grundseite und einem Basiswinkel; b) der Grundseite und dem Winkel an der Spitze; c) einem Schenkel und einem Basiswinkel; d) einem Schenkel und dem Winkel an der Spitze; e) der Grundseite und einem Schenkel?

17. Zeichne ein Dreieck aus: a) a = 5,1 cm, b = 7,2 cm, $\alpha = 41^0$; b) b = 6,1 cm, c = 6,9 cm, $\beta = 59^0$; c) a = 7,3 cm, c = 4,7 cm, $\gamma = 77^0$!

18. Beweise: In kongruenten Dreiecken sind a) entsprechende Seitenhalbierende, b) entsprechende Winkelhalbierende, c) entsprechende Höhen gleich.

23. Abschnitt: Anwendungen.

Der Begriff der Deckungsgleichheit ist der wichtigste Begriff der gesamten Elementargeometrie. Überall im täglichen Leben machen wir, oft ohne uns darüber klar zu sein, von ihm Gebrauch. Die Grundaufgaben, aus deren eindeutiger Lösung die Kongruenzsätze gefolgert werden, treten bei allen Zeichnungen, technischen Konstruktionen usw. auf und bilden sozusagen das „geometrische Einmaleins".

A. Einfache Geräte zur Messung von Strecken und Winkeln im Freien.

Zur Durchführung von Messungen im Gelände muß man im Freien Strecken abtragen und Winkel messen können.

1. Zum Streckenabtragen wird die Meßlatte (Bild 121) benutzt: durch fortdauerndes Aneinanderlegen solcher Meßlatten wird die gewünschte Strecke ausgemessen. Für kleine Strecken kann man das Bandmaß benutzen. Bild 121 zeigt noch einige Fluchtstäbe.

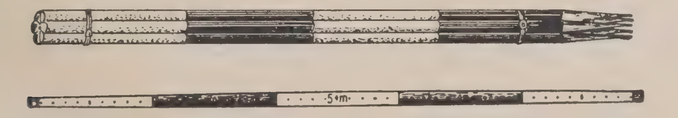


Bild 121.

2. Zur Ermittlung eines Winkels durch Zeichnung benutzt man das Peillineal (Diopterlineal) (Bild 122), das schon von den Ägyptern erfunden

wurde, auf die die Anfänge unserer Feldmeßkunst zurückgehen. Das Lineal wird auf den Zeichentisch gestellt, darauf durch Spalt und Faden ein Punkt im Gelände angepeilt (anvisiert) und an der inneren Kante auf dem Zeichentisch die angepeilte Richtung aufgezeichnet. Wiederholt man das Verfahren mit einer zweiten Richtung im Gelände, so hat man damit den Winkel zwischen den beiden Richtungen zeichnerisch ermittelt.

Peillineal

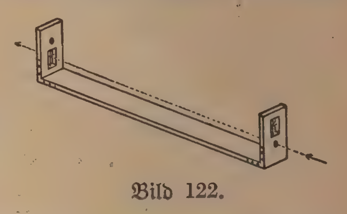


Bild 122.

3. Bei dem Meßkreis (Bild 123 a) ist das Peillineal drehbar auf einer Kreisscheibe mit Winkeleinteilung angeordnet. Winkel im Gelände lassen sich dann unmittelbar ablesen. Für Feinmessungen wird das Peillineal durch ein Fernrohr ersetzt.

Läßt sich bei dem Meßkreis die Scheibe um eine waagerechte Achse drehen, so kann man mit ihm auch Erhebungs- und Senkungswinkel messen (Bild 123 b).

Meßkreis

Winkelkreuz

Winkelspiegel

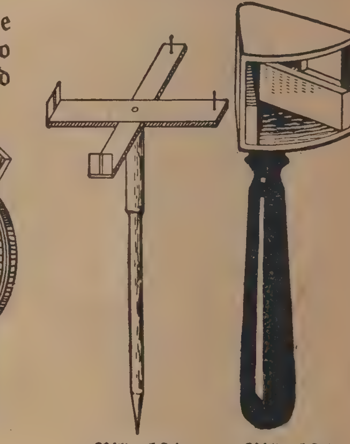


Bild 123 a. Bild 123 b. Bild 124. Bild 125.

4. Das Winkelkreuz (Abb. 124) besteht aus zwei Peillinealen, die aufeinander senkrecht stehen; es dient zum Festlegen senkrechter Richtungen und zum Abstecken rechter Winkel. (Dazu dient auch der Winkelspiegel (Bild 125).)

B. Einfache Vermessungen im Freien.

5. Die Breite $\overline{AB}$ eines Flusses, von dem nur ein Ufer zugänglich ist, soll gemessen werden (Bild 126).

Dazu wird parallel zum Ufer von B aus eine Strecke $a = \overline{BC}$ abgesteckt, so daß ein rechtwinkliges Dreieck ABC entsteht. In diesem Dreieck kann man wegen der Unzugänglichkeit keine Messungen vornehmen, daher wird ein kongruentes Dreieck A′B′C abgesteckt, indem $\overline{BC}$ über C hinaus um sich selbst bis B′ verlängert wird. Senkrecht zu B′C schreitet man bis zu dem Punkte A′, so daß C und A von A′ aus in einer Linie

erscheinen. In diesem zugänglichen Dreieck kann die Strecke $\overline{A'B'}$ gemessen werden, die wegen der Kongruenz beider Dreiecke (nach Kongruenzsatz w s w) gleich der Flußbreite $\overline{AB}$ ist. — Die beiden Dreiecke liegen zentralsymmetrisch (Bild 126).

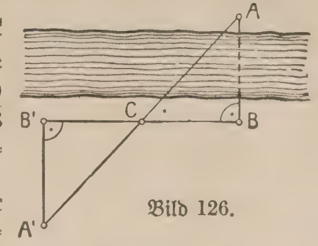


Bild 126.

6. Eine andere Art, die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, deren direkte Verbindungsstrecke wegen irgendeines Hindernisses (Häuserblock, Berg, Moor oder dgl.) nicht unmittelbar gemessen werden kann, zeigt Bild 127. Beschreibe die Lösung der Aufgabe und gib den Satz an, nach dem die beiden Dreiecke deckungsgleich sind.

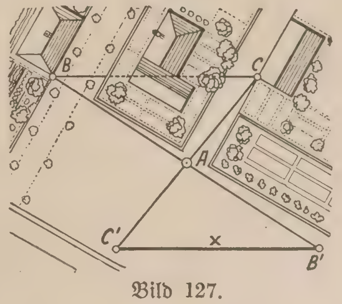
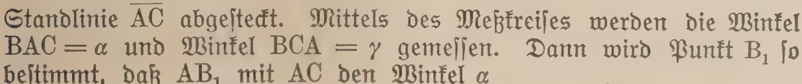


Bild 127.

7. Führe eine Messung nach Nr. 6 auf dem Schulhofe durch.

8. Ein weiteres Verfahren für die Messung einer unzugänglichen Strecke $\overline{AB}$ im Gelände zeigt Bild 128. Dabei wird von dem zugänglichen Punkte A aus die


Standlinie $\overline{AC}$ abgesteckt. Mittels des Meßkreises werden die Winkel $BAC = \alpha$ und Winkel $BCA = \gamma$ gemessen. Dann wird Punkt B_1 so bestimmt, daß AB_1 mit AC den Winkel α und CB_1 mit CA Winkel γ bildet. Dann ist $\overline{AB_1} = \overline{AB}$. Grund?

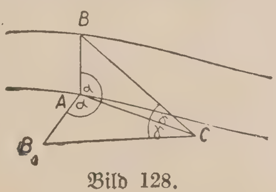


Bild 128.

9. Man kann die Breite eines Flusses folgendermaßen ermitteln. Man visiert[1] über den hochgestellten Daumen bei ausgestrecktem Arm nach einem Punkt des gegenüberliegenden Ufers und dreht sich dann zur Seite, ohne die Erhebung des Armes zu verändern. Die Entfernung vom eigenen Standpunkt bis zu dem von der Daumenspitze gedeckten Punkte ist gleich der gesuchten Breite. Erkläre das Verfahren und führe es im Gelände durch (Bild 129).

10. Die Höhe eines Gebäudes kann man in folgender Weise bestimmen: Von dem Endpunkt A (Bild 130) der zur Hausfront senkrechten Standlinie $\overline{AB}$ wird der Punkt C (Dachrinne, Fensterbrett) anvisiert und der

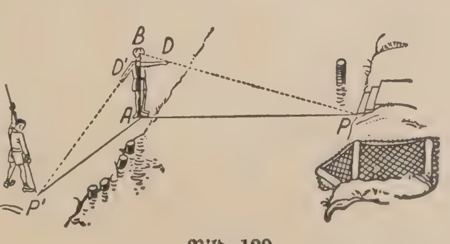


Bild 129.

[1] zielt.

Winkel BAC gemessen. Bestimmt man jetzt den Punkt C′ so, daß ∢ BAC′ gleich ∢ BAC wird, dann gibt $\overline{BC'}$ die gesuchte Höhe an. Fügt man noch die Augenhöhe (Höhe des Meßinstrumentes) hinzu, so erhält man die Höhe über dem Erdboden (Bild 130). a) Begründe das Verfahren mittels deckungsgleicher Dreiecke. b) Durch welche Bewegung lassen sich die Dreiecke ABC und ABC′ ineinander überführen? c) Führt die Messung an eurem Schulgebäude durch.

Bild 130.

C. Peilungs- und Ortungsaufgaben.

Während in den bisherigen Aufgaben die gesuchten Entfernungen durch das Ausmessen von entsprechenden Stücken in deckungsgleichen Dreiecken direkt im Gelände bestimmt werden konnten, sollen die folgenden Aufgaben durch eine Maßstabzeichnung gelöst werden.

Die Navigation, d. h. die Bestimmung des Kurses von Schiffen oder Flugzeugen, stützt sich auf Dreieckskonstruktionen. Als Längenmaß wird die Seemeile (sm) benutzt (Bd. I). Die Winkelmessung wird meist durch Bestimmung der Himmelsrichtungen ausgeführt (13. Abschn.). — In den folgenden Aufgaben sind Strömungs- und Windeinflüsse nicht berücksichtigt.

Küstenschiffahrt

11. Um die kürzeste Entfernung, die ein Dampfer mit dem Kurs N 32° O von einem Leuchtturm hat, zu ermitteln, wurde der Leuchtturm einmal unter 45° Steuerbord (rechts) voraus, ein zweites Mal unter 45° achteraus beobachtet. In der Zwischenzeit wurden 16 sm zurückgelegt. Bild 131.
a) Bestimme durch eine Zeichnung die kürzeste Entfernung (Maßstab: 1 sm ≙ $\frac{1}{2}$ cm). Was für eine Figur entsteht hierbei?
b) Welche besondere Lage zum Dampfer hat der Leuchtturm, wenn das Schiff den Kurs NO hat?

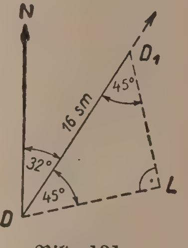


Bild 131.

12. Bestimme die kürzeste Entfernung wie in Aufg. Nr. 11a
a) beim Kurs N 18° O, dem Abstand 10 sm und einem zweimaligen Beobachtungswinkel von 60°,
b) beim Kurs S 44° O, dem Abstand 14 sm und einem zweimaligen Winkel von 37°.

Welche Figuren entstehen hierbei? Können auch hier wie in Aufg. Nr. 11b besondere Lagen auftreten?

13. Ein Schiff (D_1) das S 23° W fährt, peilt den Brüsterorter Leuchtturm (L) in S 25° O an. Nach einer Fahrt von 10 Seemeilen (D_2) erscheint der Leuchtturm in S 78° O. Bestimme durch Zeichnung (1 sm ≙ $\frac{1}{2}$ cm) a) die Entfernung bei der ersten Messung, b) die Entfernung bei der zweiten Messung, c) die kürzeste Entfernung. d) In welcher Entfernung erscheint der Leuchtturm vom Schiff (D_0) aus genau im Osten, e) in welcher

Richtung und Entfernung erscheint der Leuchtturm nach weiteren 5 Seemeilen (von D_3 aus)? (Bild 132).

14. Von einem Schiff aus, das in Richtung N 80° O fährt, wird Helgoland in O 30° S angepeilt. Nach einer Fahrt von 20 sm ergibt die Peilung die Richtung S 25° W auf Helgoland. a) Wie weit ist Helgoland von den beiden Peilungsorten entfernt? b) Wie groß ist die kürzeste Entfernung, die das Schiff von Helgoland hatte? (Maßstab: 1 sm $\triangleq \frac{1}{2}$ cm).

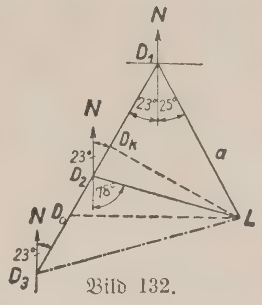


Bild 132.

15. Von einem Dampfer werden ein Leuchtturm L in S 40° O und ein Feuerschiff F in N 38° O angepeilt. Der Leuchtturm liegt 17,6 sm in S 23° O vom Feuerschiff. a) Bestimme durch eine Zeichnung (Maßstab: 1 sm $\triangleq \frac{1}{2}$ cm) die Entfernungen vom Leuchtturm und vom Feuerschiff. b) Welchen Kurs muß das Schiff steuern, wenn es den 30 Seemeilen vom Feuerschiff in S 64° O liegenden Hafen H anlaufen will? Wie weit ist der Hafen entfernt? (Zeichne zunächst L und F in ihrer gegenseitigen Lage.) (Bild 133.) c) Löse die gleiche Aufgabe, wenn die beiden Peilungen S 40° W und N 52° W ergeben.

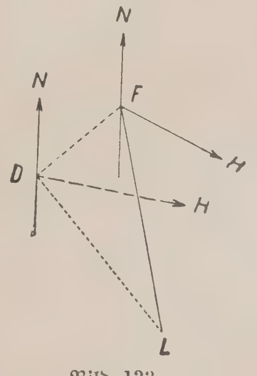


Bild 133.

Flugverkehr

16. Um bei einem Nebelflug auf der Strecke Köln—Berlin den Standort des Flugzeuges festzustellen, ruft das Flugzeug die Funkstationen der Flughäfen Hannover und Berlin an.
a) Hannover gibt als Peilrichtung S 72° O, Berlin S 68° W. Bestimme durch eine Zeichnung (50 km $\triangleq$ 1 cm) den Ort des Flugzeuges, wenn Hannover 270 km westlich von Berlin liegt. Wie weit ist es von Berlin und von Hannover entfernt (Bild 134)? b) Desgl. für Hannover S 23° O und für Berlin S 74° W.

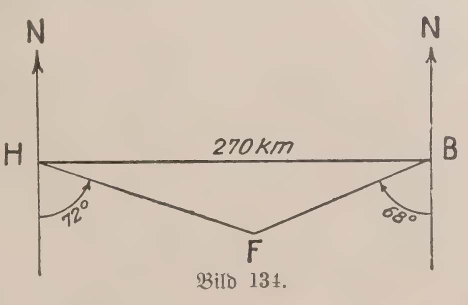


Bild 134.

17. Auf einem Fluge nach Wien ruft ein Flugzeug die Flughäfen von München und Wien an. Es erhält die Peilrichtungen a) von München N 46° O, von Wien N 19° W; b) von München N 21° O, von Wien N 67° W, c) von München S 85° O, von Wien S 16° W. Wie weit ist es noch von Wien entfernt, wenn Wien 360 km östlich von München liegt? (Maßstab: 50 km $\triangleq$ 1 cm.)

Einfache Dreieckskonstruktionen mit Hilfe von Teildreiecken.

Für die Zeichnung von Dreiecken können außer Seiten und Winkeln auch noch andere Stücke, z. B. Höhen, Seiten-, Winkelhalbierende u. a. gegeben sein.

Plan Es ist vorteilhaft, zur Lösung einer solchen Aufgabe einen Plan zu machen.

Man zeichnet ein beliebiges Dreieck, das man als das gesuchte ansieht und trägt die gegebenen Stücke ein. Man sucht ein Hilfsdreieck, das man aus drei Stücken nach einer der vier Grundaufgaben zeichnen kann und überlegt, wie die noch fehlenden Punkte des Dreiecks gefunden werden können. — Stelle solche Ortssätze im Merkheft zusammen.

Auf Grund dieses Planes führt man die Zeichnung durch. Zuweilen schließt sich noch eine Untersuchung über die Lösbarkeit der Aufgabe an (Grenzbetrachtung).

Beispiel: Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, einem anliegenden Winkel und der Höhe, die zu seiner gegenüberliegenden Seite gehört. ($b = 2{,}8$ cm, $h_c = 2$ cm, $\gamma = 70^0$.)

Plan (Bild 135): Das Dreieck ABC sei das gesuchte; dann ist $\overline{AC} = b$, $\sphericalangle ACB = \gamma$. Fällt man von C auf AB das Lot CD, so ist $\overline{CD} = h_c$, $CD \perp AB$. (1. Teil des Planes.)

ACD ist Hilfsdreieck, denn es läßt sich nach der Grundaufgabe (s, s, w) aus $\overline{AC} = b$, $\overline{CD} = h_c$, $\sphericalangle ADC = 1∟$ zeichnen. (2. Teil des Planes.)

Da der fehlende Punkt B auf der Geraden AD und auf dem freien Schenkel des Winkels ACB liegt, findet man ihn durch folgende Angabe:

B liegt 1. auf AD und 2. auf dem freien Schenkel des in C an AC angetragenen Winkels γ.

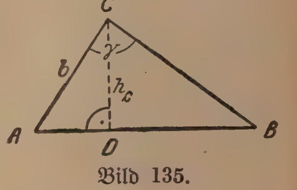


Bild 135.

Lösung (Bild 136): Man zeichne $\overline{CD} = h_c$, errichte in D auf CD die Senkrechte und beschreibe um C mit b den Kreis, der die Senkrechte in A (und A′) schneidet. Man trage in C an AC $\sphericalangle \gamma$ an. Sein freier Schenkel schneidet AD in B. $\triangle$ ABC ist das gesuchte.

Grenzbetrachtung: Die Aufgabe hat zwei, eine oder keine Lösung, je nachdem $b > h_c$, $b = h_c$ oder $b < h_c$ ist. Für den vorliegenden Fall hätte man $\sphericalangle \gamma$ auch noch in C an A′C antragen können; man hätte damit ein 2. Dreieck A′B′C erhalten.

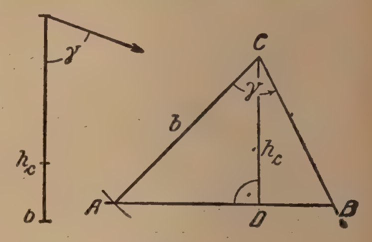


Bild 136.

18. $\triangle$ aus: $a = 5{,}3$ cm, $b = 6{,}4$ cm, $h_c = 4{,}4$ cm.
19. $\triangle$ aus: $a = 3{,}8$ cm, $h_b = 3{,}8$ cm, $\alpha = 54^0$.
20. $\triangle$ aus: $a = 3{,}3$ cm, $s_c = 3{,}7$ cm, $\beta = 57^0$.
21. $\triangle$ aus: $a = 2{,}3$ cm, $s_a = 3{,}9$ cm, $\beta = 39^0$.
22. $\triangle$ aus: $c = 7{,}2$ cm, $w_\alpha = 5{,}2$ cm, $\alpha = 78^0$.
23. $\triangle$ aus: $w_\gamma = 4{,}5$ cm, $\alpha = 44^0$, $\gamma = 80^0$.

24. △ aus: a, h_c, γ **29.** △ aus: a, c, s_c **34.** △ aus: a, w_γ, γ
25. △ „ a, h_c, α **30.** △ „ c, s_c, β **35.** △ „ w_γ, α, γ
26. △ „ b, p, q **31.** △ „ a, s_a, b **36.** △ „ a, w_γ, β
27. △ „ c, h_c, α **32.** △ „ a, h_c, s_c **37.** △ „ a, w_γ, p
28. △ „ a, c, h_c **33.** △ „ a, p, s_a **38.** △ „ h_c, w_γ, p.

Zeichne Dreiecke aus:

39. a = 5 cm, b = 3,5 cm, q = 2 cm. Ändere den Wert von q; wie ändern sich dann die Seiten und Winkel? q = 0,5; 1; 1,5 . . . cm. (Tabelle.)

40. a = 7 cm, b = 4 cm, s_a = 5 cm. Ändere den Wert von s_a; wie ändern sich dann die Seiten und Winkel? (Tabelle.) Zwischen welchen Werten kann s_a liegen? (s. S. 65, Nr. 1.)

Beachte in den vorliegenden Fällen den funktionalen Zusammenhang, der zwischen dem geänderten Stück und den davon abhängigen Stücken besteht. Verfolge die Abhängigkeit, den „Funktionsverlauf", an der Wertetabelle.

VIII. Das Viereck.

24. Abschnitt: Vom Viereck im allgemeinen.

1. a) Werden vier Punkte einer Ebene miteinander verbunden, so entsteht ein Viereck. Je nach der Lage der Punkte und der Reihenfolge, in der man sie verbindet, entsteht ein Viereck mit ausspringenden Ecken (Bild 137 a), mit einspringender Ecke (Bild 137 b) oder ein überschlagenes Viereck (Bild 137 c). Im folgenden betrachten wir nur Vierecke mit ausspringenden Ecken.

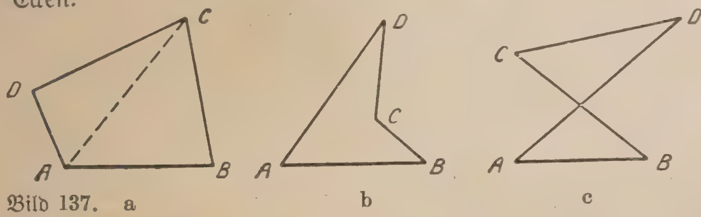


Bild 137. a b c

b) Zeichne vier Punkte ABCD so, daß nicht drei in einer Geraden liegen. Verbinde sie miteinander und miß die Winkel aus (Bild 137 a).

2. Eine Ecklinie teilt ein Viereck in zwei Dreiecke. Die sechs Dreieckswinkel bilden zusammen die vier Viereckswinkel. Daher gilt der

Lehrs. 1: Die Summe der Innenwinkel jedes Vierecks beträgt 360°.

Aufgaben.

3. Wieviel **a)** spitze, **b)** rechte, **c)** stumpfe Winkel kann ein Viereck höchstens haben? Zeichnung!

4. Vier Punkte in der Ebene bestimmen ein Viereck (Bild 138 a), vier Punkte im Raume dagegen ein Vierflach (dreiseitige Pyramide Bild 138 b). **Viereck Vierflach**

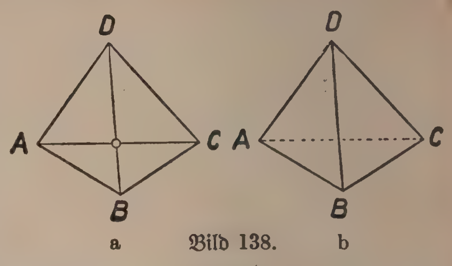
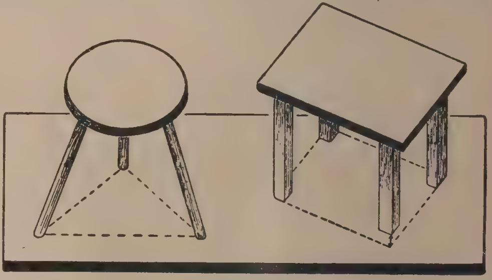


Bild 138.

Während durch **drei** beliebig im Raume gelegene Punkte immer ein **Dreieck** gegeben ist (halte ein Zeichendreieck in alle möglichen räumliche Lagen), ist durch **vier** beliebige Punkte im Raume im allgemeinen kein Viereck bestimmt.

Dreibein Anm.: Ein dreibeiniger Tisch kann niemals wackeln, sondern höchstens „schief stehen", da die drei Fußpunkte der Tischbeine immer in der Fußbodenebene liegen (Bild 139). Ein vierbeiniger Tisch dagegen, bei dem die Fußpunkte der Beine nicht in einer Ebene liegen, also ein Vierflach, aber kein Viereck bilden, wird solange wackeln, bis man durch Unterlegen von Holzklötzchen ein Viereck erzwingt.


Bild 139.

a) Weshalb ist ein Stativ für einen Photoapparat oder für einen Meßkreis dreibeinig? **b)** Wieviel Ecken hat ein „viereckiger Kasten"?

6. Ein Viereck zu zeichnen aus (Bezeichnungen s. S. 7):

a) a = 4,5 cm, b = 4 cm, c = 5 cm, d = 3 cm, $\beta = 75^0$
b) a = 4,5 „ b = 3,5 „ c = 3 „ d = 6 „ e = 7 cm
c) a = 5,5 „ b = 3,3 „ c = 8 „ $\beta = 120^0$, $\gamma = 98^0$
d) a = 3,2 „ b = 4,4 „ c = 5,4 cm, e = 4 cm, $\gamma = 100^0$
e) a, b, c, e, f **f)** a, e, β, γ, δ **g)** a, β, γ, δ.

7. Von A aus soll die Entfernung einer in D befindlichen feindlichen Stellung ermittelt werden, obwohl D von A aus nicht sichtbar ist. Bekannt sind die Entfernungen $\overline{AB} = a = 200$ m, $\overline{AC} = b = 310$ m. Die Winkel ABD $= \beta = 68^0$, BAC $= \alpha = 142^0$ und ACD $= \gamma = 59^0$ sind durch Visieren gefunden worden. Führe die Zeichnung in einem geeigneten Maßstab aus. (Bild 140.)

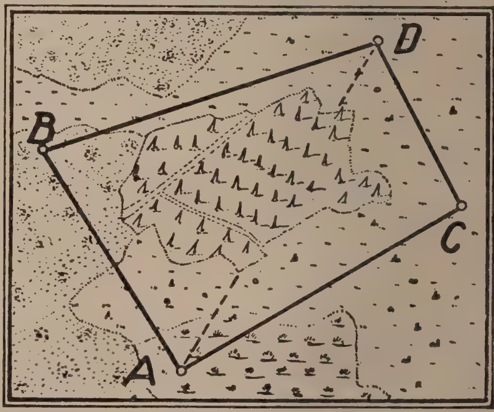


Bild 140.

8. Von zwei Beobachtungsstellen A und B aus werden ein Ziel Z und die Feuerstellung F gegen die Verbindungslinie $\overline{AB}$ unter den Winkeln $\alpha_1 = 35^0$, $\alpha_2 = 50^0$; $\beta_1 = 55^0$, $\beta_2 = 60^0$ angeschnitten (gemessen). — (Bild 141.) $\overline{AB}$ ist gleich 1,2 km. Wie weit ist das Ziel von der Feuerstellung entfernt? (Maßstab 1 : 200.)

9. Ein Minenwerfer M steht hinter einem Hügel in gedeckter Stellung. Zwei Beobachter A und B, deren Stellungen zu M bekannt sind ($\overline{MA} = 200$ m, $\overline{MB} = 320$ m, $\sphericalangle$ AMB = 3000⌐), messen folgende Winkel zum feindlichen Ziel: $\sphericalangle$ MAZ = 2100⌐ und $\sphericalangle$ MBZ = 1700⌐. Wie weit ist Z von M entfernt?

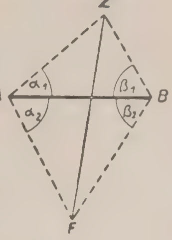
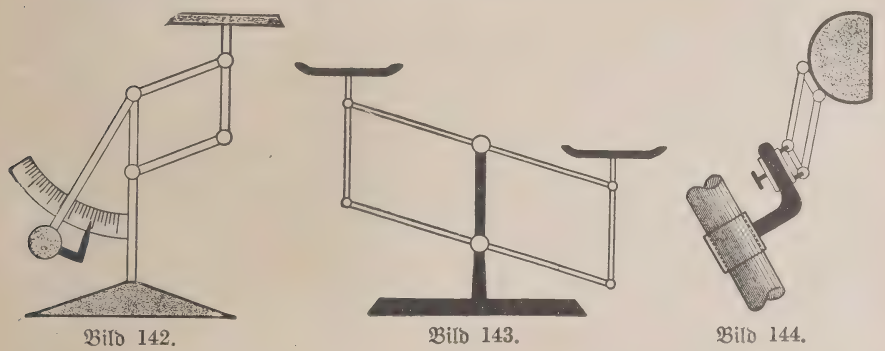


Bild 141.

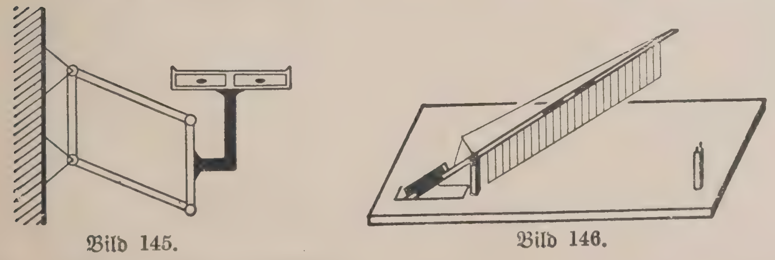
25. Abschnitt: Das Parallelogramm.

Erkl.: **Ein Viereck, dessen Gegenseiten parallel sind, heißt Parallelogramm.**


Bild 142. Bild 143. Bild 144.

1. Die Bilder 142 ··· 146 zeigen eine Briefwaage, eine Tafelwaage, die Aufhängung einer Fahrradlampe, das Tischchen eines Zahnarztes und eine Eisenbahnschranke. Wo treten bei diesen Gegenständen Parallelogramme auf?

Um die Wirkungsweise dieser Einrichtungen zu verstehen, müssen wir


Bild 145. Bild 146.

zuvor die geometrischen Eigenschaften dieser besonderen Klasse von Vierecken kennen lernen.

2. Wird im Parallelogramm ABCD (Bild 147) die Ecklinie $\overline{BD}$ gezogen, so entstehen die Dreiecke ABD und CBD. Dreht man $\triangle$ BDC um den Mittelpunkt M von $\overline{BD}$ um 180°, so fällt B auf D und D auf B. $\overline{BA}$ geht in die Parallele durch D über, fällt also mit $\overline{DC}$ zusammen. $\overline{DA}$ geht in die Parallele durch B über, fällt also mit $\overline{BC}$ zusammen.

Bild 147.

Es gilt daher der

Hilfssatz: Ein Parallelogramm wird durch eine Ecklinie in zwei kongruente Dreiecke geteilt.

Zentralsymmetrie 3. Diese beiden deckungsgleichen Dreiecke liegen zentralsymmetrisch zu M, woraus die Gleichheit der entsprechenden Seiten und Winkel der Dreiecke ABD und CDB folgt. Daraus erhält man folgende Sätze über das Parallelogramm:

Lehrs. 1: Im Parallelogramm sind die Gegenseiten gleich.

Lehrs. 2: Im Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel gleich.

Lehrs. 3: Im Parallelogramm halbieren die Ecklinien einander.

Satz 1 lautet in anderer Fassung:

Lehrs. 1α: Parallele Strecken zwischen Parallelen sind gleich.

Umkehrsatz 1 a 4. Zeige, daß auch die Umkehrungen dieser Lehrsätze richtig sind.

Wenn in einem Viereck die Gegenseiten gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.

Anl. zum Bew.: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (s, s, s) (Bild 147)
daraus folgt $AB \parallel CD$ (Umkehrungss. 4c, S. 62).

Umkehrsatz 2 a **Wenn in einem Viereck die gegenüberliegenden Winkel gleich sind, so ist es ein Parallelogramm.**

Bew.: Die Winkelsumme im Viereck ist

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0,$$

da $\gamma = \alpha$ und $\delta = \beta$ ist (Bild 148),

folgt: $\alpha + \beta = \gamma + \delta$,

also $2(\alpha + \beta) = 360^0$,

$\alpha + \beta = 180^0$,

da $\beta + \beta'$ als Nebenwinkel zusammen 180° betragen, ist $\alpha = \beta'$ und damit $\overline{AG} \parallel \overline{BC}$. Ebenso ergibt sich $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

Bild 148.

Umkehrsatz 3 a **Wenn in einem Viereck die Ecklinien einander halbieren, so ist es ein Parallelogramm.**

Anl. zum Bew.: Durch Drehung um 180°.

Umkehrsatz 1 b **Wenn in einem Viereck ein Paar Gegenseiten gleich und parallel ist, so ist es ein Parallelogramm.**

Anl. zum Bew.: $\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (s, w, s), dann Umkehrs. 1a.

5. Erkläre danach die Wirkungsweise der in den Bildern 142 ⋯ 145 dargestellten Gegenstände aus den Eigenschaften des Parallelogramms: die Teller der Brief- und der Tafelwaage, die Platte des Tischchens behalten bei einer Auf- und Abbewegung ihre waagerechte Lage bei, entsprechendes gilt von der Fahrradlampe. Die lotrechten Stangen der Eisenbahnschranke (Bild 146) bleiben beim Schließen und Öffnen parallel.

Parallelen-Lineal

6. Bild 149 zeigt ein Gerät, das zum Ziehen von Parallelen dient. Warum bleiben die Lineale stets parallel?

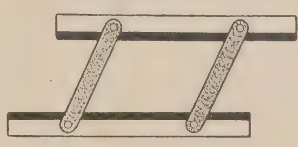


Bild 149.

7. Zeichne zwei sich schneidende Geraden, trage auf der einen vom Schnittpunkte aus nach beiden Richtungen hin 2,5 cm und ebenso auf der anderen nach beiden Seiten hin 3,5 cm ab. Verbinde die Endpunkte miteinander. Was für eine Figur entsteht? Begründung!

8. Zeichne ein Parallelogramm aus: a) $a = 5$ cm; $b = 4$ cm; $\alpha = 110^0$ b) $a = 3{,}8$ cm; $b = 6{,}5$ cm; $\beta = 95^0$ c) $a = 7{,}2$ cm; $b = 5{,}9$ cm; $e = 8$ cm d) $a = 4{,}5$ cm; $\alpha = 60^0$; $f = 5{,}2$ cm e) $a = 5{,}2$ cm; $\beta = 115^0$; $f = 5$ cm

9. a) **Lehrs. 4: Zwei Seitenhalbierende eines Dreiecks schneiden sich so, daß der eine Abschnitt doppelt so groß ist wie der andere.**

Anl. zum Bew.: Die beiden Seitenhalbierenden AD und BE schneiden sich in S. Die Verbindungslinie CS schneidet AB in F. Man verdoppele $\overline{SD}$ und $\overline{SE}$ und ziehe GB, GC, HA und HC. Dann sind SCHA und SBGC Parallelogramme. (Warum?) Folglich AH $\#$ CS $\#$ BG, also ist auch ABGH ein Parallelogramm, $\overline{AS} = \overline{SG} = 2\,\overline{SD}$; ebenso $\overline{BS} = \overline{SH} = 2\,\overline{SE}$.

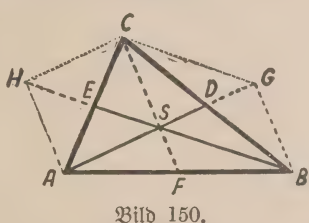


Bild 150.

Da CS Mittelparallele zu AH und BG ist, ist $\overline{AF} = \overline{FB}$, d. h. CF ist ebenfalls Seitenhalbierende. (Bild 150.)

b) **Lehrs. 5: Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.**

Seitenhalbierende und zentrale Symmetrie

c) Dieser Zusammenhang weist darauf hin, daß die S e i t e n h a l b i e r e n d e n eines Dreiecks eng mit der Z e n t r a l s y m m e t r i e verbunden sind, was bei den folgenden Dreieckskonstruktionen mit Seitenhalbierenden besondere Anwendung findet. Ein Hilfsdreieck erhält man bei ihnen erst, wenn man die Figur zum Parallelogramm ergänzt.

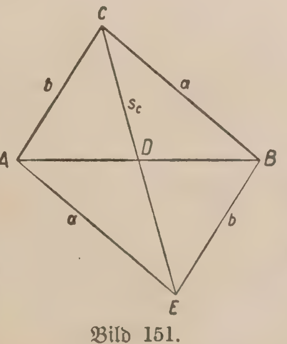


Bild 151.

Beispiel: △ aus: a, b, s_c.

Plan: Wir nehmen an, Dreieck ABC sei das gesuchte; dann ist $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$. Verbindet man die Mitte D von $\overline{AB}$ mit C, so ist $\overline{CD} = s_c$, $\overline{AD} = \overline{DB}$.

In dieser Figur ist bis jetzt kein Hilfsdreieck vorhanden; um eines zu erhalten, verfährt man so:

Man verlängere $\overline{CD}$ um sich selbst und verbinde den Endpunkt mit A und B. Hilfsdreieck ist ACE, denn es läßt sich zeichnen aus $\overline{CE} = 2s_c$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AE} = a$ (Grundaufg. s, s, s). B liegt 1. auf ○ um C mit a, 2. auf ○ um E mit b.

10. a) △ aus: b, c, s_a b) △ aus: a, γ, s_c c) △ aus: c, β, s_b

26. Abschnitt: Die besonderen Formen des Parallelogramms: Raute, Rechteck, Quadrat.

1. Gegeben seien die beiden deckungsgleichen Dreiecke ABC und A′B′C′ mit parallelen Seiten (I und II): Führe mit ihnen folgende Bewegungen aus:

a) Verschiebe I parallel so, daß es mit II zur Deckung kommt (Bild 152).

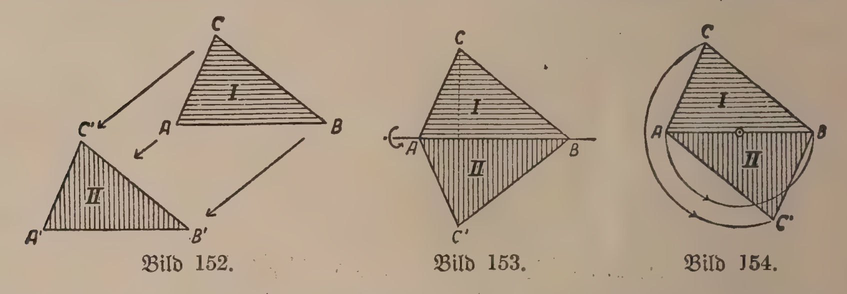


Bild 152. Bild 153. Bild 154.

b) Klappe I um AB um (Bild 153). Was für eine Figur entsteht? (Bild 77.)

c) Drehe I um 180° (Bild 154). Was für eine Figur entsteht?

Was für eine Figur entsteht, wenn die Dreiecke d) gleichschenklig, e) rechtwinklig f) gleichschenklig-rechtwinklig sind?

2. a) Sind zwei benachbarte Seiten eines Parallelogramms gleich, so sind alle Seiten untereinander gleich (Bild 155).

Erkl. 1: **Ein Parallelogramm, dessen Seiten gleich sind, heißt Raute (Rhombus).**

b) Ist ein Winkel eines Parallelogramms ein Rechter, so sind alle Winkel Rechte (Bild 156).

Erkl. 2: **Ein Parallelogramm, dessen Winkel rechte sind, heißt Rechteck.**

Erkl. 3: **Ein gleichseitig-rechtwinkliges Parallelogramm heißt Quadrat.**

c) Es gehört sowohl zu den Rauten als auch zu den Rechtecken und vereinigt die Eigenschaften beider (Bild 157).

3. a) Zeichne zwei sich schneidende Geraden, die aufeinander senkrecht stehen. Verfahre dann wie in Aufg. Nr. 7, S. 83.

b) Zeichne zwei sich schneidende Geraden und trage vom Schnittpunkt aus nach den vier Richtungen gleichlange Strecken ab. Verbinde die vier Endpunkte. Was entsteht?

c) Löse dieselbe Aufgabe noch einmal, wenn die sich schneidenden Geraden aufeinander senkrecht stehen.

d) Wieviel Symmetrieachsen hat die Raute, das Rechteck, das Quadrat?

4. Zu der Eigenschaft der Ecklinien des **Parallelogramms**, einander zu halbieren, tritt noch hinzu **Sätze über Ecklinien**

bei der **Raute**	beim **Rechteck**
Lehrs. 1: In der Raute stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel.	**Lehrs. 2: Im Rechteck sind die Diagonalen gleich.**

Der Beweis folgt aus der axialen Symmetrie zu einer
Ecklinie. Mittelparallelen.

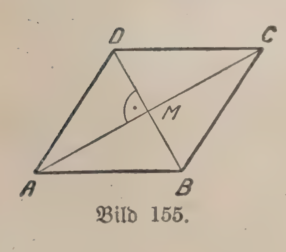


Bild 155.

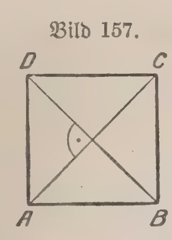


Bild 157.

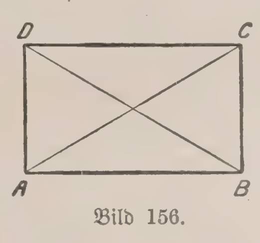


Bild 156.

Mithin gilt für das **Quadrat** der

Lehrs. 3: Im Quadrat stehen die Ecklinien aufeinander senkrecht, sind gleich und halbieren die Winkel.

5. Diese Diagonalsätze lassen sich umkehren. Was für ein Viereck liegt vor, wenn die Diagonalen a) (nur) einander halbieren, außerdem b) gleichlang sind, c) aufeinander senkrecht stehen, d) gleichlang sind und aufeinander senkrecht stehen. Wie heißen also die Umkehrungssätze?

Einige Anwendungen:

6. Bei einem Geländespiel der Hitlerjugend im Walde stößt ein Spähtruppführer, der in einer bestimmten Richtung (Marschkompaß) erkunden soll, auf ein Hindernis (Sumpf, See). Es wird, wie es Bild 158 zeigt, umgangen, indem die Strecke $\overline{AB}$ mit 120 Schritten und $\overline{CD}$ mit der gleichen Schrittzahl abgeschritten wird. Nach Erreichen des Punktes D wird senkrecht zu CD genau dem Punkte A gegenüber weiter marschiert. Begründe die Richtigkeit des Verfahrens und die Tatsache, daß die neue Marschrichtung genau in der Verlängerung der ursprünglichen liegt.



Bild 158.

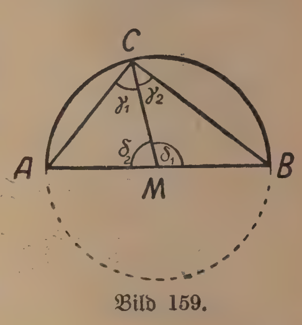


Bild 159.

7. Beschreibt man über $\overline{AB}$ als Durchmesser den Halbkreis und verbindet man einen beliebigen Punkt C seines Umfangs mit A, B und M, so ist nach dem Satz vom Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks

$\gamma_1 = \frac{1}{2}\,\delta_1$ } als Außenw. a. d. Spitze
$\underline{\gamma_2 = \frac{1}{2}\,\delta_2}$ } des gleichschenkl. Dr.
$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = 90^0$

Satz des Thales

Diese Eigenschaft hat schon Thales von Milet im 6. Jahrh. v. Zw. gefunden:

Lehrs. 4: Der Winkel im Halbkreis ist ein Rechter.

8. a) Verdoppele die Seitenhalbierende der Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck über die Seitenmitte. Was für ein Viereck entsteht? (Grund!)

b) Führe die Zeichnung für mehrere rechtwinklige Dreiecke über derselben Spannseite aus. Hieraus ergibt sich der Satz: Im rechtwinkligen Dreieck ist die Seitenhalbierende der Spannseite halb so groß wie diese.

c) Daraus folgt sofort:

Ortssatz

Die Ecken aller rechtwinkligen Dreiecke über derselben Spannseite liegen auf dem Halbkreise über dieser. (Kreis des Thales.)

9. Wird eine Ziegelsteinmauer im Blockverband (Bild 160a) ausgeführt, so wechseln in regelmäßiger Folge Läuferschicht 1 · · · 1 (die Steine liegen mit ihrer längsten Seite in der Mauerflucht) und Binderschicht 2 · · · 2 (die Steine liegen mit ihrer längsten Seite senkrecht zur Mauerflucht) miteinander ab. Die Fugen liegen in gleichartigen Schichten senkrecht übereinander. Der Stein ist 25 cm lang, 12 cm breit und 6,5 cm hoch, die Fuge ist 1 cm breit. Um wieviel cm springt bei der Verzahnung die Binderschicht ein? Beim Kreuzverband (Bild 160 b) liegen die Fugen der Läuferreihen erst in der zweiten gleichartigen Schicht senkrecht übereinander. Zeichne Bild 160a und 160b im Maßstab 1:10 nach den angegebenen Maßen um.

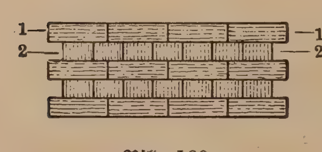


Bild 160 a.


Bild 160 b.

Führe die folgenden Konstruktionsaufgaben aus:

10. Es ist eine Raute zu zeichnen aus:
a) a = 5,8 cm; $\alpha = 50^0$ b) a = 4,6 cm; e = 7,8 cm
c) f = 5,9 cm; $\alpha = 80^0$ d) e = 6,2 cm; f = 5,4 cm

11. Es ist ein Rechteck zu zeichnen aus:
a) a = 6 cm; e = 6,5 cm; b) a = 2,9 cm; e = 7,5 cm.

12. Es ist ein Quadrat zu zeichnen aus:
d = 6 cm.

27. Abschnitt: Das Trapez[1].

1. **a)** Wo findest du am nebenstehenden Bild 161 eines Fachwerkbaues Vierecke, die nur ein Paar parallele Gegenseiten enthalten?



Bild 161.

Erkl.: **Ein Viereck, in dem zwei Seiten parallel sind, heißt Trapez.**

Die parallelen Seiten des Trapezes heißen Grundseiten (a, b), die beiden anderen Seiten Schenkel, der Abstand der Grundseiten Höhe (h), die Verbindungsstrecke der Schenkelmitten Mittellinie (m) (Bild 162).

b) Die Mittellinie ist nach Nr. 10, S. 61 die Mittelparallele der Grundseiten.



Lehrs. 1: Die Mittellinie eines Trapezes ist den Grundseiten parallel.

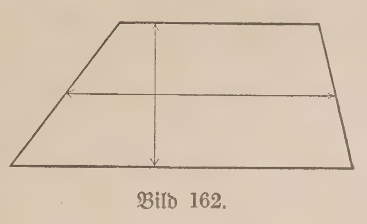


Bild 162.

c) Sind die Schenkel gleichlang, so heißt das Trapez gleichschenklig. Wieviel Symmetrieachsen hat das gleichschenklige, wieviel das beliebige Trapez?

2. **a)** Zeichne zwei beliebige Trapeze und ihre Mittellinie. Miß die Grundseiten und vergleiche ihre Summe mit der Mittellinie.

b) Wird das Trapez ABCD in Bild 163 um den Mittelpunkt F des einen Schenkels um 180° gedreht, so fällt $\overline{CD}$ auf $\overline{BG}$, $\overline{BA}$ auf $\overline{CH}$, $\overline{EF}$ auf $\overline{IF}$ und das durch die Drehung entstandene Trapez BGHC bildet mit dem ursprünglichen zusammen das Viereck AGHD. Dieses ist nach Umkehrung 1b (S. 82) ein Parallelogramm, und da $\overline{EI} = \overline{AG} = \overline{AB} + \overline{CD}$ ist, folgt $\overline{EF} = \frac{1}{2}\,(\overline{AB} + \overline{CD})$. Es gilt also

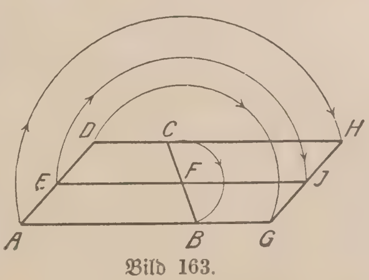


Bild 163.

Lehrs. 2: Die Mittellinie eines Trapezes ist das arithmetische Mittel der Grundseiten. $m = \frac{a + b}{2}$

---

[1] trapeza aus tetra peza, wörtlich = Vierfuß, Tisch, die Tischplatte erscheint als Trapez.



3. Im Grenzfall läßt sich dieser Satz auch auf das Dreieck anwenden: Wird der Trapezschenkel $\overline{AD}$ parallel zu sich zum anderen Schenkel hin verschoben, so nimmt zwar die Länge der Mittellinie dauernd ab, bleibt jedoch stets gleich der halben Summe der jeweiligen Grundseiten (Bild 165). Ist $\overline{DA}$ in die Lage $\overline{CA'}$ gekommen, so ist das Trapez zum Dreieck geworden: die obere Grundseite ist verschwunden und die Mittellinie ist gleich der halben unteren Grundseite. Daher gilt der Satz:

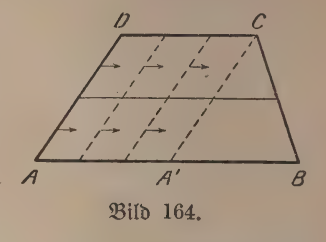


Bild 164.

Im Dreieck ist die Verbindungsstrecke der Mitten zweier Seiten zur dritten parallel und gleich ihrer Hälfte.

4. Die Eigenschaft der Mittellinie im Trapez kann man benutzen, um auf einfache Weise das arithmetische Mittel zweier Zahlen zu bestimmen. Erkläre das Verfahren nach Bild 165 (Nomogramm).

Bild 165.

Streckenteilung

5. Mit Hilfe der vorstehenden Lehrsätze können wir allgemein lösen:

Aufg.: Teile eine gegebene Strecke in n gleiche Teile (Beisp. n = 5).

Lösg.: Bild 166. Ziehe durch den Endpunkt A der gegebenen Strecke $\overline{AB}$ einen beliebigen Strahl und trage darauf von A aus n = 5 gleiche Teile ab. Den letzten Teilpunkt C verbinde mit B und ziehe durch die übrigen zu BC die Parallelen, die $\overline{AB}$ in n = 5 gleiche Teile teilen.

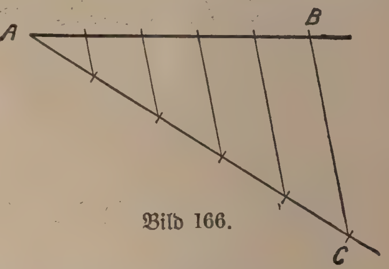


Bild 166.

Bew.: Je drei Parallelen bilden ein Trapez mit Mittelparallele, die jeden Schenkel des Trapezes in zwei gleiche Teile teilt.

6. Eine gegebene Strecke in a) 3, b) 6, c) 7 gleiche Teile zu teilen.

7. Bei Schaubildern braucht man oft die Unterteilung einer Strecke (Streifen, Rechteck). Bild 167 zeigt $\frac{11}{20}\,\overline{AB}$. Erkläre das Bild.

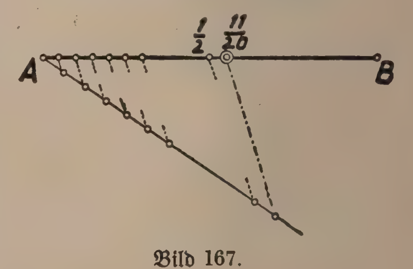


Bild 167.

8. Bestimme nur durch Zeichnung möglichst einfach von einer gegebenen Strecke a) $\frac{3}{5}$, b) $\frac{4}{7}$, c) $\frac{5}{8}$, d) $\frac{9}{11}$.

Streifendarstellung

9. Im Bild 22b ist die deutsche Ein- und Ausfuhr in rechteckigen Streifen

dargestellt. Der rechteckige Streifen hat der einfachen Strecke gegenüber den Vorteil der größeren Anschaulichkeit.

Auch im Bild 168 ist eine Streifendarstellung verwandt worden, die Versailler die Wirtschaftsverluste des Deutschen Reiches infolge des Versailler Diktat Diktats zeigt.

Beschreibe, wie man möglichst einfach die Länge des schwarzen Anteils der einzelnen Streifen durch Zeichnung findet, z. B. 15% von a gleich $\frac{1}{10}a + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{10}\right)$.

10. Zeichne das vorstehende Bild um, wähle dazu als Streifenlänge 11 cm.

Wirtschaftsverluste.

11%	Bevölkerung
13%	Fläche
61%	Blei
80%	Zinkerz
75%	Eisenerz
28%	Steinkohle
15%	Weizen
18%	Roggen
17%	Sommergerste
10%	Hafer
16%	Kartoffeln
15%	Pferde
10%	Rinder
10%	Schweine
90%	Handels=Flotte

Bild 168.

11. Stelle entsprechend Bild 168 die Zusammensetzung einiger Lebensmittel nach Anh. II, 17 dar (Maßstab: a) Streifenlänge 10 cm, b) Streifenlänge 13 cm).

Übungssätze.

12. Verbinde in einem gleichschenkligen Trapez die Mitten der vier Seiten und beweise, daß das neue Viereck eine Raute ist (s. Nr. 3, S. 85 u. Nr. 2a, S. 84).

13. Verbinde die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks der Reihe nach miteinander. Beweise, daß das so entstandene Viereck ein Parallelogramm ist. Anl.: Ziehe die Ecklinien in dem gegebenen Viereck (s. Nr. 3).

Zusammenfassung und Übersicht.

Die Grundgebilde der Geometrie sind Punkte, Geraden und Ebenen.

Zwei Geraden können in der Ebene zwei im Raume drei verschiedene Lagen zueinander haben (s. Bd. I, S. 42).

Für solche parallele Geraden gilt der Grundsatz des Euklid:

Zu einer Geraden gibt es durch einen Punkt nur eine Parallele.

Damit hängt der Satz von der Winkelsumme im Dreieck zusammen:

Die Winkelsumme im Dreieck beträgt stets 180°.

Einteilung der Dreiecke.

a) nach den Seiten in:

gleichseitige gleichschenklige ungleichseitige

b) nach den Winkeln in:

stumpfwinklige rechtwinklige spitzwinklige.

Einteilung der Vierecke.

Allgemeines Viereck
Trapez
Parallelogramm
Raute < > Rechteck
Quadrat.

Neben den Parallelen spielen Symmetrie und Deckungsgleichheit in diesem Teil der Geometrie die Hauptrolle.

Das allgem. Viereck hat kein Paar paralleler Seiten.
Das Trapez hat ein Paar paralleler Seiten.
Das Parallelogramm hat zwei Paar paralleler Seiten.

Die Raute ist ein Parallelogramm mit gleichen Seiten.
Das Rechteck ist ein Parallelogramm mit gleichen Winkeln (rechten).
Das Quadrat ist ein Parallelogramm mit gleichen Seiten und gleichen Winkeln.

Aufbau der Geometrie. Von bestimmten Grundsätzen und Erklärungen ausgehend, werden Lehrsätze (Regeln) aufgestellt und Folgerungen aus ihnen gezogen.

Zu einem Lehrsatz gehört Voraussetzung, Behauptung und Beweis. Die Umkehrung eines mathematischen Lehrsatzes ist dadurch gekennzeichnet, daß Voraussetzung und Behauptung miteinander vertauscht sind.

Daneben spielt die geometrische Aufgabe eine große Rolle. Ihre Art der Behandlung geht schon auf Plato (Anh. I) zurück. Man stellt fest: was ist gegeben, was ist gesucht? Danach entwirft man den Plan zur Lösung, führt die Lösung durch und erbringt den Nachweis ihrer Richtigkeit.

Zuweilen schließen sich Untersuchungen über die Lösbarkeit an. Dieser Teil heißt Grenzbetrachtung.

4. Klasse.

IX. Funktion und Kurve.

Zeichnerische Auflösung von Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten.

28. Abschnitt: Das rechtwinklige Achsenkreuz, der Planzeiger.

1. Bei einem Kriegsspiel ist einem Spähtrupp angegeben worden, daß er sich nach Erledigung seines Auftrages an einer Stelle melden soll, die folgendermaßen bestimmt ist (s. Bild 169): rund 70 Schritte (50 m) nach O von dem in Nord-Südrichtung verlaufenden Waldwege und rund 100 Schritte (70 m) nach N von dem in Ost-Westrichtung verlaufenden Waldwege. (Vgl. Rechts- und Hochwert Bd. I.) **a)** Wo würde dieser Punkt P in der Skizze (Maßstab 1 : 5000) liegen? Wo würde **b)** Punkt Q liegen, wenn bei denselben Maßen nach W und N, **c)** Punkt R liegen, wenn nach W und S, **d)** Punkt T liegen, wenn nach O und S gegangen werden soll? Beschreibe, welche beiden Möglichkeiten der Spähtrupp hat, um nach diesen Angaben zum Punkt P zu gelangen. **Spähtrupp im Walde**

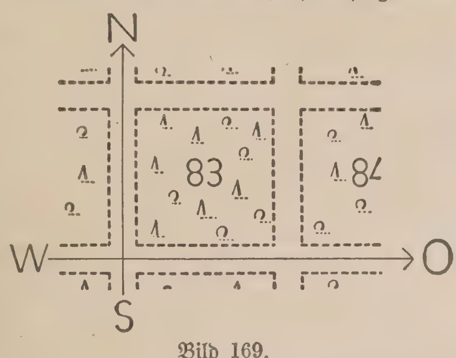


Bild 169.

2. a) In der Zeichenebene ersetzt man die in der Ost-West- und der Nord-Südrichtung verlaufenden Wege durch zwei Zahlengeraden, die x-Achse oder Abszissenachse[1] und die (dazu senkrechte) y-Achse oder Ordinatenachse[2]. Die Ost- und die Nordrichtung (in Bild 169) werden als positiv, die West- und die Südrichtung als negativ festgelegt.

Bei dem obigen Beispiel P (+ 50; + 70) bedeutet diese kurze Schreibweise, daß die Abszisse (der x-Wert) dieses Punktes x = + 50, seine Ordinate (der y-Wert) y = +70 ist.

Diese beiden Angaben nennt man die Standgrößen oder Koordinaten[3] des Punktes. Auf diese Weise wird ein Punkt als Schnitt zweier Parallelen zu den Achsen bestimmt, seine Koordinaten geben die Abstände der Parallelen von diesen an. **Standgrößen**

b) Welche Koordinaten haben die Punkte Q, R und T?

---

[1] lat. linea abscissa = abgeschnittene Linie. [2] lat. linea ordinata = geordnete, aufgerichtete Linie. [3] lat. = Zugeordneten.

3. Die beiden Achsen teilen die Ebene in vier Felder (Quadranten), die man mit I ⋯ IV (Bild 170) beziffert. Bestimme die Vorzeichen der Koordinaten aller Punkte a) im 1., b) im 2., c) im 3., d) im 4. Quadranten.

Beispiel: Bild 170 zeigt
P_1 ($x_1 = +4$; $y_1 = +4$),
P_2 ($x_2 = -4$, $y_2 = +3$),
P_3 ($x_3 = -2$; $y_3 = -3$).
P_4 ($x_4 = +3$; $y_4 = -2$).

Merke: Nach rechts und oben alles plus, nach links und unten alles minus.

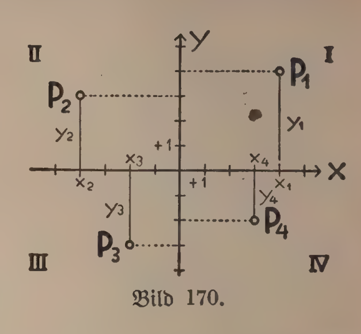


Bild 170.

4. Bestimme zuerst das Feld (den Quadranten), in welchem die folgenden Punkte liegen, dann trage sie in das Achsenkreuz ein:

	A_1	A_2	A_3	A_4	P_1	P_2	P_3	P_4	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
x	+3	−3	−3	+3	−3	+3	0	+1,5	−3	+3	0	+3	−1	+2	−3	+1	+5
y	+4	+4	−4	−4	0	0	+5	−0,5	−2	−2	+3	+1	+7,5	+8	+2	−2	+5

5. Ziehe $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_1}$. Was für eine Figur erhältst du?

6. a) Zeichne die Strecke $\overline{A_1Q_3}$ und bestimme durch Rechnung und Zeichnung die Standgrößen ihres Mittelpunktes (Mittellinie des Trapezes.) b) Desgl. $\overline{A_1R_1}$, c) $\overline{R_3R_5}$, d) $\overline{A_3R_4}$, e) $\overline{A_2P_4}$.

7. Bestimme die Lage der Symmetrieachse für das Dreieck a) $P_1P_2P_3$; b) $Q_1Q_2Q_3$. c) Durch welche Bewegung geht $\triangle P_1P_2P_3$ in $\triangle Q_1Q_2Q_3$ über?

8. Spiegele $\triangle A_2Q_3A_1$ a) an der x-Achse, b) an der y-Achse und bestimme die Koordinaten der neuen Ecken.

Der Planzeiger.

Schachbrett

9. Bild 171 zeigt ein Schachbrett, bei dem die von links nach rechts verlaufenden Streifen durch Ziffern, die dazu senkrechten Streifen durch Buchstaben gekennzeichnet sind. Die weiße Dame steht auf D 1, der schwarze König auf E 8. Bestimme die Stellung a) der schwarzen Springer, b) der weißen Läufer, c) der schwarzen Türme, d) des weißen Königs.

10. Welche Figur steht auf a) D 2, b) F 6, c) E 4, d) C 5, e) A 1?

11. Welche auf a) H 8, b) G 7?

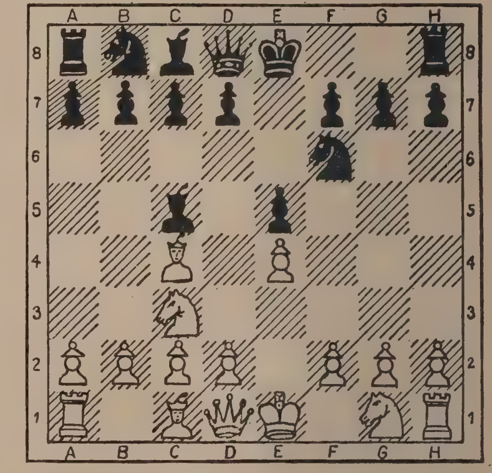


Bild 171.

In ähnlicher Weise, wie die Felder eines Schachbrettes sind Stadt- und Ortspläne mit einem Netz versehen, um das Auffinden bestimmter Straßen und Gebäude zu erleichtern.

12. In welchem Feld liegen auf der beiliegenden Karte I: a) der Bahnhof Bingen, b) Rüdesheim, c) das Nationaldenkmal?

13. Auf Meßtischblättern und Generalstabskarten sind nicht die Felder, sondern die Gitterlinien beziffert, so daß man mit ihrer Hilfe nicht nur die einzelnen Felder festlegen kann, sondern die genaue Lage jedes Punktes der Karte. Man benutzt dazu den Planzeiger. **Planzeiger**
Bilder 172 und 173 zeigen zwei Planzeiger.

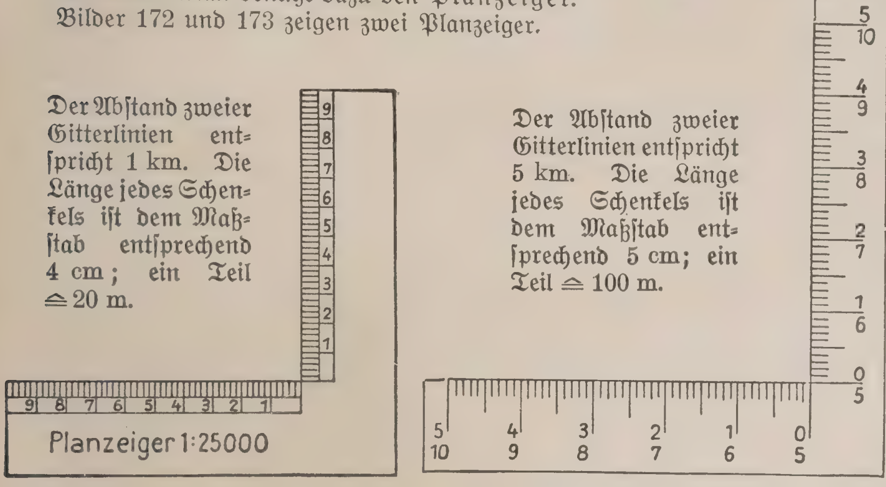


Bild 172.

Bild 173.

Der dem Buche beiliegende Planzeiger stellt eine Vereinigung beider dar. Er enthält außerdem den Planzeiger für 1:50000.

14. Bild 174 zeigt die Benutzung des Planzeigers. Man legt die waagerechte Teilung so an eine waagerechte Gitterlinie, daß die senkrechte Teilung durch den zu bestimmenden Punkt geht. An der ersten wird dann der Rechtswert, an der zweiten der Hochwert unmittelbar abgelesen. Punkt A hat den Rechtswert 4502,3 und den Hochwert 5683,8.

15. Lies in Bild 174 die Gitterzahlen (Koordinaten) der Punkte B, C, D, E, F, G ab.

16. Trage in die Zeichnung die folgenden Punkte ein:

Punkt	H	I	K	L
Rechtswert	4496,8	4499,3	4503,8	4504,5
Hochwert	5684,4	5677,4	5679,5	5681,1

Anmerkung: Während die Landkarten Längen- und Breitenkreise aufweisen, zeigen die Meßtischblätter ein dichteres Netz von Gitterlinien: Hochwerte (den Breiten-

kreisen entsprechend), die den Abstand eines Punktes vom Äquator angeben, und **Rechtswerte** (den Längenkreisen entsprechend), welche die West-Ost-Lage kennzeichnen.

Das Großdeutsche Reich liegt zwischen dem 46. und dem 56. Breitenkreis. Da der 46. Breitenkreis 46 · 111 km ≈ 5 100 000 m, der 56. Breitenkreis 56 · 111 km ≈ 6 200 000 m vom Äquator entfernt ist, liegen alle Hochwerte auf Meßtischblättern des Deutschen Reiches zwischen diesen Zahlen. In westöstlicher Richtung erstreckt sich Großdeutschland ungefähr vom 6. bis 24. Längengrad. Denkt man sich die Erdoberfläche in Meridianstreifen von 3 Grad Breite aufgeteilt, so würde man 120 solcher Streifen erhalten, für das Deutsche Reich demnach 7. Die Mittelmeridiane dieser sieben Streifen weisen folgende Nummern auf: 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24. Als Kennziffer erhält jeder Streifen die durch 3 geteilte Nummer seines Mittelmeridians. Alle Mittelmeridiane bekommen den (willkürlich festgesetzten) Wert 500 000 m. Für Bromberg (18° östl. Länge) ergibt sich also als Rechtswert 6 500 000 (das bedeutet im 6. Meridianstreifen, genau auf dem Mittelmeridian gelegen). Für sämtliche Punkte dieses Streifens ist 500 000 die Ausgangszahl. Liegt ein Ort 18 km östlich von Bromberg, so erhält er den Rechtswert 6 518 000, liegt er dagegen 8 km westlich, so heißt sein Rechtswert 6 492 000.

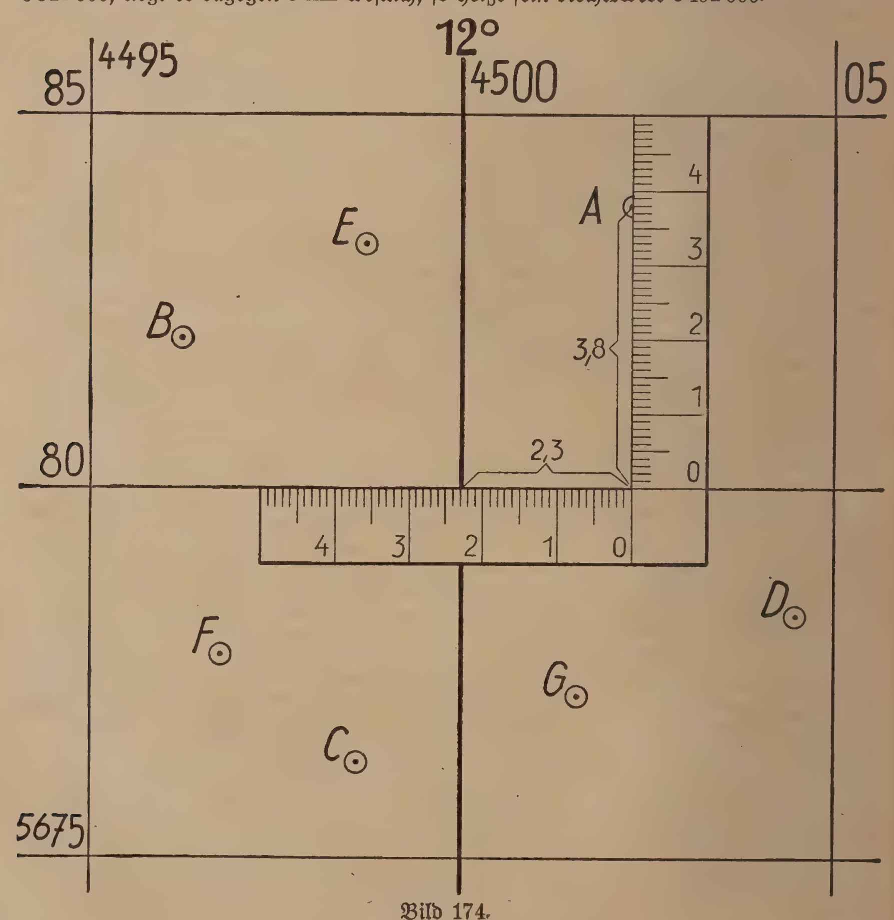


Bild 174.

17. Bestimme nach dem beiliegenden Kartenausschnitt die Gitterzahlen **a)** des Nationaldenkmals, **b)** des Punktes 330,2 im Feld B 5, **c)** der Wegegabel auf dem Osterberg, **d)** des Mäuseturmes. **Grundaufgaben mit Planzeiger**

18. Welche Punkte sind auf dieser Karte bestimmt durch die Gitterzahlen **a)** 3420,7 und 5536,6, **b)** 3422,1 und 5537,8, **c)** 3422,1 und 5536,8 **d)** 3421,1 und 5538,9?

19. Um den Punkt P (3422,3; 5537,0) soll auf der Karte ein quadratisches Schußfeld mit zu den Gitterlinien parallelen Seiten von 600 m Länge gelegt werden. Welche Gitterzahlen haben seine Eckpunkte? (Maßstab!)

20. In welcher Himmelsrichtung liegt das Nationaldenkmal von dem Punkte aus, dessen Rechtswert 3422,2, Hochwert 5539,6 ist? Zeichne den genauen Richtungswinkel gegen die N-S-Linie ein und miß ihn. Welche Marschrichtung (Kompaßzahl) gehört dazu? (vgl. S. 45).

21. Im beiliegenden Luftbild (Bild II) sind die Punkte A, B, C, D, E, F, G, H durch Fliegerbeobachtung als besonders wichtig bezeichnet worden. Für die genaue fernmündliche Weitermeldung und ihre Eintragung in das Meßtischblatt braucht man die Gitternetzzahlen dieser Punkte. **Luftbild**

a) Zeichne auf durchsichtiges Papier das Gitternetz von Bild III (s. Beilage). Bestimme auf ihm durch Durchstechen die Lage von zwei auffälligen Punkten auf der Karte (z. B. der scharfen Straßenecken A′ und B′, Bild III) und lege es so auf das Luftbild (Bild II), daß A′ auf A und B′ auf B fällt. Dadurch ist das Pauspapier mit seinem Gitternetz auf das Luftbild ausgerichtet.

b) Bei dem angegebenen Maßstab 1 : 5000 bedeutet 1 mm auf der Karte 5 m in der Natur. Der Punkt C ist von der Rechtswertlinie 2200 nach rechts 31 mm und von der Hochwertlinie 1600 nach oben 13 mm entfernt. Er hat also den Rechtswert $2200 + 31 \cdot 5 = 2200 + 155 = 2355$ und den Hochwert $1600 + 13 \cdot 5 = 1600 + 65 = 1665$.

Welche Punkte sind durch die Standgrößen

c) $R = 2232$, $H = 1628$; **d)** $R = 2197$, $H = 1583$ bestimmt?

29. Abschnitt: Die Kurve als Schaubild, der Funktionsbegriff.

1. Auf dem Brocken hat man am 13. Mai von 0 bis 24 Uhr alle 2 Std. folgende Temperaturen gemessen:

Zeit (Uhr)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Grad in C	3	0	−4	−2	+1	7	10	16	15	11	6	5	4,5

a) In Bild 175a und b sind die Temperaturangaben dieser Tabelle durch Strecken dargestellt. Im Bild 175a sind ihre Endpunkte geradlinig verbunden; im Bild 175b ist freihändig durch die Endpunkte eine krumme Linie, die Temperaturkurve, hindurchgelegt. In beiden Darstellungen kommt es nicht auf Strecken selbst, sondern nur auf ihre Endpunkte und deren Lage im „Koordinatensystem“ an. **Temperaturkurve gebrochen, gekrümmt**

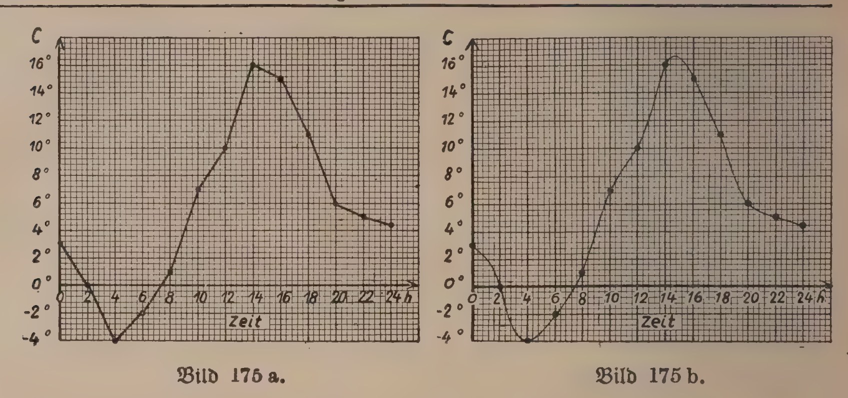


Bild 175 a. Bild 175 b.

b) Zeichne beide Bilder in einem größeren Maßstabe auf Gitterpapier um (2 Std. ≙ 1 cm, $1^0 \triangleq \frac{1}{2}$ cm). Lies aus jeder der beiden neuen Zeichnungen die Temperatur ab, die um 1 Uhr, 3 Uhr usw., 23 Uhr herrschte. Stelle eine entsprechende Tabelle auf. Welche der beiden „Kurven" kommt dem wirklichen Temperaturverlauf näher? Begründe es! Welchen Vorteil hat die Kurvendarstellung gegenüber der Darstellung durch Strecken?

c) Wie stellt man den Temperaturverlauf eines Kranken dar?

2. a) Im Bild 176 ist jedesmal die Stückzahl der im Verlaufe eines Jahres fertiggestellten Kraftwagen durch Strecken dargestellt.

Streckendarstellung

b) Im Bild 177 ist der Lastwagenbestand in 1000 von 1926 · · · 1937 für Deutschland und Großbritannien dargestellt. Der Kurvenverlauf gibt die Änderung des Bestandes im Verlauf der einzelnen Jahre an.

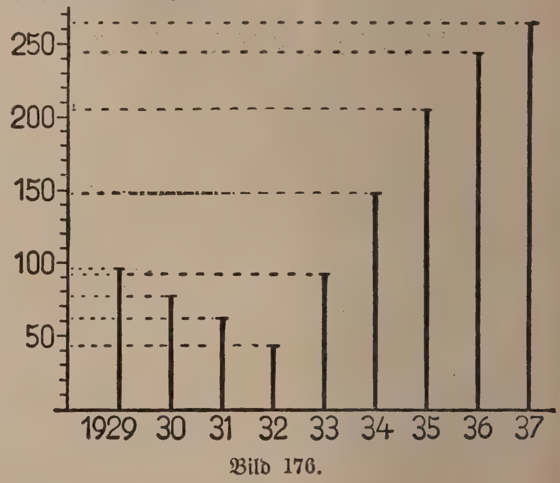


Bild 176.

Der Funktionsbegriff.

3. a) In den Bildern 175 · · · 177 zeigen die dargestellten Größen eine bestimmte Zuordnung zueinander. Zu einer bestimmten Zeitangabe gehört eine bestimmte Temperatur oder ein bestimmter Kraftwagenbestand

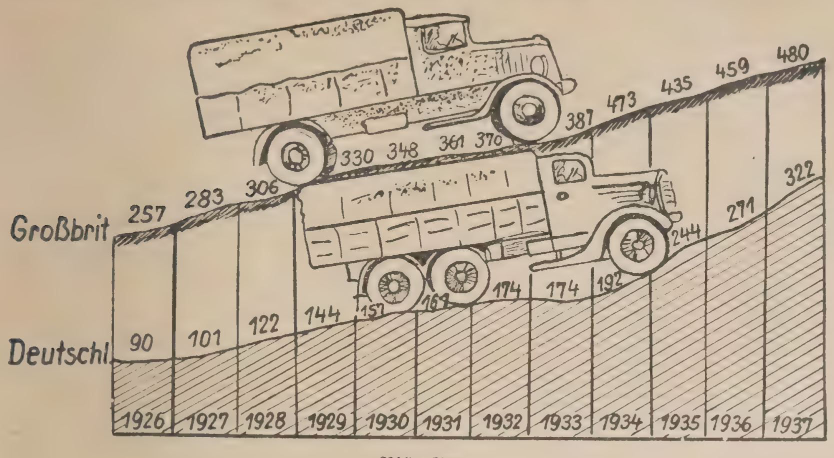


Bild 177.

Die Temperatur bzw. der Kraftwagenbestand ist also von der Zeit abhängig, sie sind Funktionen der Zeit. (S. 67.)

Funktion und Kurve

Die Kurve bezeichnet man als das Bild der Funktion.
b) Da der Luftdruck sich mit der Höhe, die Jahresdurchschnitts-Temperatur mit der geographischen Breite, der Wasserverbrauch einer Stadt mit der Bevölkerungszahl ändert[1], ist der Luftdruck eine Funktion der Höhe, die (Durchschnitts-) Temperatur eines Ortes eine Funktion der geographischen Breite, der Wasserverbrauch einer Stadt eine Funktion der Bevölkerungszahl.

Arten der Zuordnung

4. Die einfachste Art der Zuordnung ist die Zahlentabelle, die anschaulichste die zeichnerische Darstellung. Es ergeben sich zwei Arten von Aufgaben: a) eine Zahlentabelle durch Zeichnung zu veranschaulichen, b) aus einer Zeichnung Zahlenwerte zu entnehmen.

5. In der Technik werden Formen von Maschinen- oder Konstruktionsteilen oft in Standgrößen gegeben; danach ist dann der betreffende Teil zu zeichnen und herzustellen.

Göttinger Profil

Beispiel: Die in der Zahlentafel dargestellten Werte sind die Standgrößen eines in Göttingen untersuchten Tragflügelprofiles. Zu jedem x-Wert gehören zwei y-Werte, y_o auf der Profiloberseite, y_u auf der Profilunterseite. (Bild 178.)

Die Standgrößen sind in Prozenten der Flügeltiefe ausgedrückt, wobei die Tiefe $t = 100$ gesetzt ist (Maße in mm).

Gö. 382	x	0	2,5	5,0	7,5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
	y_o	5,7	11,4	13,8	15,4	16,7	18,6	19,8	20,7	20,0	18,1	15,2	12,0	8,3	4,3	2,2	0,0
	y_u	5,7	3,6	2,9	2,5	2,1	1,5	1,1	0,5	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

[1] Unter sonst gleichen Umständen.

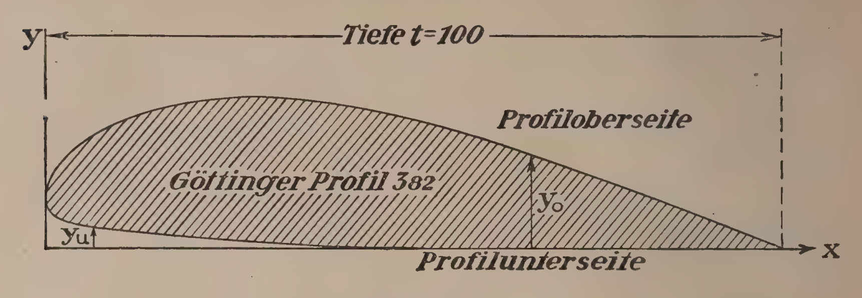


Bild 178.

Vorbem.: Bei den folgenden Aufgaben zur Kurvendarstellung soll sich die erste Zahlenreihe auf die x-Achse, die zweite (und dritte) auf die y-Achse beziehen.

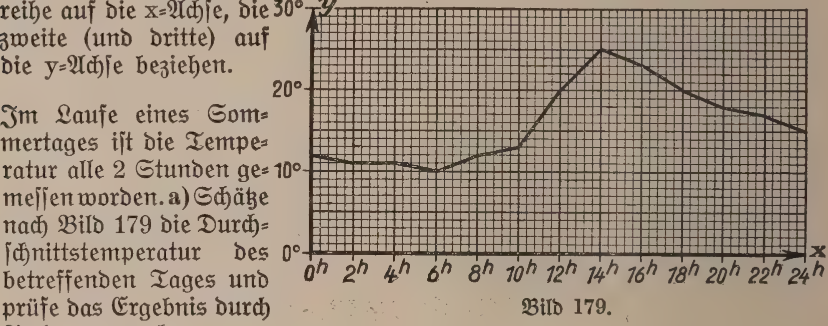


Bild 179.

Mittelwerte aus Zeichnung

6. Im Laufe eines Sommertages ist die Temperatur alle 2 Stunden gemessen worden. a) Schätze nach Bild 179 die Durchschnittstemperatur des betreffenden Tages und prüfe das Ergebnis durch Rechnung nach.

b) Bild 180 zeigt dasselbe für einen Wintertag. Lies auch hier ab und rechne nach. c) Wie kann man die Durchschnittstemperatur in jedem Bilde veranschaulichen?

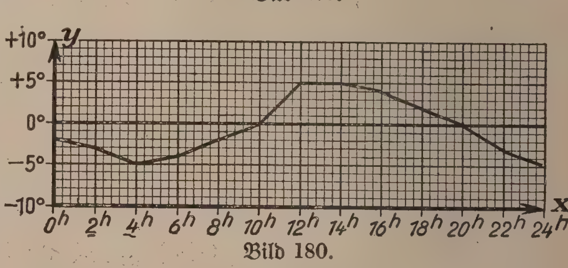


Bild 180.

Stratosphärenflug

7. Beim Stratosphärenflug 1935 wurden folgende Temperaturen gemessen:

Beim Abflug	in Höhe von: 5000 m	10000 m	21000 m	18000 m	12000 m	7000 m	1000 m	bei der Landung
+18° C	−19° C	−31° C	−60° C	−42° C	−30° C	−18° C	+5° C	+15° C
Aufstieg				Abstieg				

Stelle die Temperaturkurve für Auf- und Abstieg im gleichen Achsenkreuz (bunt) dar. (Maßstab 1000 m $\widehat{=} \frac{1}{2}$ cm, $1^0 \widehat{=} 1$ mm.)

8.

Stichtag	1932	1933
1. 1.	5,7	5,7
1. 2.	6,0	6,0
1. 3.	6,1	6,0
1. 4.	6,0	5,6
1. 5.	5,7	5,3
1. 6.	5,6	5,0
1. 7.	5,5	4,9
1. 8.	5,4	4,5
1. 9.	5,2	4,1
1. 10.	5,1	3,8
1. 11.	5,1	3,7
1. 12.	5,4	3,7

a) Die nebenstehende Zusammenstellung zeigt die Zahl der Arbeitslosen vom 1. 1. 1932 bis 1. 12. 1933 in Millionen. Im Bild 181a sind die Zahlen für 1933 als Kurve dargestellt. **Erfolg der Arbeitsschlacht**

b) Die beiden Kurven für 1932 und 1933 sind in dasselbe Achsenkreuz eingezeichnet (Bild 181b). Was veranschaulicht die gestrichelte Fläche?

Veranschauliche durch eine Kurve die Arbeitslosigkeit (Anh. II, 11) in

9. Deutschland, **10.** England,
11. Frankreich, **12.** USA.
(Maßstab 1 Jahr ≙ 2 cm, 1 Mill. ≙ 1 cm)

13. a) Berechne aus Anh. II, 11 für die Jahre 1931 ··· 1938 für Deutschland, England, Vereinigte Staaten von Nordamerika und Frankreich die jährlichen Mittelwerte der Zahlen der Arbeitslosen und stelle sie in einer Tabelle zusammen. b) Stelle die vier Kurven dazu im gleichen Achsenkreuz dar[1]. (Maßstab s. Nr. 9 ··· 12.)

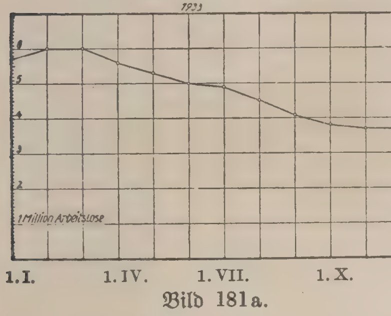


Bild 181a.

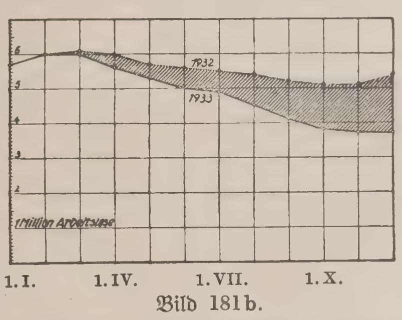


Bild 181b.

14. Stelle in einem Schaubilde (Kurve) die Zahl der Rundfunkteilnehmer dar a) insgesamt, b) der Arbeiter und Angestellten (Anh. II, 14, Maßstab: 1 Jahr ≙ 2 cm, 1 Mill. ≙ 1 cm). c) Bestimme, auf wieviel Einwohner im Deutschen Reich für das Jahr 1938 ein Rundfunkapparat kam. **Rundfunkdichte**

In Aufg. Nr. 15 ··· 17 wähle Strecken- oder Kurvendarstellung und veranschauliche (1 Jahr ≙ 1 cm) die Zahlen der Tabelle:

15. Anh. II, 6 (Spareinlagen) (Maßstab: 1 Mrd. RM ≙ 1 cm).

16. Anh. II, 5 (Wiederaufbau) (Maßstab nach freier Wahl) a) bis h).

17. Anh. II, 7 (Landwirtschaft) (Maßstab: 1 Mrd. RM ≙ 1 cm) a) bis d).

18. Anh. II, 9 (Kraftfahrzeugbestand) (Maßstab: 100 000 Stück ≙ 5 mm). (Zeichne die drei Kurven für a ··· c in ein Achsenkreuz, addiere zeichnerisch und stelle den Gesamtbestand im gleichen Achsenkreuz dar.)

[1] Beachte den Ausspruch des englischen Staatsmannes Baldwin, daß die (westlichen) Demokratien immer zwei Jahre hinter den „autoritären" Staaten herhinken!

19. Veranschauliche wie in Bild 182 die folgenden Temperaturangaben durch eine Fieberkurve. Wähle auf der y-Achse 35° als Anfangspunkt; 1 Tag ≙ 12 mm, 1° ≙ 1 cm.

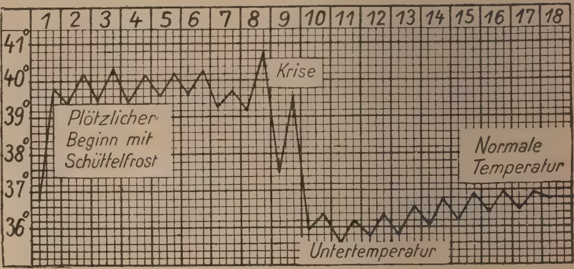


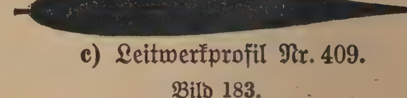
Bild 182.

Krankheitstag		1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Zeit	6^h	38,2	39,0	38,9	38,6	38,1	37,6	37,5	37,2
	12^h	38,6	39,1	38,5	39,2	38,2	37,4	37,4	37,1
	18^h	39,1	39,5	39,4	39,6	38,3	38,0	37,9	37,8

20. Für die Luftfahrt ist die Kenntnis der Abnahme der Lufttemperatur und des Luftdrucks mit der Höhe wichtig. Stelle nach Anh. II als Funktion der Höhe dar
a) die mittlere Lufttemperatur Maßstab: 1 km ≙ $\frac{1}{2}$ cm; 5° ≙ 1 cm. b) die Abnahme des Luftdrucks Maßstab: 100 mm Quecksilbersäule ≙ 1 cm,
c) das Luftgewicht (wähle den Maßstab selbst).

a) Profil Nr. 704.

b) Profil Nr. 570.



c) Leitwerkprofil Nr. 409.

Bild 183.

Tragflügelprofile **21.** a) bis c) Bild 183 zeigt in Göttingen untersuchte Flügelprofile. Zeichne sie nach Nr. 5 (Beispiel) vergrößert um. Die Standgrößen entnimm Anh. II, 16.

Höhe km
6
5
4
3
2
1
0
10 20 30 40 50 60 70 80
min

Bild 184.

Steigen eines Flugzeugs

22. Bild 184 zeigt das Steigen eines Junkersflugzeugs Ju 52. Stelle die Zahlentafel für je 5 Min. Steigzeit auf.

23. Steigdauer eines Jagdeinsitzers. (Polen PZL-24). Fertige nach Bild 184 eine Zeichnung an.

Höhe in m	1000	2000	3000	4000	5000	6000
Zeit in Min.	1,5	2,8	4,0	5,0	6,4	8,0

Betonerhärtung

24. Beim Bau der Brücken der Reichsautobahnen wird überwiegend Beton verwandt. Die Schnelligkeit des Erhärtens des Betons hängt von der Witterung ab. Eine technische Zeitschrift veröffentlichte als Ergebnisse zahlreicher Versuche nebenstehendes Bild. Es zeigt die wachsende Festigkeit für den 3., 7. usw. bis zum 28. Tag, und zwar für drei verschiedene Durchschnittstemperaturen: -3^0; $+1{,}5^0$; $+22^0$.

Zeichne in demselben Achsenkreuz für jede der drei Temperaturen eine Kurve. Trage auf der x-Achse die Zahlen der Tage (1 Tag $\triangleq \frac{1}{2}$ cm) und auf der y-Achse die Festigkeitszahl (1 kg $\triangleq$ 1 mm) ab.

Bild 185.

Barographen

25. Barographen[1]) zeichnen den Luftdruck auf. Da der Luftdruck eine Funktion der Höhe ist, können mit dem Barographen Höhenmessungen vorgenommen werden. Bild 186 stellt eine solche vereinfachte und auf rechtwinklige Koordinaten übertragene Barographenkurve (Barogramm) eines Reiseflugzeuges dar. Beachte die doppelte Zahlenleiter an der y-Achse. In der Technik werden solche Doppelleitern vielfach benutzt.

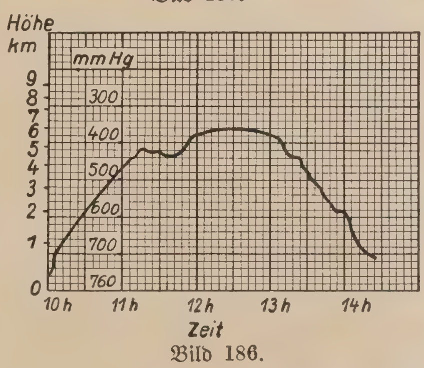


Bild 186.

a) Ermittle mit Hilfe des Barogramms, wann das Flugzeug aufstieg. b) Wann erreichte es die größte Höhe? c) Wann landete es? d) Welches war die größte erreichte Höhe?

[1]) Dem Sinne nach übersetzt würde dies Luftdruckaufschreiber bedeuten.

30. Abschnitt: Die lineare Funktion und die Gleichung 1. Grades.

A. Die lineare Funktion und ihre Nullstelle.

Vorbemerkung: Außer den in Abschnitt 29 aus der Erfahrung gegebenen (empirischen) Funktionen können die beiden veränderlichen Größen x und y auch durch bestimmte Rechenvorschriften aneinander geknüpft sein. Man nennt derartige Funktionen mathematische Funktionen und schreibt $y = f(x)$.

Beispiele: Der Weg s ist eine Funktion der Zeit t, also $s = f(t)$. Der Preis y einer Ware ist eine Funktion der Warenmenge x, demnach $y = f(x)$. Ebenso lassen sich die meisten physikalischen Gesetze (Hebelgesetz) als Funktionen deuten.

Funktion, Tabelle und Kurve

1. a) Gegeben sei die Funktionsgleichung[1] $y = \frac{1}{2}x$; setze für x Werte von -3 bis $+3$ ein, berechne die zugehörigen Werte von y und vervollständige folgende Tabelle:

x	-3	-2	-1	$0 \ldots +3$
y	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	$0 \ldots +1{,}5$

b) Trage die zusammengehörigen x- und y-Werte als Standgrößen der Punkte (P_1, $P_2 \ldots$) in ein rechtwinkliges Achsenkreuz ein und verbinde die Punkte geradlinig miteinander (vgl. Bild 187).

Die Gesamtheit der Punkte, deren Standgrößen (Koordinaten) der Funktionsgleichung genügen, bildet die Kurve.

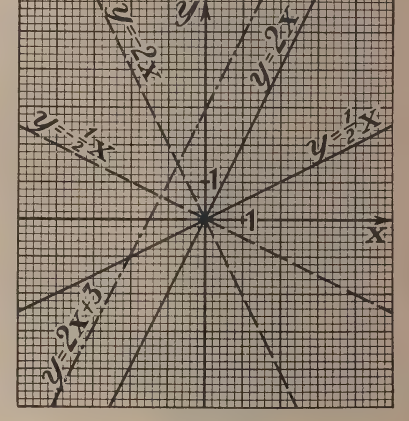


Bild 187.

2. Stelle für die folgenden Funktionen die Tabellen auf und zeichne die zugehörigen Kurven.

a) $y = 2x$ b) $y = -2x$
c) $y = -\frac{1}{2}x$ d) $y = 2x + 3$ } (vgl. Bild 187).
e) Was für Linien erhält man?

Zeichne die sieben Kurven von Nr. 3 in ein Achsenkreuz. Verfahre ebenso mit Nr. 4 ⋯ 6.

3. a) $y = 3x$ b) $y = 3x + 1$ c) $y = 3x + 2$ d) $y = 3x + 3$
e) $y = 3x - 1$ f) $y = 3x - 2$ g) $y = 3x - 3$

4. a) $y = \frac{1}{3}x$ b) $y = \frac{1}{3}x + 1$ c) $y = \frac{1}{3}x + 2$ d) $y = \frac{1}{3}x + 3$
e) $y = \frac{1}{3}x - 1$ f) $y = \frac{1}{3}x - 2$ g) $y = \frac{1}{3}x - 3$

5. a) $y = -3x$ b) $y = -3x + 1$ c) $y = -3x + 2$ d) $y = -3x + 3$
e) $y = -3x - 1$ f) $y = -3x - 2$ g) $y = -3x - 3$

6. a) $y = -\frac{1}{3}x$ b) $y = -\frac{1}{3}x + 1$ c) $y = -\frac{1}{3}x + 2$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 3$
e) $y = -\frac{1}{3}x - 1$ f) $y = -\frac{1}{3}x - 2$ g) $y = -\frac{1}{3}x - 3$

---

[1] Statt Funktionsgleichung sagt man oft kurz „Funktion".

7. a) Zeichne ebenso in ein Achsenkreuz die Kurven 3a⋯6a. Welche gemeinsame Eigenschaft haben diese Kurven? b) Stelle eine Wertetafel des Anstiegs m und des zugehörigen Anstiegswinkels α auf (S. 45, Nr. 17). **Anstieg**

8. Zeichne und untersuche ebenso die Kurven 3b⋯6b. **9.** Desgl. 3c⋯6c.
10. Desgl. 3d⋯6d. **11.** Desgl. 3e⋯6e. **12.** Desgl. 3f⋯6f. **13.** Desgl. 3g⋯6g.

14. Die Funktionsgleichungen in Nr. 3⋯6 haben die Form $y = mx + b$. Es ergibt sich:

Die Gleichung $y = mx + b$ stellt eine Gerade dar (hat als Bild eine gerade Linie). Die Vorzahl m bestimmt die Richtung, den Anstieg der Geraden gegen die x-Achse. Sie heißt daher Richtungsgröße und $\sphericalangle \alpha$, den die Gerade mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, Anstiegswinkel. **Zusammenfassung**

15. a) Welches Vorzeichen hat m, wenn $\alpha < 90^0$ und welches, wenn $\alpha > 90^0$ (aber $\alpha < 180^0$) ist? b) Die Zahl b bestimmt den Abschnitt der Geraden auf der y-Achse. Wo liegt er, wenn $b > 0$ bzw. $b < 0$ ist? **Drehung, Parallelverschiebung**

In $y = mx + q$ bewirkt eine Änderung von m bei festem b eine Drehung, eine Änderung von b bei festem m eine Parallelverschiebung.

16. Stelle die Funktionsgleichung der Geraden auf, die durch den Nullpunkt geht und die Richtungsgröße $\frac{3}{5}$ hat.

17. a) Löse die Gleichung $3x + 2y = 4$ nach y auf und bestimme m und b.

Erkl.: **Jede Funktion, in der die Veränderlichen nur in der 1. Potenz vorkommen, heißt eine Funktion 1. Grades. Sie läßt sich auf die Form $y = mx + b$ bringen, deren Kurvenbild eine gerade Linie ist. Daher nennt man die Funktion 1. Grades auch lineare Funktion.**

Zur Zeichnung genügt die Bestimmung von zwei Punkten.

18. a) Zeichne das Bild der Funktion $y = \frac{1}{2}x - 3$. b) Bestimme daraus den Wert y_1 des Punktes P_1 für $x_1 = 4$. c) Untersuche, ob der Punkt P_2 mit den Standgrößen $x_2 = 8$, $y_2 = 1$ auf der Geraden liegt. d) Desgl. der Punkt P_3 ($x_3 = -4$; $y_3 = -7$).

Nur diejenigen Punkte liegen auf der Geraden, deren Standgrößen die Funktionsgleichung erfüllen.

19. Setze in $y = 2x + 3$ den Wert $y_0 = 0$ ein. Wie groß ist das zugehörige x_0? **Nullstelle** Man nennt x_0 die Nullstelle der Funktion. Die Kurve schneidet dort die x-Achse (Bild 187). Allgemein gilt:

Erkl.: **Unter der Nullstelle einer linearen Funktion versteht man den Wert x_0, für den $y_0 = 0$ ist.**

20. Gegeben ist die Funktion $y = 2x - 4$. Bestimme ihre Nullstelle x_0.

B. Die zeichnerische Lösung der Gleichung 1. Grades.

21. a) Löse die Gleichung $\frac{1}{2}x - 3 = 0$.
b) Bestimme die Nullstelle der Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$ (Bild 188).
c) Vergleiche die beiden gefundenen Werte und begründe die zeichnerische Lösung.

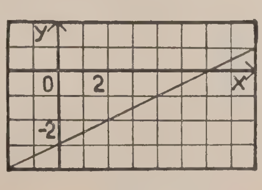


Bild 188.

22. Die Bestimmungsgleichung mit der Unbekannten x ist dabei in eine Funktionsgleichung mit den Veränderlichen x und y umgewandelt. Umgekehrt geht die Funktionsgleichung $y = \frac{1}{2}x - 3$ für $y = 0$ in die Bestimmungsgleichung $\frac{1}{2}x - 3 = 0$ über.

Beachte: In einer Funktionsgleichung sind x und y Veränderliche, in einer Bestimmungsgleichung ist x die Unbekannte.

Genauigkeit

23. In Fällen, in denen nicht runde Werte abgelesen werden können, kann die Genauigkeit der Zeichnung (außer durch saubere Ausführung) dadurch erhöht werden, daß man den Bereich, in dem der Schnittpunkt mit der x-Achse liegt, noch einmal in vergrößertem Maßstab zeichnet. Beispiel: Die Gleichung $7x - 75 = 0$ führt auf die Gerade $y = 7x - 75$, die die x-Achse zwischen 10 und 11 schneidet. Wählt man 1 cm als Einheit auf der x-Achse (nicht wie ursprünglich 1 mm), so zeigt Bild 189, daß für $x_1 = 10$, $y_1 = -5$ und für $x_2 = 11$, $y_2 = +2$ wird und P_1P_2 die x-Achse bei $x = 10{,}7$ schneidet. Das ist der genauere Wert.

Bild 189.

24. Bei der zeichnerischen Lösung handelt es sich meist darum, die Gerade, die durch die Funktionsgleichung bestimmt ist, auf möglichst einfachem Wege schnell zu erhalten.

Beispiele:

a) $3(x - 4) + 1 = 2(1 - x) + 2$
$y = 2(1 - x) - 3(x - 4) + 1$
Es ist für:
$x_1 = 0;\ y_1 = 2 + 12 + 1 = 15$
$x_2 = +4;\ y_2 = 2 \cdot (-3) + 1 = -5$
Die Gerade ist bestimmt durch die Punkte $P_1(0;\ 15)$ und $P_2(4;\ -5)$.

b) $\frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x + \frac{7}{12}x - 3 = 0$
$y = \frac{5}{6}x - \frac{2}{3}x + \frac{7}{12}x - 3$
Es ist für:
$x_1 = 0;\ y_1 = -3$
$x_2 = 6;\ y_2 = 5 - 4 + \frac{7}{2} - 3 = \frac{3}{2}$
Die Gerade ist bestimmt durch die Punkte $P_1(0;\ -3)$ und $P_2(6;\ \frac{3}{2})$.

Löse die folgenden Gleichungen zeichnerisch:

25. a) $23x - 7 = 28 - 47x$ b) $14x - 50 = 5x + 4$
c) $19x + 17 = 111 - 28x$ d) $5x - 5 = 7x - 8$
e) $14 - (3 - x) = 10$ f) $x - (2x + 1) = -5$
g) $4x - 16 = 2x + 6$ h) $(x - 6) - (4x + 3) = 0$
i) $(7 - x) - (x - 7) = 2$ k) $(10 - x) + (2x - 10) = -x$
l) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = \frac{1}{2}$ m) $\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}x = \frac{5}{3}$
n) $\frac{x-2}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{5}{12}$ o) $\frac{x+1}{4} - \frac{1-x}{5} = \frac{23}{10}$.

26. Setze in $y = mx + b$ für m und b die folgenden Wertepaare ein, zeichne die zugehörigen Geraden und ermittle auch stets die Nullstelle. Achte bei aufeinanderfolgenden Geraden dieser Tabelle darauf, ob Symmetrie (zur x- oder y-Achse) oder Parallelität vorliegt.

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	k)
m	0,4	—0,4	0,4	0,6	—0,6	$\frac{5}{3}$	2	2	—2	—2
b	0	0	+1	0	+2	—2	+6	—6	+6	—6

	l)	m)	n)	o)	p)	q)	r)	s)	t)	u)
m	0,5	—0,5	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{4}$	$+\frac{4}{3}$	3	5	—7	—0,7
b	+1	—1	+1	+8	+8	—8	—4	$+2\frac{1}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	+4

Anmerkung: Wir haben schon beim „Preisstrahl" und beim „Zinsstrahl" (Bd. I) derartige graphische Darstellungen benutzt.

C. Der graphische Fahrplan.

27. a) Ein Auto hat die Geschwindigkeit 50 km/std. Stelle durch eine Zeichnung fest, welche Wege das Auto in 2 Std. (4; $5\frac{1}{2}$; 3,8 Std.) zurücklegt. (Maßstab: 50 km ≙ 1 cm; 1 Std. ≙ 2 cm.)

Anleitung: Trage die Zeit auf der waagerechten Achse, den Weg auf der senkrechten Achse ab.

b) Löse die gleiche Aufgabe für die Geschwindigkeit 100 km/std.

c) Vergleiche den Anstieg der beiden Weg-Zeit-Geraden.

d) Welche Beziehung besteht zwischen dem Weg s, der Zeit t und der Geschwindigkeit v? (Vgl. S. 2, Nr. 7⋯9).

28. Lies aus Bild 190 bei t = 1 die Größe von v_1, v_2, v_3 ab.

29. Zeichne für verschiedene Bewegungen nach der folgenden Zusammenstellung die „Weg-Zeit-Kurven" s = v · t, und lies aus ihnen, soweit möglich, den in a) $2\frac{1}{2}$, b) 3,7, c) 5,1 Min. zurückgelegten Weg ab.

Rechne erst in km/min um. (Maßstab: 1 Min. ≙ 1 cm, 1 km ≙ 1 cm.)

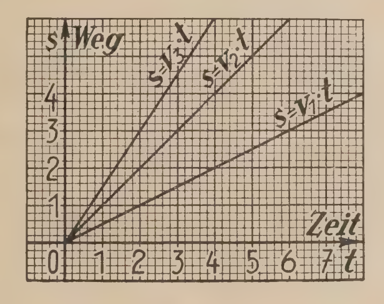


Bild 190.

	Radfahrer	Zugmaschine	Personenzug	Auto	D-Zug	FD-Zug	Kleinflugzeug	Ju 52	Jagdeinsitzer
v km/std	15	30	45	60	90	120	150	180	450

30. a) Zeichne die Weg-Zeit-Kurve für ein Auto, das auf der Reichsautobahn Stettin—Berlin (150 km) mit der Durchschnittsgeschwindigkeit 60 km/std und anschließend nach Leipzig (175 km) mit der Durchschnittsgeschwindigkeit 50 km/std fährt. (Maßstab: 1 Std. ≙ 1 cm, 10 km ≙ 2 mm.) b) Vergrößere die Zeichnung, wähle einen anderen Maßstab. c) Fertige die Zeichnung von a) oder b) noch einmal an für den Fall, daß der Wagen in Berlin 1 Std. Aufenthalt hat.

Graphischer Fahrplan

31. Die Weg-Zeit-Gerade wird beim graphischen Fahrplan der Eisenbahn, der nur für den inneren Dienstbetrieb bestimmt ist, benutzt.

Bild 191 stellt die Fahrt des Personenzuges Nr. 851 von Hamburg nach Kiel und die des Gegenzuges Nr. E 32 von Kiel nach Hamburg dar. a) Beschreibe für Zug Nr. 851 die Anordnung und vergleiche das Bild mit dem gedruckten Fahrplan. b) Wo liegen Haltepunkte und wo findet ein längerer Aufenthalt statt? c) Wo ist für Zug Nr. 851 die Geschwindigkeit am geringsten? d) Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit für die Strecke Hamburg—Altona und die Strecke Neumünster—Kiel. e) bis h) Beantworte die gleichen Fragen für Zug Nr. E 32. i) In welcher Entfernung von Hamburg begegnen sich beide Züge? k) Um wieviel Uhr treffen sie sich?

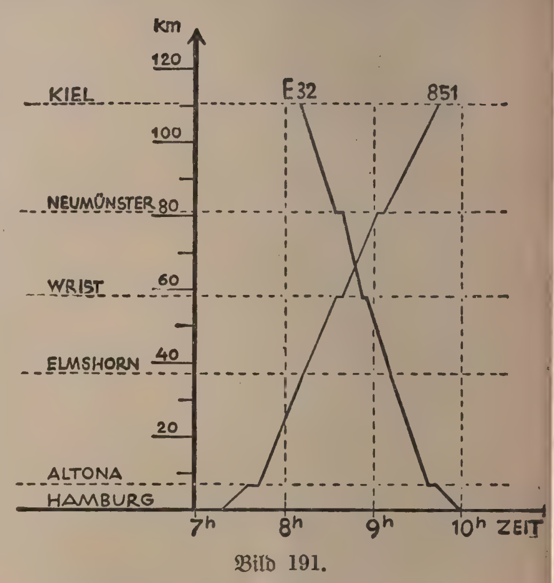


Bild 191.

Ausschnitt aus dem Fahrplan Hamburg—Kiel und Kiel—Hamburg

D 91	851	D 133	117	E 35	km				D 30	E 32	FD 13	E 34	E 63
6^{43}	7^{17}	8^{30}	9^{40}	│	0	ab	Hamburg	an	7^{51}	9^{59}	9^{45}	│	│
7^{00}	7^{35}	8^{44}	9^{57}	│	7	an	Altona	ab	7^{38}	9^{42}	9^{32}	│	│
7^{13}	7^{40}	8^{54}	10^{10}	11^{39}		ab	Altona	an	7^{33}	9^{37}	9^{29}	11^{07}	12^{29}
│	8^{11}	9^{17}	10^{32}	12^{01}	37		Elmshorn		7^{07}	9^{12}	│	10^{12}	12^{04}
7^{52}	8^{35}	9^{35}	10^{49}	12^{18}	58	an	Wrist	ab	│	8^{55}	│	10^{25}	11^{47}
7^{53}	8^{36}	9^{36}	10^{50}	12^{19}		ab	Wrist	an	│	8^{54}	│	10^{24}	11^{46}
8^{11}	9^{01}	9^{55}	11^{08}	12^{37}	81	an	Neumünster	ab	6^{34}	8^{37}	8^{50}	10^{07}	11^{29}
8^{14}	9^{06}	10^{00}	11^{13}	12^{41}		ab	Neumünster	an	6^{23}	8^{34}	8^{49}	10^{00}	11^{26}
8^{34}	9^{43}	10^{24}	11^{38}	13^{06}	111	an	Kiel	ab	6^{00}	8^{10}	8^{30}	9^{36}	11^{02}

32. In Bild 192 sind Züge, die in der Zeit von 6 Uhr bis 12 Uhr zwischen Hamburg und Kiel und umgekehrt verkehren, eingezeichnet[1]. a) Wieviel Züge fahren in diesem Zeitraum von Hamburg, b) von Altona, c) von Kiel ab? d) Lies aus dem Bild ab, welcher Zug schneller fährt: D 91

[1] Ohne die Güterzüge. Sie belasten den Eisenbahnverkehr sehr stark und verkehren überwiegend nachts. 1938 wurden 80% aller Güter durch die Eisenbahn, 18% auf dem Wasserwege, 2% durch Kraftwagen befördert.

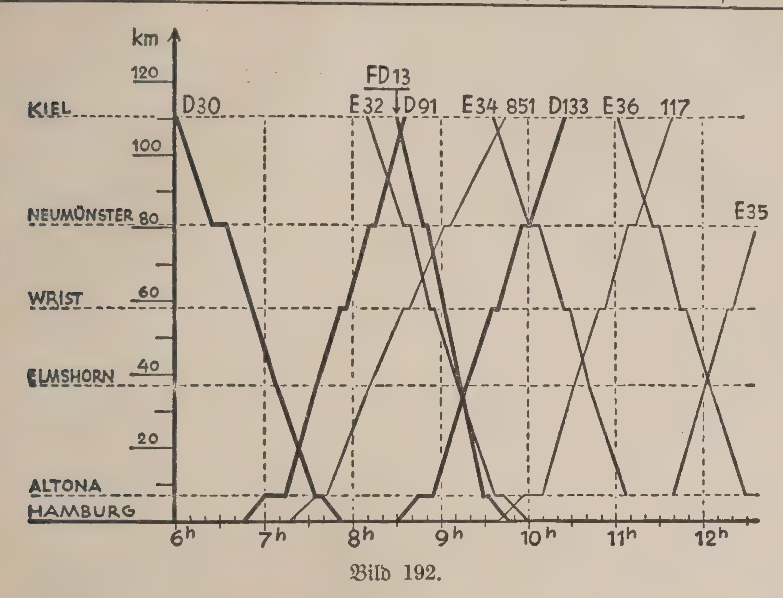


Bild 192.

oder Nr. 851. e) Wo kreuzt D 91 den Zug E 32 (D 30)? f) Welcher Zug kreuzt E 36? g) An welchen Haltepunkten treffen sich zwei Züge? h) Bei welcher Kilometerzahl kreuzt E 34 die Züge D 133 und 117? i) Auf welcher Haltestelle muß E 32 unbedingt warten, bis FD 13 vorüber ist? k) Welcher Fahrplan ist für den Eisenbahnbeamten übersichtlicher, der gedruckte oder der gezeichnete?

33. Stelle nach Bd. I, Seite 88, einen graphischen Fahrplan für die Strecke Nürnberg—München her.

34. Stelle für drei Züge deines Schulortes und für ihre Gegenzüge einen graphischen Fahrplan auf. (Streckenlänge 100 km, Maßstab beliebig.)

31. Abschnitt: Zusammenfassung und Abschluß der Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten.

A. Angesetzte Gleichungen.

Vorbem.: Wiederhole die Zusammenfassung auf S. 43.

1. a) $(x+5)^2 = (x-1)(x+15)$ **b)** $(x+20)^2 = (x+14)(x+30)$
c) $(6x+3)^2 = (4x+1)(9x+7)$ **d)** $(18x+33)^2 = (27x+52)(12x+21$
e) $(4x+1)(15x+24) = (6x+10)(10x-1)$
f) $x^2 = (4x-5)^2 - 5(x-1)(3x+20)$
g) $(8x-17)^2 = (2x-3)^2 + (10x-20)(6x+11)$
h) $(36x-57)^2 + (27x-47)^2 = (45x-74)^2$

2. a) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ b) $\frac{x}{5} - \frac{x}{4} = 1$ c) $\frac{x}{4} = \frac{x}{7} + \frac{3}{2}$

d) $\frac{2}{5}x + \frac{3}{10}x = 0{,}7$ e) $\frac{3}{4}x - \frac{5}{6}x = 3$ f) $1\frac{3}{4}x - 2\frac{1}{3}x = 3\frac{1}{2}$

3. a) $\frac{2+x}{4} - \frac{x-25}{5} = 7 - \frac{x-3}{7}$ b) $\frac{4x+9}{10} - \frac{7x-1}{25} = \frac{x+5}{4} - \frac{x+3}{20}$

c) $\frac{x+1}{2} - \frac{3-7x}{10} = \frac{3x-7}{5} + 1$ d) $\frac{3x-2}{4} + \frac{7x-6}{8} = \frac{12-5x}{8} + \frac{1-2x}{2}$

e) $\frac{2x-3}{2} + \frac{3x-5}{4} = \frac{5x+1}{6} - \frac{7x-4}{12} + \frac{7}{4}$

f) $\frac{3x+4}{8} + \frac{2x+1}{6} = \frac{5x+7}{4} - \frac{7x-5}{12} + \frac{35}{24}$

4. a) $\frac{1}{15} - \frac{9}{5(x+5)} = \frac{7}{5(x+5)} - \frac{4}{3(x+5)}$ b) $\frac{5x+10}{6x-9} + \frac{3x+9}{4x-6} - \frac{2x+13}{2x-3} = 4$

c) $\frac{1}{2} - \frac{3}{10x+10} = \frac{1}{6x+6} + \frac{8}{15x+15}$ d) $\frac{3x+4}{2x-6} - \frac{7x+10}{4x-12} + \frac{5x-15}{3x-9} = 1$

5. a) $\frac{x-8}{x-5} = \frac{x-7}{x-3}$ b) $\frac{x-6}{x-4} = \frac{x-5}{x-2}$

c) $\frac{x-7}{x+4} - \frac{x-11}{x-3} = \frac{29}{x^2+x-12}$ d) $\frac{x-5}{x+4} - \frac{x-7}{x-8} + \frac{52}{x^2-4x-32} = 0$

6. a) $a(x-b) = a^2$ b) $a(x-b) = b^2$ c) $5(x-a) = a-(4b-3x)$

d) $4(x-a)+2b = 3(x-b)+a$ e) $a(x-b) = x(a-b)$

f) $3b(x-a) - 12ax + 5a(2x+b) = 0$

g) $(m+n)x + (m-n)x = m(x+n)$ h) $(a-x)(l-x) = x^2$

7. a) $(x+m)(x+n) = x^2 + m(m+n) + n(n+2m)$

b) $(x+a)(x-b) + (x+2a)(x-2b) = (2x+a)(x-b) - 2b^2$

8. a) $\frac{x}{b} = a$ b) $\frac{b}{x} = a$ c) $\frac{x}{m} - n = 2n$ d) $\frac{m}{x} - \frac{n}{x} = m-n$

e) $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = a+b$ f) $\frac{x-a}{b} - \frac{b-x}{a} = 2$ g) $\frac{3(x-3a)}{b} = \frac{2(x-2b)}{a}$

9. a) $\frac{a+x}{a-x} = \frac{a+b}{a-b}$ b) $\frac{1-x}{1+x} = \frac{b-a}{b+a}$ c) $\frac{bx+1}{b+1} + \frac{x-b}{b-1} = 2\,\frac{b^2+1}{b^2-1}$

d) $\frac{mx+n}{2(m+n)} - \frac{nx-m}{2(n-m)} = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$ e) $\frac{9a}{2x-2a} - \frac{7a}{3x-3a} + \frac{5a}{4x-4a} = \frac{41}{24}$

B. Eingekleidete Gleichungen.

Bei Wortaufgaben gilt es zunächst, den Text in eine algebraische Form zu kleiden, d. h. eine Bestimmungsgleichung aufzustellen. Dazu bilde man eine vorläufige Antwort (a) mit der unbekannten Zahl x und drücke die anderen vorkommenden Zahlen durch die Unbekannte aus (als ob man x schon kennen würde und auf die Richtigkeit der Angaben die Probe machen wollte) (b). Es ergeben sich dabei stets für dieselbe Größe zwei Ausdrücke, durch deren Gleichsetzung man die gesuchte Gleichung erhält (c).

Zahlbeziehung

1. Beispiel: Von drei Zahlen ist die erste um 8 größer als die zweite und die dritte um 1 größer als die beiden ersten zusammen. Das arithmetische Mittel beträgt 23. Wie heißen die Zahlen?

Lösung: **a)** Die erste Zahl sei x, **b)** dann ist die zweite Zahl $x - 8$ und ihre Summe $x + x - 8$. **c)** Die dritte Zahl ist um 1 größer als $2x - 8$, also $2x - 8 + 1 = 2x - 7$. Die Summe aller drei Zahlen beträgt mithin $x + x - 8 + 2x - 7 = 4x - 15$. Das arithmetische Mittel ist $\frac{4x-15}{3}$. Es soll also sein $\frac{4x-15}{3} = 23$; $4x - 15 = 69$; $\underline{\underline{x = 21}}$.

Die erste Zahl ist also 21, wie heißen die zweite und dritte?

Bewegungsaufgabe

2. Beispiel: Bei einem Autorennen erhält eine Gruppe von Kleinwagen 112,5 km Vorsprung vor einer Gruppe mittelstarker Wagen, die in der Stunde durchschnittlich 85 km zurücklegt und die erste Gruppe nach $4\frac{1}{2}$ Stunden einholt. Wieviel km legen die Kleinwagen stündlich zurück?

Lösung: Die Geschwindigkeit der Kleinwagen sei x km/std. Dann haben sie in $4\frac{1}{2}$ Std. $4\frac{1}{2} \cdot x$ km zurückgelegt, dazu kommt der Vorsprung von 112,5 km. In derselben Zeit legen die mittelstarken Wagen $4\frac{1}{2} \cdot 85$ km zurück. Beide Wege sind gleich (s. Bild 193). Folglich gilt

$4\frac{1}{2} \cdot x + 112{,}5 = 4\frac{1}{2} \cdot 85;\ \underline{x = 60.}$

Die Kleinwagen legen stündlich 60 km zurück.

$\leftarrow 4\frac{1}{2} \cdot 85$ km $\rightarrow$

A ——————— B

$\leftarrow$ 112,5 km — C — $4\frac{1}{2}x$ km $\rightarrow$

Bild 193.

Probe: $4\frac{1}{2} \cdot 60 + 112{,}5 = 270 + 112{,}5 = 382{,}5$
$4\frac{1}{2} \cdot 85 = 382{,}5.$

Zusammengesetzter Dreisatz

3. Beispiel: Welches Kapital bringt zu $3\frac{1}{2}$% in 8 Monaten 252 RM Zinsen?
Lösung: Das gesuchte Kapital betrage x RM.

p% einer Größe k sind $= k \cdot \frac{p}{100}$. $3\frac{1}{2}$% von x RM sind also $x \cdot \frac{3^1/_2}{100} = x \cdot \frac{7}{200}$ RM. Dies sind die Zinsen von 1 Jahr oder 12 Monaten. Die Zinsen von 8 Monaten sind $\frac{2}{3}$ davon, also $x \cdot \frac{7}{200} \cdot \frac{2}{3}$. Dies sollen 252 RM sein:

$$x \cdot \frac{7}{200} \cdot \frac{2}{3} = 252.$$

Man findet $x = 10\,800.$
Das gesuchte Kapital beträgt also 10 800 RM.
Probe: $10\,800 \cdot \frac{7}{200} \cdot \frac{2}{3} = 252.$

10. a) Addiert man zu einer Zahl 13, so erhält man 55. Wie heißt die Zahl?
b) Das Fünfzehnfache einer Zahl um 12 vermindert ergibt 78.
c) Von welcher Zahl ist $\frac{1}{6}$ um 5 größer als $\frac{1}{11}$?
d) Von welcher Zahl ist die Summe des sechsten und achten Teiles 14.

11. a) Vermindert man den dritten Teil einer Zahl um 4, so erhält man ihren siebenten Teil. Wie heißt sie?

b) Vermindert man eine Zahl um 6 und teilt das Ergebnis durch 3, so erhält man den fünften Teil der Zahl. Wie heißt sie?

c) Von welcher Zahl beträgt die Hälfte, das Drittel und das Viertel zusammen 5 mehr als die Zahl selbst?

d) Zerlege 90 so in zwei Summanden, daß der eine um 6 größer ist als das Fünffache des anderen.

e) Nimmt man von einer Zahl die Hälfte, vom Rest wieder die Hälfte und vom Rest noch einmal die Hälfte, so bleibt nur 1.

12. a) Zwei Winkel eines Dreiecks betragen $37^0\,25'$ und $78^0\,15'$. Berechne den dritten.

b) Ebenso, wenn der eine Winkel 1586^{-} und der andere 1233^{-} beträgt.

c) Von zwei Nebenwinkeln ist der eine fünfmal so groß wie der andere. Wie groß ist jeder?

d) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist halb so groß wie ein Winkel an der Grundlinie. Wie groß ist jeder?

e) In einem gleichschenkligen Dreieck ist ein Winkel an der Grundlinie siebenmal so groß wie der Winkel an der Spitze. Wie groß ist dieser?

13. a) Von einem Rechteck ist eine Seite 5 cm länger als die benachbarte. Der Umfang beträgt 42 cm. Berechne die Seiten.

b) Ein Rechteck, dessen Seiten 12 m und $8\frac{1}{3}$ m sind, wird in ein anderes mit einer Seite von 15 m verwandelt. Wie lang ist die andere Seite?

Raumplanung

14. a) Durch die deutsche Raumplanung werden zerstreut liegende Teile landwirtschaftlichen Besitzes durch Tausch zusammengelegt. Zusammenhängender Besitz läßt sich besser ausnutzen. Bauer W. soll für ein Ackerstück von 40 m Länge und $14\frac{1}{2}$ m Breite ein anderes an seine Felder angrenzendes von 27 m Länge erhalten. Wie breit muß dieses sein (gleichwertiger Boden vorausgesetzt)?

b) Bauer Z. tauscht ein Ackerstück von $3\frac{3}{4}$ a Fläche gegen ein anderes von 50 m Straßenlänge. Berechne die Tiefe.

c) Für ein für den Bau der Reichsautobahn gebrauchtes Ackerstück von $\frac{3}{4}$ Morgen (1 Morgen = $\frac{1}{4}$ ha) wird Bauer N. ein günstig liegendes anderes Feld von 40 m Breite geboten. Wie lang ist es?

15. a) Gert will sich ein Kantenmodell für einen Quader herstellen. Er hat eine 80 cm lange Holzleiste zur Verfügung und will den Quader 10 cm lang und 4 cm hoch haben. Wie breit wird er?

b) Der Quader soll 5 cm hoch und doppelt so lang wie breit sein. Wie muß Gert jetzt seine 80 cm lange Holzleiste zuschneiden?

Fähnlein „Wolf" und seine Sorgen

16. a) Das Fähnlein „Wolf" will einen „Bunten Abend" veranstalten, um 60 RM für die Heimausschmückung zu beschaffen. 400 Eintrittskarten sollen verkauft werden. Pimpfe und Jungmädel sollen 10 Rpf, alle anderen 20 Rpf Eintritt bezahlen. Wieviel Karten müssen von jeder Sorte verkauft werden?

b) Horst will hoch hinaus und rechnet mit 100 RM Abendkasse. Ist das bei den gewählten Eintrittspreisen möglich? Der Saal faßt nur 400 Personen.

c) Die anderen rechnen mit einer Einnahme von 80 RM. Ernst schlägt dabei die Eintrittspreise 15 und 20 Rpf, Hans 10 und 25 Rpf, Fritz 15 und 25 Rpf vor. Wieviel Karten müßten jetzt von jeder Sorte verkauft werden?

d) Der Abend ist vorüber. Pimpfe und Jungmädel hatten 10 Rpf, alle anderen 25 Rpf zu bezahlen. 384 Karten wurden verkauft, und in der Kasse waren 84,60 RM. Was läßt sich hieraus berechnen?

17. Zu einer Fahrt werden von 50 Pimpfen 408 RM gebraucht. a) Der Anteil von 2 Kameraden wird von den anderen übernommen. Um die Lasten für die übrigen gerecht zu verteilen, bildet der Jungzugführer drei gleichgroße Gruppen aus seinen Jungen und ordnet an, daß sich der Sparbeitrag von Gruppe zu Gruppe um 3 RM unterscheiden soll. Was ist in jeder Gruppe zu zahlen? b) Wie ändern sich die Beträge der einzelnen Gruppen, wenn die Steigerung 2 RM, c) 2,50 RM beträgt?

NSV.

18. Bei einer NSV-Veranstaltung blieb nach Abzug der Unkosten in Höhe von 43,70 RM noch ein Überschuß von RM 146,80. Wieviel kostete eine Eintrittskarte, wenn 635 Karten verkauft wurden?

Sport

19. Bei der Olympiade 1936 in Berlin wurden goldene, silberne und bronzene Medaillen verteilt. Bewertet man eine Goldmedaille mit 3, eine Silbermedaille mit 2 Punkten und eine Bronzemedaille mit einem Punkt, so ergab sich die folgende Zusammenstellung für die drei besten Länder (und unsere Ostmark). Ergänze die Tabelle.

	Medaillen in	Gold	Silber	Bronze	Punkte
a)	Deutschland	39	x	36	237
b)	Österreich	7	9	x	46
c)	USA	x	57	46	223
d)	Italien	x	20	19	116

20. In einem Sportblatt fanden sich folgende Angaben: a) Von 1913 ··· 36 erwarben rund 486000 Personen das Sportabzeichen, und zwar rund achtmal soviel Männer wie Frauen. Wieviel Männer und wieviel Frauen erhielten also das Sportabzeichen? b) In den Jahren 1934 und 1935 erwarben rund 580000 SA.-Männer das SA.-Sportabzeichen, im Jahre 1935 aber 270000 mehr als 1934. Berechne die Zahlen für die beiden angegebenen Jahre.

21. Bei der Beurteilung in den leichtathletischen Kämpfen wird entweder eine 20-Punkte-Wertung oder eine 100-Punkte-Wertung angewandt. Ein Jugendlicher (13 Jahre) erhält bei der 20-Punkte-Wertung für einen Weitsprung von 2,6 m 0 Punkte und für je 15 cm mehr je 1 Punkt
a) F. erhielt 7 (11; 15) Punkte. Wie weit ist er mindestens gesprungen?
b) Wieviel Punkte hätte er bekommen, wenn er 4,40 m (3,85 m) weit gesprungen wäre?
c) und d) Bei der 100-Punkte-Wertung erhält derselbe Jugendturner für einen Weitsprung von 2,90 m 0 Punkte und für je 3 cm weiter je einen Punkt mehr. Beantworte dieselben Fragen wie in a) und b).

22. In wirtschaftlichen Betrachtungen wurden die Zahlen der folgenden Aufgaben genannt:

Wirtschaft

a) Im Deutschen Reich wurden 1935 bereits 925000 t Leichtkraftstoffe hergestellt, $\frac{9}{20}$ der erforderlichen Menge. Wie groß ist diese danach?
b) Von den Lebensmitteln, die in Deutschland jährlich verderben, entfallen rund $\frac{2}{5}$ auf Kartoffeln, Gemüse, Obst und Getreide, $\frac{1}{12}$ auf Schlachtvieh, $\frac{1}{16}$ auf Eier und Milchprodukte. Außerdem kommen noch Lebensmittel im Werte von etwa 545 Mill. RM um. Wie groß ist also der jährliche Verlust?
c) Die Zellwollerzeugung ist von 1934 bis 1937 um 63000 t gestiegen. Die Erzeugung von 1934 hat nur $\frac{1}{10}$ der von 1937 betragen. Wie groß ist danach die Erzeugung 1937 gewesen?
d) Die SA. sammelte 1937 325000 t mehr an Altpapier als 1936. Der Sammelertrag beider Jahre zusammen war $\frac{4}{7}$ der gesamten Neupapiererzeugung Deutschlands 1937 in Höhe von 2,275 Mill. t. Wie groß war das Sammelergebnis in den beiden Jahren?
e) Durchschnittlich werden von unserer Kartoffelernte 28 % als Speisekartoffeln, 7 % als Fabrikkartoffeln und 40 % als Futterkartoffeln ver-

braucht, 10 % gehen durch Schwund verloren, und der Rest von 6,75 Mill. t wird zur Saat gebraucht. Wie groß ist danach die durchschnittliche Gesamternte? (Die Ernte des Jahres 1937 betrug 52,5 Mill. t.)

23. a) Ein städtisches Elektrizitätswerk berechnet für die Kilowattstunde 40 Rpf und als Zählermiete monatlich 50 Rpf. Der Abnehmer kann aber auch einen Pauschaltarif wählen. Bei diesem muß er für eine 3-Zimmerwohnung monatlich eine feste Grundgebühr von 2,30 RM und für jede verbrauchte Kilowattstunde 15 Rpf zahlen. Die Zählermiete fällt dann weg. Wie hoch muß der monatliche Verbrauch mindestens sein, wenn sich dieser Pauschaltarif lohnen soll?
b) Für eine 4-Zimmerwohnung beträgt die Grundgebühr 3,20 RM und für eine 5-Zimmerwohnung 4,10 RM. Führe die gleiche Rechnung durch.

Luftfahrt **24.** a) Im Jahre 1925 legte das schnellste deutsche Flugzeug eine Strecke von rund 3500 km in 49 Stunden und 42 Minuten zurück. Wie groß war seine durchschnittliche Geschwindigkeit in m/sec?
b) In welcher Zeit hätte He 111 diese Strecke von 3500 km zurückgelegt, wenn es mit einer Reisegeschwindigkeit von 350 km/std geflogen wäre?
c) Wieviel m legt dieses Flugzeug in einer Sekunde zurück?

25. He 111 fliegt mit der Durchschnittsgeschwindigkeit $c = 350$ km/std. Bestimme die reine Flugzeit für Hin- und Rückflug Berlin—Basel—Berlin ($e = 700$ km), wenn a) Windstille herrscht, b) der Wind (Richtung Basel—Berlin) bei Hin- und Rückflug die Stärke 10 m/sec, c) die Stärke 25 m/sec hat.

26. Bestimme allgemein die Flugdauer T für Hin- und Rückflug auf der Strecke e km, wenn das Flugzeug die Eigengeschwindigkeit c km/std besitzt und wenn während des Fluges der Wind in der ersten Flugrichtung seiner Stärke w km/std nach unverändert bleibt. — Zeige aus der so erhaltenen Formel, daß T bei Windstille stets am kleinsten ist!

Sport **27.** a) Zwei motorisierte Meldefahrer fahren zur gleichen Zeit vom gleichen Punkt nach demselben Ziel, das 120 (270; s) km entfernt ist. Der eine fährt die ganze Strecke gleichmäßig mit 50 km/std. Der andere fährt zunächst mit 60 km/std, muß aber nach der Hälfte des Weges auf 40 km/std heruntergehen. Berechne die Fahrzeiten. Kommen beide Fahrer zur selben Zeit am Ziele an?
b) Für das Sportabzeichen wird beim Schwimmen gefordert: in 9 Min. 300 m in stehendem Wasser oder je 150 m hin und zurück in fließendem Wasser. Würde ein Schwimmer, der in stehendem Wasser die Bedingung gerade erfüllt, diese auch im fließendem Wasser bei derselben Eigengeschwindigkeit erfüllen? Nimm an, daß die Geschwindigkeit des strömenden Wassers gerade die Hälfte der Eigengeschwindigkeit des Schwimmers sei.

28. Auf kürzeren Strecken beträgt die Marschgeschwindigkeit 100 m/min, die Laufgeschwindigkeit 150 m/min. Wann holt ein Mann im Laufschritt eine vor 3 Min. abgerückte Abteilung ein?

29. Ein Meldereiter legt im Trab 250 m/min, im Galopp 400 m/min zurück. Wann holt ein Meldereiter eine marschierende Infanterieabteilung ein, wenn er $\frac{1}{2}$ Std. später abreitet und a) im Trab, b) im Galopp reitet?

30. Einer auf dem Marsche befindlichen Infanterieabteilung, die sich um 11 Uhr noch 20 km vor dem Zielort A befindet und eine Marschgeschwindigkeit von 6 km/std hat, soll die Nachricht überbracht werden, daß sie 12 km vor A einen Seitenweg einschlagen soll. a) Wo trifft sie auf einen von A um 11 Uhr aufbrechenden Melderadfahrer, der 18 km Stundengeschwindigkeit hat? b) Wann müßte der Radfahrer spätestens aufbrechen, um die Abteilung noch benachrichtigen zu können?

31. Ein Radfahrtrupp erhielt den Auftrag, bis zu einer 3 km entfernten Wegkreuzung voranzufahren und zur Flankensicherung in die dort abzweigende Landstraße einzubiegen. In welcher Entfernung von der Kreuzung muß sie umkehren, wenn sie an dieser mit der Spitze der marschierenden Truppe wieder zusammentreffen soll? Marschgeschwindigkeit 5 km/std und 16 km/std. **Marschsicherung**

32. Bei einem 3000-m-Lauf wurden für O. 10 Min. 28,5 Sek. und für K. 12 Min. 34,2 Sek. gestoppt. Beide sind zur selben Zeit gestartet. a) Wann hat O. den K. überrundet, wenn die Bahn 400 m lang ist? Anl.: Benutze dabei die Geschwindigkeit von O. und von K. b) Nach welcher Strecke hat O. den K. überrundet? c) Wie oft wird K. überrundet? **Laufsport**

X. Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten.

32. Abschnitt: Die Lösungsverfahren.

Vorbem.: Auf einem Parkplatz stehen 240 Kraftfahrzeuge. Die Frage, wieviel Kraftwagen und wieviel Krafträder vorhanden sind, kann nicht eindeutig beantwortet werden; denn jedes Zahlenpaar zwischen 0 und 240, dessen Summe 240 beträgt, kann die Antwort ergeben. Um nur eine Lösung zu erhalten, ist noch eine Angabe nötig, z. B. daß doppelt soviel Kraftwagen wie Krafträder vorhanden sind. Dann kann man z. B. durch Probieren finden, daß 160 Kraftwagen und 80 Räder auf dem Parkplatz stehen.

Zur Bestimmung von zwei Unbekannten sind stets zwei Gleichungen nötig.

Zeichnerische und rechnerische Verfahren.

1. a) Bezeichnet man in der obigen Aufgabe die Anzahl der Kraftwagen mit x, die der Krafträder mit y, so gilt $x + y = 240$ und man erhält die Gleichungen der Geraden

$$y = 240 - x \text{ und } y = \frac{x}{2}*.$$

Jede dieser Funktionsgleichungen wird durch viele Wertepaare x und y erfüllt. Die beiden Gleichungen auflösen bedeutet, dasjenige Wertepaar

x, y bestimmen, das beiden Gleichungen genügt.

Rechnerisch gibt es verschiedene Verfahren zur Bestimmung dieses Wertepaares x, y. Z. B. kann man die beiden Werte für y gleichsetzen und erhält $\frac{x}{2} = 240 - x$ und daraus $x = 160$.

Im allgemeinen erhält man für einen Wert von x aus den beiden Gleichungen zwei verschiedene Werte von y. Die Gleichsetzung (von y) bedeutet also, man bestimmt den x-Wert, zu dem gleiche Werte von y gehören.

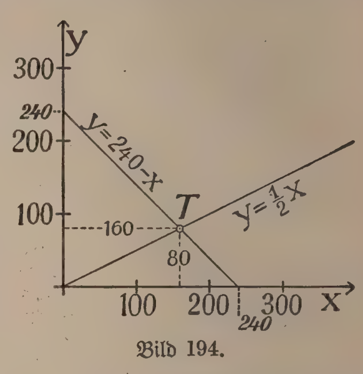


Bild 194.

Schnittpunkt Zeichnerisch heißt das, den Schnittpunkt beider Geraden (* S. 113) zu finden, denn dessen Standgrößen genügen beiden Gleichungen.

b) Wo und wann treffen sich nach dem vereinfachten graphischen Fahrplan (Bild 192) die beiden Züge E 32 und P 851? Ihre Weg-Zeitkurven zwischen den Stationen Neumünster und Wirst sind zwei gerade Linien, die sich schneiden. Die Standgrößen des Schnittpunktes geben die Antwort auf die beiden oben gestellten Fragen.

c) Das Verfahren der zeichnerischen Lösung kann man allgemein auf zwei Gleichungen 1. Grades mit zwei Unbekannten anwenden.

Besonders eignen sich Aufgaben über Bewegung mit gleichförmiger Geschwindigkeit für diese Art der Behandlung.

Bewegung 2. Beisp.: Von einem Orte bricht ein Wanderer auf, der in der Stunde 5 km zurücklegt. Nach $2\frac{3}{4}$ Std. fährt ihm ein Radfahrer nach, der 16 km in der Stunde schafft. Wann und in welcher Entfernung vom Ausgangsort holt er ihn ein?

Lösung: Der Radfahrer hole x Stunden nach Aufbruch des Wanderers diesen in y km Entfernung vom Ausgangsort ein. Dann ergeben sich die beiden Gleichungen

$$5x = y$$

und $(x - 2\frac{3}{4}) \cdot 16 = y$

oder $y = 5x$

und $y = 16x - 44$.

Rechnerische Auflösung: Setzt man die beiden Werte für y einander gleich, so erhält man

$$16x - 44 = 5x.$$

Dann ergibt sich:

$\underline{x = 4}$ (Std.)

$\underline{y = 20}$ (km).

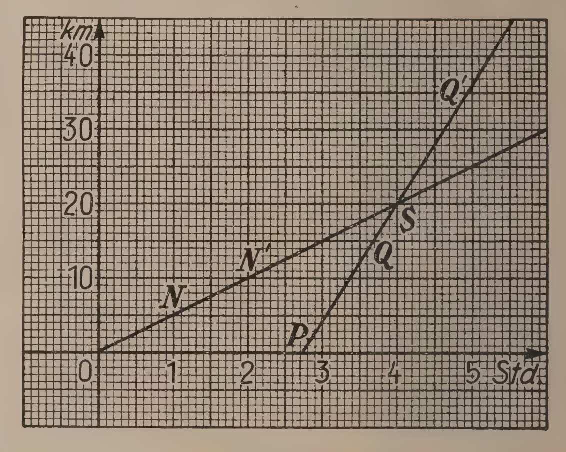


Bild 195.

Zeichnerische Auflösung: ON stellt die Wegzeit-

kurve des Fußgängers und PQ die des Radfahrers dar, beide schneiden sich in S (Bild 195). Als Standgröße des Schnittpunktes liest man auf der x-Achse 4 (Std.), als Entfernung vom Ausgangspunkte auf der y-Achse 20 (km) ab, also holt der Radfahrer den Fußgänger 4 Std. nach dessen Aufbruch in 20 km Entfernung ein.

Anm.: Über die Genauigkeit der zeichnerischen Lösung vgl. S. 104, Nr. 23. Durch Umzeichnung des Teiles, der in der Nähe des Schnittpunktes liegt, in vergrößertem Maßstab kann man sie beliebig weit treiben. **Erhöhung der Genauigkeit**

3. Beisp.: Es sollen zwei Zahlen mit folgenden Eigenschaften gefunden werden: Verdoppelt man die erste Zahl und zieht die zweite ab, so erhält man 3, verdoppelt man dagegen die zweite und zieht die erste ab, so erhält man 6.

Lös.: Die erste Zahl sei x, die zweite y, dann bestehen die beiden Gleichungen

$$\text{I. } 2x - y = 3$$
$$\text{II. } 2y - x = 6.$$

a) Die durch sie bestimmten Geraden I. $y = 2x - 3$, II. $y = \frac{1}{2}x + 3$ (Bild 196) schneiden sich in einem Punkte S mit den Standgrößen $x_S = 4$ und $y_S = 5$. **Zeichnerisches Verfahren**

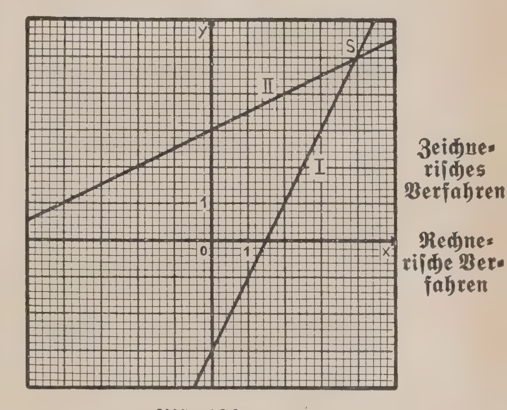


Bild 196.

b) Beim rechnerischen Verfahren wird aus zwei Gleichungen stets eine dritte Gleichung hergeleitet, die nur eine Unbekannte enthält. Damit sind diese Aufgaben auf die früheren Gleichungen 1. Grades mit einer Unbekannten zurückgeführt. Das kann man durchführen nach der **Rechnerische Verfahren**

1. **Einsetzungsmethode.**

Aus I folgt: $y = 2x - 3$ Ia.

eingesetzt in Gl. II: $2(2x-3) - x = 6$

daraus folgt: $\underline{\underline{x = 4}}$

und aus Ia: $\underline{\underline{y = 5}}$

2. **Gleichsetzungsmethode.**

Aus I folgt: $y = 2x - 3$ Ia.

Aus II folgt: $y = \frac{x+6}{2}$ IIa.

Gleichsetzen ergibt: $2x - 3 = \frac{x+6}{2}$

daraus folgt: $\underline{\underline{x = 4}}$

und aus Ia: $\underline{\underline{y = 5}}$

Probe: Setzt man x und y in Gl. II ein, so erhält man $2 \cdot 5 - 4 = 6$.

3. Die **Additions- und Subtraktionsmethode**

führt noch schneller zum Ziele bei folgenden Gleichungen:

Beispiel 1:

		allgemein:	
I	$x + y = 14$	I	$x + y = s$
II	$x - y = 6$	II	$x - y = d$
I + II	$2x = 20$	I + II	$2x = s + d$
	$\underline{\underline{x = 10}}$		$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}(s + d)}}$
I − II	$2y = 8$	I − II	$2y = s - d$
	$\underline{\underline{y = 4.}}$		$\underline{\underline{y = \frac{1}{2}(s - d).}}$

Bild 197 veranschaulicht diese Rechnung; es zeigt, wie man die Größen x und y einzeln finden kann, wenn ihre Summe (s) und ihre Differenz (d) gegeben sind.

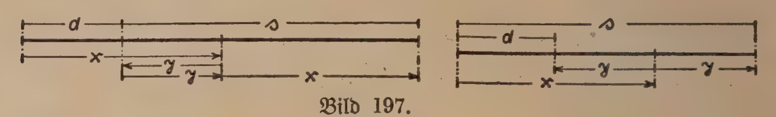


Bild 197.

Löse das Zahlenbeispiel auch zeichnerisch nach Nr. 2 oder 3a.

Dieses Verfahren läßt sich auch bei verschiedenen Vorzahlen anwenden, wenn man die Gleichungen vorher entsprechend verwandelt (k. g. V.).

Beispiel 2:

$$\left.\begin{array}{ll|r|r} \text{I.} & 3x + 2y = 22 & 3 & -4 \\ \text{II.} & 4x + 3y = 31 & -2 & +3 \end{array}\right\} \text{Addition ergibt:}$$

$9x - 8x + 6y - 6y = 66 - 62$, $\underline{x = 4}$,

bzw. $-12x + 12x - 8y + 9y = -88 + 93$, $\underline{y = 5}$.

Lösungsmöglichkeit 4. Beisp. 1: I. $2x - 5y = 10$. II. $x = 2{,}5y + 7{,}5$. Beisp. 2: I. $4x + 3y = 12$. II. $\frac{4}{3}x + y = 4$.

Wie verlaufen die Geraden? Schnittpunkt? Wann erhält man für zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten keine Lösung?

Das Gleichungssystem Beispiel 1 enthält einen Widerspruch; denn nach Umformung von II erhält man $2x - 5y = 15$; das widerspricht der Gleichung I. Es gibt keine Lösung.

In Beispiel 2 sind die Gleichungen voneinander abhängig; teilt man Gl. I durch 3, so erhält man II; es liegt also tatsächlich nur e i n e Gleichung (mit zwei Unbekannten) vor; es gibt beliebig viele Lösungen. Bestimme einige!

Angesetzte Gleichungen.

Löse die folgenden Gleichungen zunächst durch Zeichnung.

5. a) $x + y = 7$; $x - y = 1$ b) $x - y = 3$; $x + y = 5$ c) $x - y = 4$; $y = 2$

d) $x - y = 5$; $x = y$ e) $y - x = 3$; $y = 2x$ f) $3x + 2y = 4$; $x - y = 1$

g) $2y + 3x = 4$; $x - 2y = 4$ h) $x + 3y = 6$; $3x - y = 8$ i) $4y - 3x = 4$; $2x - y = 6$

6. a) $2y + x = 5$; $4x - 2 = y$ b) $2y + 3x = -\frac{3}{2}$; $0{,}5x + 2 = y$ c) $x + \frac{1}{2}y = 12$; $x + y = 15$

d) $x + 3y = 13 - x$; $2y = 10 - x$ e) $x - y - 1 = 0$; $x - 7y + 14 = 0$ f) $1{,}2x + 2{,}5y = 11$; $2{,}5x - 3y = 6{,}5$

Löse die folgenden Aufgaben zunächst durch Rechnung.

7. a) $x + y = 15$; $x - y = 3$ b) $x - y = 9$; $2y + 1 = x$ c) $5x - y = 48$; $x = 5y$ d) $2x + 3y = 21$; $x = 2y$

8. a) $2x + 5y = 18$; $y = \frac{x}{2}$ b) $2x + 4y = 9$; $-y = \frac{x}{2}$ c) $4x - 7y = 5$; $2x - 10 = y$ d) $7x - 3y = 32$; $7 - 2y = x$

9. a) $x + y = 8$, $\quad x - y = 4$
b) $2x + y = 24$, $\quad x - 2y = -3$
c) $2x + y = 24$, $\quad x - y = 15$
d) $x + 3y = 19$, $\quad x + 2y = 14$

10. a) $5x - y = 3$, $\quad 3x + 4y = 6{,}4$
b) $11x + 9y = 17$, $\quad y + \frac{3}{4}x = 0$
c) $11x - 4y = 12$, $\quad \frac{2x+1}{3} = y$
d) $11x + 3y = 36$, $\quad \frac{y}{2} + 2\frac{1}{2} = x$

Löse auf die bequemste Weise, auch zeichnerisch.

11. a) $3x + y = 14$, $\quad 2x - y = 1$
b) $4x + 3y = 11$, $\quad 4x - 3y = 53$
c) $7x - 5y = 29$, $\quad 7x + 5y = -1$

12. a) $9x - 8y = 14$, $\quad 5x - 4y = 10$
b) $3x + y = 33$, $\quad 4x - 3y = 5$
c) $5x + 6y = 27$, $\quad 10x - 9y = 12$

13. a) $3x - 2y = 7$, $\quad 9x - 8y = 1$
b) $x + 6y = 19$, $\quad 2x + 9y = 29$
c) $5x - 4y = 6\frac{1}{4}$, $\quad 15x - 16y = 15$

14. a) $8x - 5y = 31$, $\quad 3x - 2y = 10$
b) $3x - 5y = -4$, $\quad 5x - 7y = 8$
c) $4x - 3y = 6$, $\quad 3x - 4y = 1$

15. a) $3x - 4y = 7$, $\quad 5x - 6y = 13$
b) $6x - 5y = 1$, $\quad 9x - 7y = 8$
c) $15x - 11y = 28$, $\quad 6x + 5y = 77$

16. a) $6x + y + 10 = 0$, $\quad 2x - 3y + 30 = 0$
b) $1{,}1x + 0{,}6y = 4$, $\quad 2\ x - 1\ = y$
c) $2{,}7x + 2{,}5y = 10{,}2$, $\quad 0{,}9x + 2{,}8y = 9{,}3$

17. a) $0{,}6x + 3{,}5y = 15{,}2$, $\quad 1{,}4y - 0{,}9x = 3{,}8$
b) $2{,}4x - 4{,}5y = 1{,}5$, $\quad 10{,}5y - 3{,}6x = 1{,}5$
c) $0{,}7y + 1{,}2x = 13{,}1$, $\quad 1{,}7y - 0{,}9x = 1{,}3$

18. a) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$, $\quad 8x - \frac{y}{3} = 3$
b) $\frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 2\frac{5}{6}$, $\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 3$
c) $\frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 9$, $\quad \frac{x}{9} - \frac{y}{10} = -\frac{2}{5}$

19. a) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 11$, $\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{8} = 7$
b) $8x - \frac{y}{3} = \frac{4}{3}$, $\quad 9x + \frac{y}{8} = 1$
c) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3$, $\quad \frac{x}{5} + \frac{y}{7} = 7$

20. a) $3x + 5y = 11$, $\quad \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$
b) $3x - 4y = 3$, $\quad \frac{x}{y} = \frac{7}{5}$
c) $12x - 7y = 5$, $\quad \frac{y}{x} = \frac{2}{7}$
d) $5x + 8y = 58$, $\quad \frac{3x}{4y} = \frac{8}{3}$
e) $6x + 5y = 40$, $\quad \frac{x+y}{x-y} = \frac{7}{3}$
f) $4x - 9y = 1$, $\quad \frac{x-y}{x+y} = \frac{2}{3}$

21. a) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}y = 6$, $\quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = 22$
b) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y = 9$, $\quad \frac{1}{5}x - \frac{1}{3}y = -1$
c) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{7}y = 4$, $\quad \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2}$
d) $\frac{x}{15} - \frac{y}{16} = \frac{1}{12}$, $\quad \frac{x}{25} - \frac{y}{24} = \frac{1}{30}$
e) $\frac{x}{8} + \frac{y}{15} = 3\frac{1}{3}$, $\quad \frac{x}{12} + \frac{y}{25} = 2\frac{2}{15}$
f) $\frac{5x}{6} + \frac{7y}{4} = 12$, $\quad \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}y = 9$

22. a) $\frac{3x-1}{11} + \frac{3y-1}{7} = 9$, $\quad \frac{4x-y}{3} - y = 4$
b) $\frac{5x-3}{6} = 3y - 8$, $\quad \frac{3x-y}{11} = \frac{x-y}{2}$
c) $\frac{5x-2}{6} + \frac{5y-8}{4} = 6$, $\quad \frac{2x+7}{9} - \frac{11y-8}{4} = 5$

23. a) $\frac{2x+3}{9} - \frac{y+9}{8} = 0$, $\quad \frac{5x-12}{8} - \frac{3y-10}{7} = 1$
b) $x + 2y = 6(x - 3y)$, $\quad 7(x - 3y) = \frac{x}{4} + 6$
c) $4(5x + 1) = 3(3y + 7)$, $\quad 10(9x - 1) = 7(7y + 1)$
d) $10(3x + 5) = 2(16 - 3y)$, $\quad 6(1 - 7x) = 5(4y - 10)$

24. a) $(x-3)(y+4)=(x-4)(y+7)$ b) $(x+1)(y-3)=(x-2)(y+1)$
$(x+5)(y-2)=(x+2)(y-1)$ $(x-1)(y+2)=(x+1)(y-1)$

25. a) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=4$ b) $\frac{7}{x}-\frac{3}{y}=4$ c) $\frac{10}{x}-\frac{9}{y}=2$
$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=1$ $\frac{5}{x}-\frac{2}{y}=3$ $\frac{8}{x}+\frac{15}{y}=9$

d) $\frac{7}{x}-\frac{5}{y}=2$ e) $\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=3$ f) $\frac{5}{2x}-\frac{2}{3y}=\frac{1}{2}$
$\frac{5}{x}+\frac{7}{y}=12$ $\frac{6}{x}-\frac{1}{y}=1$ $\frac{7}{2x}+\frac{5}{3y}=2$

26. a) $x+y=a$ b) $x+y=a$ c) $ax+by=2$
$y-x=b$ $2x+3y=b$ $2ax+3by=5$

d) $3x+4y=a+2b$ e) $x+y=5(a+b)$ f) $x+y=\frac{1}{2}(a+b)$
$x-2y=2a-b$ $x-y=3(a-b)$ $x-y=\frac{1}{2}(a-b)$

g) $x+y=(a+b)^2$ h) $5x-4y=9a$ i) $3x+2y=5a$
$x-y=(a-b)^2$ $4x-5y=9b$ $x-y=5b$

Untersuche, ob die folgenden Gleichungen Lösungen haben oder nicht.

27. a) $4x-y=1$ b) $8x-3y=21$ c) $x-y=0$
$12x=3(y+1)$ $4x-\frac{2}{3}y=5$ $2x=2y+5$

d) $\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4$ e) $\frac{x}{3}=\frac{y}{2}+4$ f) $15x-(7y+x)=7$
$3(x+y)=10$ $\frac{x}{6}=y-3$ $13y-2(7y-x)=1.$

33. Abschnitt. Anwendungen (Eingekleidete Gleichungen).

1. Bestimme zwei Zahlen, von denen man kennt:
a) die Summe 143 (2038) und die Differenz 7 (388),
b) die Differenz 85 (1025) und das Verhältnis $\frac{9}{4}$ ($\frac{49}{8}$),
c) die Summe 69 (256) und den Quotienten 2 ($20\frac{1}{3}$).

2. a) Die Summe der Ziffern einer zweiziffrigen Zahl ist 12. Dividiert man die Zahl durch 3, so erhält man das Fünffache der zweiten Ziffer. Wie heißt die Zahl? (Zeichnung.)
b) In einer zweiziffrigen Zahl ist die Summe der Ziffern 7; stellt man die Ziffern um, so erhält man das Fünffache der ersten Ziffer. (Zeichnung.)
c) In einer zweiziffrigen Zahl ist die zweite Ziffer um 2 größer als die erste. Vertauscht man die beiden Ziffern miteinander, so ist die neue Zahl um 18 größer als die ursprüngliche. Wie heißt sie? (Zeichnung.) Wieviel Lösungen gibt es?

3. a) Ein Winkel eines Dreiecks beträgt 48^0, die Differenz der beiden anderen 16^0. Wie groß sind die Winkel? (Zeichnung.)
b) Wenn man die Seiten eines Rechtecks um je 1 cm verlängert, so nimmt der Inhalt um 14 qcm zu. Verkürzt man aber eine Seite um 3 cm, so nimmt der Inhalt um 15 qcm ab. Wie lang sind die Seiten? (Zeichnung.)
c) Verlängert man eine Seite eines Rechtecks um 3 cm und verkürzt die andere um 1 cm, so erhält man ein Quadrat. Der Umfang des Rechteckes beträgt 32 cm. Berechne die Seiten!! (Zeichnung.)

4. a) Im Jahre 1937 war die Eisenförderung im Altreich um 6,6 Mill. t größer als in Österreich. Beide Länder zusammen förderten 10,4 Mill. t. Wie groß waren die Fördermengen?
b) Durch die Rückkehr der Ostmark ins Deutsche Reich stieg die Bevölkerungszahl auf rund 75 Mill. Die Bevölkerungszahl des Altreichs war 9,7 mal so groß wie die der Ostmark. Berechne die beiden Zahlen!

5. a) Der Jungbann tritt in Stärke von 2970 (2550; 2010) Jungen in Linie zu drei Gliedern an. Er hat rings um einen rechteckigen Platz Aufstellung genommen, der doppelt so lang wie breit ist. Für jeden Jungen werden 80 cm bemessen. Wie lang sind die einzelnen Fronten?
b) Eine Kameradschaft zählt 84 Mitglieder. Von diesen zahlen die Vollzahler 50 Rpf als Monatsbeitrag und die Teilzahler 30 Rpf. Der Kassenwart teilt mit, daß die Beitragssumme der Vollzahler dreimal so groß ist wie die der Teilzahler. Was kann man daraus feststellen?
c) Für ein großes Sportfest sind 4000 (2500; 5500) RM aufzubringen. Werbekarten zu 10 Rpf und Abzeichen zu 20 Rpf sollen zu diesem Zweck verkauft werden. Wieviel Werbekarten und wieviel Abzeichen müssen verkauft werden, wenn man im ganzen mit einem Absatz von 30000 (20000; 40000) Stück rechnen kann?

6. a) Ein Onkel sagt zu seiner Nichte: „In 4 Jahren werde ich dreimal so alt sein wie du, und vor 4 Jahren war ich fünfmal so alt wie du.“ (Zeichnung.)
b) Vom WHW. sollen zu Weihnachten 1000 Familien mit Paketen im Werte von 20 und 30 (15 und 25) RM bedacht werden. 22000 (21000) RM stehen für diesen Zweck zur Verfügung. Wieviel Pakete von jeder Sorte sind anzufertigen?

7. a) Bei einem Manöver wird gemeldet, daß die „feindlichen“ Flieger in einer Entfernung von 200 km mit der Geschwindigkeit von 320 km/std im Anflug auf A sind. 5 Min. nach der Meldung steigt eine Abwehrstaffel auf und fliegt ihnen mit 330 km/std entgegen. Wieviel Minuten nach dem Abflug der Abwehrstaffel und in welcher Entfernung von A treffen sich beide Fliegerstaffeln? (Zeichnung.)
b) Ein Kreuzer, der mit der Geschwindigkeit 12 sm/std von Helgoland um 6 Uhr in See geht, trifft nach $5\frac{1}{2}$ Std. einen Aviso, der von der Flotte, die 120 sm vor Helgoland steht, um 7 Uhr 54 mit einem Geheimbefehl abgefahren ist. Wieviel sm legt der Aviso in der Stunde zurück, und wo begegnet er dem Kreuzer? Wann kommt er in Helgoland an? (Zeichnung.)
c) Auf der Strecke Frankfurt a. M.—Fulda (111 km) treffen sich zwei Züge. Der eine verläßt Fulda um 13.16 Uhr und kommt in Frankfurt a. M. um 15.06 Uhr an. Der Gegenzug verläßt Frankfurt a. M. um 14.44 Uhr und ist um 16.29 Uhr in Fulda. Wo und wann treffen sie sich? (Die Geschwindigkeit der Züge sei gleichmäßig angenommen.) (Zeichnung.)
d) Ein Rheindampfer hat stromab die Geschwindigkeit 18,5 km/std, stromauf dagegen nur 13,5 km/std. Wie groß ist seine Eigengeschwindigkeit und die der Strömung? (Zeichnung.)

8. a) Das Luftschiff „Graf Zeppelin“ hatte auf einer Probefahrt gegen den Wind eine Geschwindigkeit von 73,3 km/std, mit Wind eine solche von 153,9 km/std. Wieviel km/std betrug die Eigengeschwindigkeit des Luftschiffs und wieviel die des Windes?

b) Die deutsche Sportfliegerin Elly Beinhorn-Rosemeyer flog am 13. August 1935 in einem Tage von Deutschland nach Vorderasien und zurück. Sie legte die 1650 km lange Strecke von Gleiwitz nach Istanbul in 6 Stunden zurück. Für den Rückflug brauchte sie für die 1870 km lange Strecke von Istanbul nach Berlin-Tempelhof $7\frac{1}{3}$ Stunden. Wie groß war die Eigengeschwindigkeit ihres Flugzeuges im Durchschnitt und die Windgeschwindigkeit unter der Annahme, daß sie während des ganzen Hinfluges Rückenwind und während des ganzen Rückfluges Gegenwind von gleicher Stärke hatte?

c) Ein Flugzeug braucht für eine Strecke Berlin—Lübeck (264 km) auf dem Hinflug gegen den Wind 1 Std. 30 Min., auf dem Rückflug mit dem Wind 1 Std. 12 Min. Bestimme die durchschnittliche Eigen- und Windgeschwindigkeit.

d) Mitte August 1938 flog das deutsche Großflugzeug „Condor“ von Berlin nach New York (6400 km) und zurück (6600 km) in den Weltrekordzeiten 24 Std. 54 Min. und 19 Std. 54 Min. Bestimme die Windgeschwindigkeit und die Eigengeschwindigkeit des Flugzeugs.

9. a) Durch sinnvolle Tarifgestaltung nahm der Verkehr in Berlin außerordentlich zu. Allein auf den Kurzstrecken zu 10 Rpf und zu 15 Rpf wurden vom 1. 9. 33 bis 1. 9. 38 wurden allein 1940 Millionen Fahrten mit einer Gesamteinnahme von 210,9 Millionen RM durchgeführt. Wie verteilten sich die Fahrgäste auf die beiden Arten von Kurzstrecken?

b) Im Jahre 1936 war nach einer Zeitungsmeldung die Zahl der Unfälle gegen das Vorjahr um 175000 gestiegen. Sie betrug 113% der Vorjahreszahl. Wie hoch waren die Unfallziffern?

10. a) Um im Motor des Kraftfahrzeuges das Gefrieren des Kühlwassers zu verhindern, mischt man ihm bei Beginn des Winters ein Frostschutzmittel vom Artgewicht 1,135 bei. Die Mischung muß für einen Kälteschutz bis — 10° (— 20°; — 30°; — 40°) C ein Artgewicht von 1,027 (1,047; 1,060; 1,068) besitzen. Wieviel Liter Frostschutzmittel (mindestens) und wieviel Liter Wasser kommen bei den einzelnen Kältegraden auf 100 Liter Gefrierschutzmischung?

b) Die Motoren von LZ 127 werden mit einer Mischung aus Wasserstoff und Propan betrieben, die das Artgewicht der Luft hat. Wieviel cbm von jedem Gas enthalten 100 cbm der Mischung? (Artgewicht von Luft 1,293 kg/cbm, von Wasserstoff 0,089 kg/cbm, von Propan 1,966 kg/cbm.)

11. a) Ein Zehnpfennigstück wiegt 4,0 g und hat einen Rauminhalt von 0,53 ccm. Aus wieviel g Aluminium (Artgewicht 2,7) und wieviel g Kupfer (Artgewicht 8,9) besteht es? (Gewichtsprozente?)

b) Altmaterial, das zu 50% aus Aluminium und zu 50% aus Schwermetallen besteht, soll zu Duraluminium mit 85% Aluminiumgehalt ver-

arbeitet werden. Wieviel Aluminium und wieviel Altmaterial braucht man für 100 kg? (Zeichnung.)
c) Aluminiumbronze mit 30% Kupfergehalt soll auf 45% Kupfergehalt angereichert werden. Wieviel Kupfer muß man zusetzen, um 100 kg reichere Bronze zu erhalten?
d) Eine Kupfer-Zinnbronze mit 90% Kupfergehalt soll mit einer solchen mit 70% Kupfergehalt zusammengeschmolzen werden, so daß die Legierung 75% enthält. Wieviel muß man für 100 kg von jeder nehmen?

Vorb.: In größeren Betrieben (Heimen, Krankenhäusern usw.) werden die Nährwerteinheiten der einzelnen Mahlzeiten berechnet. Der Tagesbedarf eines Menschen an Nährstoffen beträgt für einen Erwachsenen im Durchschnitt 80 g Eiweiß, 400 g Kohlehydrate (Stärke) und 50 g Fett. Die Zusammensetzung der Nahrungsmittel entnimm Anh. II, 17. **Nährwerte**

12. Ein Eintopfgericht besteht aus Rindfleisch und Kartoffeln.
a) Wieviel g Rindfleisch und Kartoffeln sind zu nehmen, um $\frac{1}{4}$ des Tagesbedarfs eines Erwachsenen an Eiweiß und Stärke zu decken?
b) Wieviel muß eine Hausfrau nehmen, wenn sie für zwei Erwachsene und drei Kinder kochen soll und für jedes Kind 60% des Bedarfs eines Erwachsenen gerechnet wird?
c) Welche Menge an Brot und Käse braucht ein Erwachsener zu einer Abendmahlzeit, wenn $\frac{1}{5}$ des Tagesbedarfs an Eiweiß und Kohlehydraten gedeckt werden soll?

XI. Verhältnisse und Verhältnisgleichungen.

34. Abschnitt: Die Verhältniszahl und die lineare Funktion: Erklärungen und Sätze.

A. Verhältnisbegriff – Verhältniszahl. – Lineare Funktion.

1. a) Hamburg hatte im Jahre 1938 rd. 1100000, Berlin 4400000 Einwohner. Will man diese beiden Zahlen miteinander vergleichen, so kann man fragen, um wieviel die eine größer als die andere oder wievielmal die eine in der anderen enthalten ist. Man muß also entweder subtrahieren oder dividieren. Im ersten Fall stellt man die Differenz fest, im zweiten spricht man von dem V e r h ä l t n i s dieser Größen. Man sagt im letzten Falle 4400000 zu 1100000 gleich 4 (4400000 : 1100000 = 4).
b) Beträgt für eine Familie monatlich die Miete 45 ℛℳ und ihr Einkommen 225 ℛℳ, so sagt man, beide Zahlen stehen im Verhältnis eins zu fünf (1 : 5 oder $\frac{1}{5}$).
c) Die Strecke $\overline{A'B'}$ auf der Generalstabskarte ist $\frac{1}{100\,000}$ der Entfernung der beiden Punkte A und B im Gelände. Man sagt, die Kartenstrecke

steht zu der Geländestrecke im Verhältnis 1 zu 100000, und schreibt dies in der Form 1 : 100000 oder $\frac{1}{100\,000}$ (Bd. I).

d) Das Maß für den Anstieg einer Geraden (S. 103, Nr. 14) ist das Verhältnis h : s, $\left(\frac{h}{s}\right)$. Der Anstieg beträgt 1 : 5 (S. 45, Nr. 17), heißt, daß der Höhenunterschied $\frac{1}{5}$ der zugehörigen waagerechten Strecke ist.

e) In den Fällen a) bis d) hat man Einwohnerzahlen, Geldbeträge und Strecken miteinander verglichen. Auch Warenmengen, Preise oder allgemein zwei gleichartige Größen a und b kann man in der Form des Verhältnisses miteinander vergleichen.

Verhältnis und Bruch Erkl. 1: **Das Verhältnis zweier gleichartiger Größen (a, b) ist der Quotient ihrer Maßzahlen; man bezeichnet es mit a : b oder $\frac{a}{b}$.**

An der letzten Schreibweise erkennt man den engen Zusammenhang der Verhältnisse mit den Brüchen. Man kann die Regeln der Bruchrechnung auf das Rechnen mit Verhältnissen anwenden (Erweitern, Kürzen usw.).

Verhältniszahl Erkl. 2: Den Wert des Verhältnisses zweier Größen nennt man ihre Verhältniszahl.

2. Bestimme die Verhältniszahl von **a)** 6 u. 3; **b)** 45 u. 9; **c)** 10 u. 15; **d)** 15 u. 10; **e)** 0,75 u. 1,25; **f)** 0,76 u. 1,71; **g)** 1,21 u. 0,55; **h)** 0,049 u. 0,077; **i)** $\frac{3}{4}$ u. $\frac{9}{8}$; **k)** $\frac{5}{12}$ u. $\frac{3}{8}$; **l)** $3\frac{1}{2}$ u. $2\frac{1}{3}$; **m)** $3\frac{3}{7}$ u. $6\frac{7}{8}$; **n)** 1,2 m u. 0,3 m; **o)** 12 dm u. 3,6 m; **p)** 5 qm 20 qdm u. 3 qm 25 qdm; **q)** 375 qm u. 8,25 a; **r)** 1024 g u. 4096 mg; **s)** 4 kg 50 g u. 7 kg 20 g.

3. Desgl. von **a)** 12a und 4a; **b)** 4a und 12a; **c)** 9pq und 9p; **d)** $25r^2s$ und $125r^2$; **e)** u und v; **f)** 2y und 5x.

4. a) Hat das Verhältnis von y und x den Wert m, so gilt $y : x = m$, also auch $y = mx$. Aus der einen Größe x und ihrer Verhältniszahl m zu einer anderen Größe y findet man y also durch Multiplikation von x mit m. Daher heißt m auch Verhältnisfaktor.

b) In der Gleichung $y = mx$ (S. 103) bedeutet m den Anstieg der Geraden, d. h. bei ihr ist für jeden einzelnen Punkt das Verhältnis der Standgröße y zur Standgröße x, der Anstieg der Geraden, fest.

c) Zwischen $\frac{h}{s}$ und $\frac{y}{x} = m$ (Bild 187), $\frac{h}{s} = n$ (S. 45, Bild 42) und $\frac{s}{t} = v$ (S. 105, Nr. 27) besteht kein grundlegender Unterschied.

d) Die Bilder zeigen, daß bei fester Verhältniszahl sich Zähler und Nenner entsprechend, d. h. im gleichen (oder geraden) Verhältnis ändern.

$y = mx$ **Die lineare Funktion $y = mx$ ist die Funktion des geraden Verhältnisses.**

Der Anstieg der Geraden bestimmt die Verhältniszahl.

Erkl. 3: Ändern sich zwei Größen y und x so, daß ihr Verhältnis $\frac{y}{x}$ dasselbe bleibt, so heißt die eine zur anderen proportional[1].

[1] lat. = verhältnismäßig, angemessen.

5. **a)** Alle bisher behandelten Verhältnisse lassen sich durch gerade Linien veranschaulichen (Bd. I), man nennt sie gerade Verhältnisse. **Gerade Linien und Verhältnisse**

b) Aus $y = mx$ erkennt man, daß für $x_1 = 1$ sich $y_1 = m$ ergibt, d. h. **die Verhältniszahl tritt als Ordinate zu $x = 1$ auf** (vgl. S. 105, Nr. 28).

Damit kann sie zeichnerisch bestimmt werden, oder falls sie gegeben ist, zur Zeichnung und Rechnung weiterhin mit Vorteil benutzt werden. **Zeichnerische Division**

c) An welcher Stelle kann man also aus dem Bilde jeder Weg-Zeit-Geraden die Geschwindigkeit unmittelbar ablesen?

d) Beantworte die gleiche Frage für den Anstieg.

e) Mit Hilfe der Bezeichnung „proportional" kann man sagen, es sind proportional[1]: Kartenstrecke und Geländestrecke, Jahreszinsen und Kapital (vgl. Zinsstrahl, Bd. I), Warenpreis und Warenmenge (vgl. Preisstrahl, Bd. I), Lohn und Arbeitszeit, Lohn und Stückzahl, Fahrpreis und Fahrstrecke. Gib weitere Beispiele an.

B. Verhältnisgleichung.

6. **a)** Haben zwei Verhältnisse dieselbe Verhältniszahl, so kann man sie gleichsetzen.

Erkl. 4: **Eine Gleichung von der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (gesprochen: a zu b wie c zu d), die die Gleichheit zweier Verhältnisse ausdrückt, heißt Verhältnisgleichung (Vgl.) (Proportion).**

b) Die vier Größen a, b, c, d sind die Glieder der Vgl., a und d die Außen-, b und c die Innenglieder. Man sagt kurz: a, b, c, d bilden eine Proportion. **Außen-, Innenglieder**
c) Enthält eine Proportion benannte Größen, so kann man sich diese durch ihre Maßzahlen ersetzt denken (z. B. 3 kg : 6 kg = 5 *RM* : 10 *RM* oder 3 : 6 = 5 : 10).

7. Multipliziert man die Verhältnisgleichungen

a) $\frac{3}{7} = \frac{6}{14}$ **b)** $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ I

auf beiden Seiten mit dem Hauptnenner $7 \cdot 14$ bzw. $b \cdot d$, so folgt: **Produktgleichung**

a) $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7 = 42$ **b)** $a \cdot d = b \cdot c$ II

Lehrs. 1: In jeder Proportion ist das Produkt der Außenglieder gleich dem Produkt der Innenglieder.

Das ist der wichtigste Lehrsatz über Verhältnisgleichungen.

8. **a)** Am Bild 198 erkennt man, daß 3 kg Ware 60 *Rpf*, 5 kg Ware 100 *Rpf* kosten. Der Anstieg des Preisstrahls ist durch das Verhältnis 60 : 3 oder 100 : 5 bestimmt:

$$\frac{60}{3} = \frac{100}{5} \qquad 1)$$

Man kann aus diesem Beispiel auch schließen, daß die beiden Warenmengen

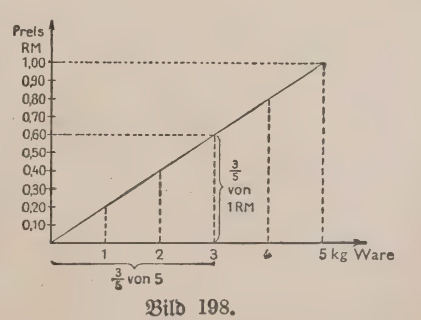


Bild 198.

[1]) unter sonst gleichen Umständen. (Bd. I, 29. Abschn.)

3 kg und 5 kg im gleichen Verhältnis wie die zugehörigen Preise 60 Rpf und 100 Rpf stehen müssen, daß also auch die Vgl. gilt:

$\frac{3}{5} = \frac{60}{100}$ 1a) oder $\frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 1b)

b) Entsprechend kann man an der Weg-Zeit-Geraden (Bild 190) sehen, daß nicht nur $v = s_1 : t_1 = s_2 : t_2$ ist, sondern auch die Wege $s_1 : s_2$ sich wie die zugehörigen Zeiten $t_1 : t_2$ verhalten, d. h.

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2} \qquad 2a)$$

ist; ebenso kann man, wenn man die Vgl. mit der Zeit beginnt, schreiben:

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{s_2}{s_1}. \qquad 2b)$$

Diese Beispiele zeigen, daß man in einer Proportion gewisse Umstellungen der Glieder vornehmen darf.

c) Überträgt man diese Überlegungen auf die Verhältnisgleichung: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so erhält man:

Vertauschungssätze

durch Vertauschung der Innenglieder: $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, Ia

" " " Außenglieder: $\frac{d}{b} = \frac{c}{a}$, Ib

" " " Innenglieder mit den Außengliedern: $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$. Ic

Die Richtigkeit von Ia⋯c erkennt man daran, daß sich immer wieder die Produktgleichung II aus ihnen bilden läßt.

Fasse Ia⋯c in Worte.

9. a) Umgekehrt kann man jede Produktgleichung als Vgl. schreiben (s. o).
b) Stelle aus der Produktgleichung $3 \cdot 14 = 6 \cdot 7$ die 8 möglichen Verhältnisgleichungen auf.
c) Stelle aus der Produktgleichung $p \cdot q = r \cdot s$ die 8 möglichen Vgln. auf.

10. Berechne x aus: a) $\frac{x}{7} = \frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{x} = \frac{9}{7}$ c) $\frac{3}{2} = \frac{x}{5}$ d) $\frac{4}{3} = \frac{8}{x}$

11. Berechne x aus: a) $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$ b) $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ c) $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ d) $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

4. Proportionale

Erkl. 5: **In der Vgl. $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ heißt x die vierte Proportionale zu den drei Größen a, b und c.**

Bestimme das vierte Verhältnisglied zu:

12. a) 4; 6; 8 b) 10; 8; 2,5 c) 1,5; 4; 4,5 d) 3; 0,5; 4,2
e) 1,1; 6; 2,2 f) 0,75; 5; 0,9 g) 13,2; 8,4; 3,3 h) 7,2; 0,54; 4,8

Bilde mit den Werten der folgenden Zusammenstellungen Nr. 13⋯20 die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und berechne x.

	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.
a =	42	12	x	14	4,5	3	3,6	11
b =	4	8	3	x	x	$4\frac{1}{4}$	x	3
c =	x	15	7	21	15	x	4	x
d =	6	x	9	2	10	$5\frac{2}{3}$	9	6,3

21. a) Bild 198 zeigt, daß sich die Warenmengen 3 kg zu 2 kg wie ihre Preise 60 Rpf zu 40 Rpf verhalten, also: $\frac{3}{2} = \frac{60}{40}$.

Bildet man daraus:

$$\frac{3+2}{2} = \frac{60+40}{40} \quad 3a) \quad \text{und} \quad \frac{3-2}{2} = \frac{60-40}{40} \quad 4a),$$

so bestätigt die weitere Ausrechnung und das Bild, daß auch die neuen Verhältnisgleichungen richtig sind.

Dividiert man 3a durch 4a, so erhält man

$$\frac{3+2}{3-2} = \frac{60+40}{60-40} \quad \text{oder} \quad \frac{5}{1} = \frac{100}{20}. \qquad 5)$$

b) Überträgt man dies auf die Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, so ergeben sich allgemein (vgl. d)):

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{IIIa} \qquad \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \text{IVa}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c} \quad \text{IIIb} \qquad \frac{a-b}{a} = \frac{c-d}{c} \quad \text{IVb}$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so ergibt sich der

Lehrs. 2: In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz aus dem ersten und zweiten Gliede zum ersten oder zweiten Gliede wie die Summe oder Differenz aus dem dritten und vierten Gliede zum dritten oder vierten Gliede.

$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c} \qquad \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}.$$

c) Entsprechend der Vgl. 5 in a) erhält man aus IIIb und IVb durch Teilung: $\frac{a+b}{a} : \frac{a-b}{a} = \frac{c+d}{c} : \frac{c-d}{c}$ Zusammengefaßt:

$$\boxed{\text{Aus } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ folgt } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}} \qquad \text{V}$$

Lehrs. 3: In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz. **Entsprechende Addition und Subtraktion**

d) Die Richtigkeit der Vgl. III und IV kann man folgendermaßen beweisen: Verhält sich z. B. $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, so erkennt man, daß der Zähler (Nenner) des ersten Bruches dem Zähler (Nenner) des zweiten Bruches proportional ist. Da $15 = 3 \cdot 5$ und $20 = 4 \cdot 5$ ist, ist 5 hier die Verhältniszahl. Allgemein kann man aus der Vgl.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ schließen: } \begin{array}{l} a = c \cdot k \\ b = d \cdot k. \end{array}$$ Daraus folgt:

$$a + b = (c + d)\,k \qquad a - b = (c - d)\,k$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{(c+d)\,k}{d \cdot k} \quad \text{und} \quad \frac{a-b}{b} = \frac{(c-d)\,k}{d \cdot k},$$

und daraus ergeben sich wieder III und IV.

Berechne x möglichst einfach, benutze dabei auch Lehrsatz 2 und 3.

	22.	23.	24.	25.	26.	27.	28.	29.
$a =$	$x - 3$	$x + 10$	42	51	$x - 0{,}2$	$3{,}8 - x$	2,7	$5\frac{1}{3}$
$b =$	$x + 6$	35	$x - 15$	$x - 19$	$x + 0{,}6$	6,3	$x - \frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$
$c =$	6	$x + 1$	182	85	5,1	$x + 1$	$4\frac{1}{2}$	$x + 3\frac{1}{3}$
$d =$	8	28	$x + 15$	$x - 5$	5,7	4,5	$x + \frac{1}{2}$	$x - 6\frac{1}{4}$

30. Ist eine von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten eine Proportion, so kann man außer nach den früheren Lösungsverfahren häufig vorteilhaft mit der Verhältniszahl rechnen.

1. Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 5x - 2y = 15 \\ \text{II.} & \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \\ \text{IIa.} & x = 3k \\ \text{IIb.} & y = 5k \\ \text{I.} & 5 \cdot 3k - 2 \cdot 5k = 15 \\ & 5k = 15 \\ & k = 3 \\ \text{IIa.} & x = 9 \quad \text{IIb.}\ y = 15 \end{array}$$

2. Beispiel:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 7x - 4y = 1 \\ \text{II.} & \frac{5x - 2y}{5x + 2y} = \frac{1}{5} \\ \text{IIa.} & 5x - 2y = 1 \cdot k' \quad \vert +1 \vert -1 \\ \text{IIb.} & 5x + 2y = 5 \cdot k' \quad \vert +1 \vert +1 \\ \text{IIa+IIb.} & 10x = 6k' \\ & x = \frac{3}{5}k' \\ \text{IIa-IIb.} & 4y = 4k' \\ & y = k' \\ \text{I.} & 7 \cdot \frac{3}{5}k' - 4k' = 1 \text{ ergibt} \\ & k' = 5 \\ & x = 3 \quad y = 5 \end{array}$$

Anm.: Man kann Beispiel 2 auch mit Hilfe von Lehrs. 3 so lösen:

$$\frac{(5x + 2y) + (5x - 2y)}{(5x + 2y) - (5x - 2y)} = \frac{5 + 1}{5 - 1}$$

$$\frac{10x}{4y} = \frac{6}{4}$$

und dann weiter nach dem 1. Beispiel.

31. a) $x + y = 69$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ b) $x - y = 15$, $\frac{x}{y} = \frac{19}{14}$ c) $2x + 3y = 44$, $\frac{x}{y} = \frac{1}{3}$

32. a) $15x - 16y = 24$, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ b) $8x - 7y = 8$, $\frac{x}{y} = \frac{9}{8}$ c) $3x + 5y = 25$, $\frac{x}{y} = \frac{5}{7}$

33. a) $(x + y) : (x - y) = 13 : 3$, $4x + 5y = 57$ b) $(x - y) : (x + y) = 1 : 7$, $5x - 6y = 8$

34. a) $\frac{5x + 4y}{4x + 5y} = \frac{14}{13}$, $4x - 3y = 10$ b) $\frac{7x - 6y}{6x - 7y} = \frac{11}{2}$, $5x - 6y = 2$ c) $\frac{3x + 5y}{5x - 3y} = \frac{5}{14}$, $4x + 7y = 13$

35. Die Summe aus Zähler und Nenner eines Bruches ist 5. Vermehrt man jeden um 1, so erhält man den Bruch $\frac{3}{4}$. Suche Zähler und Nenner. (Zeichnung!)

35. Abschnitt: Rechenstab und Verhältnisgleichung.

A. Die Bezifferung.

1. Der einfache Rechenstab (Bd. I) und der auf negative Zahlen erweiterte Rechenstab (S. 14) zeigt gleichmäßig unterteilte Skalen.

2. Bild 4e zeigt eine ungleichmäßige Zahlenleiter. Sie findet Verwendung bei dem in Bild 199 dargestellten gewöhnlichen Rechenstab. Er besitzt die vier Zahlenleitern A, B, C, D, von denen die beiden oberen und die beiden unteren unter sich gleich sind. Der gesamte Rechenstab besteht aus

Schiene, Zunge und Läufer. A und D befinden sich auf der Schiene, B und C auf der verschiebbaren Zunge. Über den Teilungen ist der (Strich-)Läufer aus Glas oder Zelluloid beweglich angebracht. **Schiene Zunge Läufer**

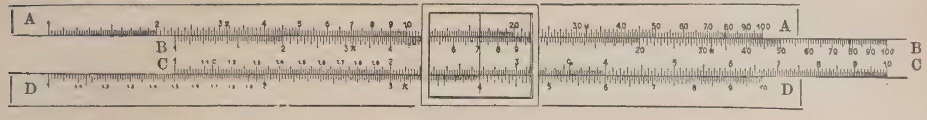


Bild 199.

3. Wir beschränken uns vorläufig auf die beiden wichtigsten Teilungen C und D. Wie Bild 4e und Bild 199 zeigen, werden die Zwischenräume (Intervalle) nach rechts hin immer kleiner. Vgl. z. B. den Zwischenraum 1 · · · 2 mit 7 · · · 8. Die einzelnen Abschnitte auf dem Rechenstab sind nicht gleichmäßig unterteilt. Bei der üblichen Art der Unterteilung lassen sich drei Abschnitte unterscheiden: Teilungsabschnitt 1 · · · 2 (Bild 200), Teilungsabschnitt 2 · · · 4 (Bild 202), Teilungsabschnitt 4 · · · 10 (Bild 203).

4. a) Eine der wichtigsten Eigenschaften der Zahlenleitern auf dem Rechenstab besteht darin, daß die Bezifferung 1, 2, 3 · · · 1 (10) sowohl das Zehn-, Hundert-, Tausendfache usw. sowie auch den zehnten, hundersten usw. Teil bedeuten kann, wie es das nachfolgende Schema zeigt:

1000	2000		4000		10 000
100	200		400		1 000
10	20		40		100
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**10**
0,1	0,2		0,4		1
0,01	0,02		0,04		0,1
0,001	0,002		0,004		0,01

b) Man liest beim Rechenstab nur die Ziffernfolge, nicht die Stellung des Kommas ab. Dieses wird nach einer Überschlagsrechnung gesetzt. **Komma nach Überschlag**

B. Drei Teilungsabschnitte, Ablesen und Einstellen.



Bild 200.

5. a) Bild 200 zeigt den Teilungsabschnitt 1 · · · 2. Zwischen der großen 1 und 2 an den Enden stehen kleinere Ziffern 1, 2, 3 · · · 9, sie bedeuten 1,1; 1,2; 1,3 · · · 1,9[1] oder 11; 12; 13 · · · 19 (oder ?). **Teilungsabschnitt 1 · · · 2**

[1] Auf neueren Rechenstäben manchmal so angegeben.

Ebenso bedeuten die unbezifferten Teilungsstriche, etwa zwischen 1,2 und 1,3 der Reihe nach 1,21; 1,22; 1,23 · · · 1,29 (oder ?).

b) Der Pfeil a gibt also den Wert 1,25 an; entsprechend bedeuten b = 1,44; c = 1,78; d = 1,03.

c) Auf welche Werte sind die Pfeile e, f, g, h eingestellt?

6. Achte vor allem auf die Null zwischen den übrigen Ziffern, z. B. stelle mit dem Läufer ein 1,03 und 1,3 (oder 10,3 und 13). Bringe dabei den feinen Haarstrich des Läufers mit dem Teilungsstrich der betreffenden Zahl zur Deckung.

7. Stelle ebenso mit Benutzung des Läufers ein:

a) 120; 121; 122; 123; 124; 125

b) 144; 160; 185; 1,2; 1,65; 10,8

c) 1,8; 11,2; 1,82; 1,28; 10,1; 0,17

d) 0,01; 0,011; 0,0101; 0,109; 0,19; 190

e) Zu jeder dreiziffrigen Zahl zwischen 1 · · · 2 (10 · · · 20; 100 · · · 200) gehört ein bestimmter Teilungsstrich.

8. Eine vierte Ziffer läßt sich abschätzen. 192,5 liegt in der Mitte von 192 und 193 (Bild 201).

Bild 201.

9. Stelle wie in Nr. 6 und 7 folgende vierziffrige Zahlen ein:

a) 125,5; 102,5; 12,05; 1733; 1,073; 18,89; 101,1; 10 110; 10,01

b) 1111; 0,1305; 0,01775; 109,1; 101,9; 1,625; 16,52; 1,562; 0,1256



Bild 202.

Teilungsabschnitte 2 . . . 4

10. a) Bild 202 zeigt den Teilungsabschnitt 2 · · · 4. Die Bereiche zwischen 2 und 3 wie zwischen 3 und 4 sind wieder in 10 Teile geteilt; man erhält also der Reihe nach folgende (unbezifferten) Stellen: 2,1; 2,2; 2,3 · · · 2,9; 3; 3,1 3,2 · · · 3,9 (oder?). Als weitere Unterteilung sind dann nur noch 5 Teile angegeben.

b) Im Teilungsabschnitt 2 · · · 4 sind als dritte Ziffern nur die geraden Zahlen 2, 4, 6, 8 durch Teilungsstriche hervorgehoben, die ungeraden werden nach Augenmaß in den Mitten eingestellt.

11. a) So bedeutet in Bild 202 der Pfeil a = 2,24, b = 3,68, c = 2,53, d = 3,07 (oder?) b) Welche Werte sind bei e, f, g, h abzulesen?

12. Stelle folgende Zahlen ein:

a) 2,56; 3,78; 21,2; 22,1; 308; 380; 303; 333; 0,348; 0,036; 0,306; 2,67

b) 2,45; 3300; 3030; 299; 21,7; 0,271; 0,021; 201; 34,3; 33,4; 0,202; 391

13. a) Der Teilungsabschnitt 4 · · · 10 ist zwar zunächst zwischen den Ziffern 4 und 5, 5 und 6 usw. wieder in 10 Teile geteilt, aber nur einmal weiter unterteilt (Bild 203). **Teilungsabschnitt 4 · · · 10**

b) Im Teilungsabschnitt 4 · · · 10 ist als dritte Ziffer nur die 5 durch einen Teilungsstrich hervorgehoben, die übrigen müssen nach Schätzung eingestellt werden.

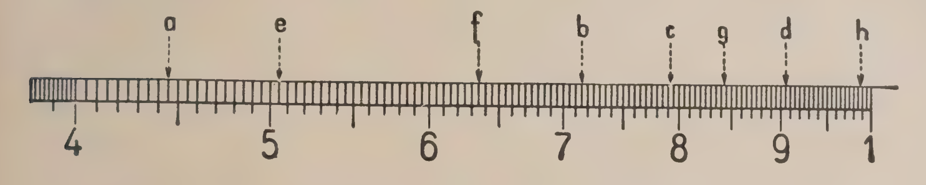


Bild 203.

14. a) Daher bedeutet im Bild 203 der Pfeil a = 4,45, b = 7,15, c = 7,92, d = 9,05 (oder?). b) Welche Werte sind bei e, f, g, h abzulesen?

15. Stelle folgende Zahlen ein:

a)	4,7;	52;	0,71;	890;	445;	0,995;	80,5;	5,25;	6,43
b)	42,1;	6340;	7,07;	0,083;	0,803;	99,6;	0,625;	6,05;	6,025
c)	9,09;	9,90;	990;	909;	853;	0,06;	8200;	0,935;	4075
d)	19,85;	9,85;	1,24;	2,41;	0,0303;	7,75;	4030;	1905;	10,05

C. Die Verhältnisgleichung auf dem Rechenstab.

16. a) Bild 204 zeigt die Zahl 1 auf der Zahlenleiter C über der Zahl 2 auf Leiter D. Was steht auf D unter 2, 3, 4 der Skala C? Das heißt:

Man kann jede Zahl auf C als Zähler und die daruntersteheude auf D als Nenner eines Bruches auffassen. Der Spalt ist als Bruchstrich anzusehen.

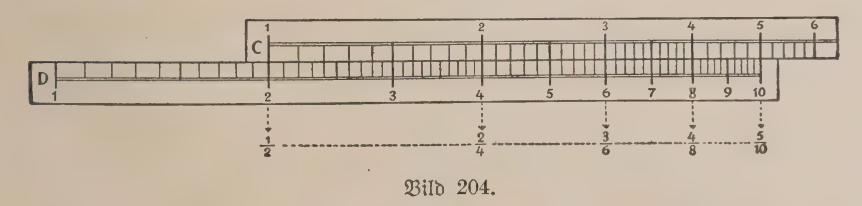


Bild 204.

b) Du findest $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$. Lies weitere zusammengehörige Werte ab, wie z. B. $\frac{38}{76}$, c) $\frac{15}{?}$, d) $\frac{25}{?}$, e) $\frac{?}{70}$, f) $\frac{?}{90}$.

Jede einzelne Einstellung liefert eine ganze Reihe von Brüchen mit gleichem Werte (gekürzt oder erweitert), also eine ganze Tabelle.

17. a) Stelle die 1 der „Zählerleiter“ C wie in Nr. 16 über die 3 (16; 0,22) der „Nennerleiter“ D ein und lies ab: $\frac{12}{?}$; $\frac{1,2}{?}$; $\frac{0,02}{?}$; $\frac{25}{?}$; $\frac{0,28}{?}$; $\frac{?}{72}$; $\frac{?}{7,2}$; $\frac{?}{0,09}$; $\frac{?}{44}$.
b) Was ergibt $\frac{1}{3} = \frac{5}{?}$? Bei der in a) gewählten Einstellung ist eine Ablesung nicht möglich. In diesem Falle stellt man nicht die linke 1 sondern die rechte 1 (10) der Zählerleiter über die 3 der Nennerleiter; man „schiebt die Zunge (nach links) durch“. Als Ergebnis liest man ab $\frac{5}{15}$. Lies ebenso ab: $\frac{0,7}{?}$; $\frac{7,4}{?}$; $\frac{85}{?}$; $\frac{0,41}{?}$; $\frac{5,3}{?}$; $\frac{?}{1,2}$; $\frac{?}{126}$; $\frac{?}{19,2}$; $\frac{?}{2}$; $\frac{?}{2,84}$.

Durchschieben

18. a) Stelle $\frac{2}{3}$ ($\frac{4}{5}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$) ein, d. h. 2 der Z.-Leiter (C) über 3 der N.-Leiter (D) (Bild 199) und lies ab: $\frac{6}{?}$; $\frac{3,6}{?}$; $\frac{4,5}{?}$; $\frac{0,18}{?}$; $\frac{2,7}{?}$; $\frac{56}{?}$; $\frac{?}{24}$; $\frac{?}{25}$; $\frac{?}{3,7}$; $\frac{?}{0,46}$.
b) Für die Aufgabe $\frac{2}{3} = \frac{8}{?}$ gibt es bei der angegebenen Einstellung kein Ablesungsergebnis. Auch in diesem Falle muß man die Zunge (nach links) durchschieben, und zwar so, daß die rechte 1 (10) der Zählerleiter an die Stelle der linken 1 kommt, die man sich bei der angebenen Einstellung $\frac{2}{3}$ mit dem Läuferstrich auf der N.-Leiter (D) bereits eingestellt hat. Als Ergebnis liest man wie bisher unter der 8 (von C) auf der N.-Leiter 12, also $\frac{8}{12}$ ab. Lies ebenso ab: $\frac{0,7}{?}$; $\frac{90}{?}$; $\frac{8,2}{?}$; $\frac{?}{1,2}$; $\frac{?}{1,12}$; $\frac{?}{130,5}$.

19. Die in den Nr. 16 ··· 18 gezeigte Eigenschaft des Rechenstabes gestattet, auf einfachste Art aus jeder Verhältnisgleichung die 4. Proportionale sofort zu bestimmen.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

Beispiel: Löse $\frac{3}{2} = \frac{2,4}{x}$; stelle dazu die 3 auf C über die 2 auf D (Bild 205) und lies unter 2,4 der Leiter C auf der Leiter D die Lösung $x = 1,6$ ab.

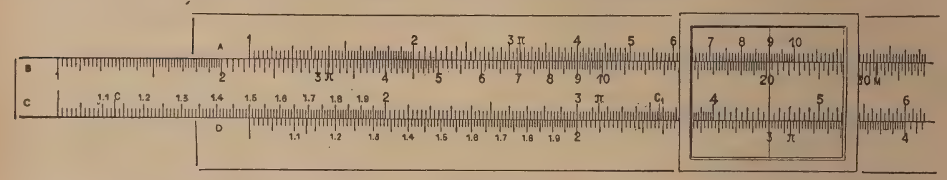


Bild 205.

20. Bestimme nach Beisp. in Nr. 19 in folgenden Aufgaben die 4. Proportionale, mache stets einen Überschlag, setze danach das Komma:

a) 4;5;6 4;5;0,6 4;5;16 4;5;160 4;5;10 4;5;0,12
b) 8;5;0,32 8;5;19,2 0,5;0,4;4 5;34;4 4,8;75;3,2 0,49;70;25

In den folgenden Aufgaben ist die Zunge wie in Nr. 18b durchzuschieben.

c) 5; 8; 8 5; 8; 0,7 4; 7; 0,6 4,1; 6; 0,89 0,28; 6,6; 5,4
d) 7; 2; 25 0,43; 60,5; 81 34,5; 0,176; 130 203; 0,455; 6,2

Berechne mit dem Rechenstab (eine Einstellung):

21. Aufg. Nr. 13, S. 45. **22.** Aufg. Nr. 14, S. 45.

23. Die Aufg. Nr. 19 und 20 sind von der Form $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, so daß $a \cdot x = b \cdot c$ ist. Jede einfache Aufgabe der Multiplikation zweier Zahlen $x = b \cdot c$ läßt sich auf die obige Form zurückführen, wenn man darin $a = 1$ setzt. **Malnehmen $x = b \cdot c$**

Beispiel: Es sei $x = 24 \cdot 37$ zu berechnen. Dann läßt sich die Produktgleichung $1 \cdot x = 24 \cdot 37$ sofort als Verhältnisgleichung $\frac{1}{24} = \frac{37}{x}$ schreiben und genau entsprechend auf dem Rechenstab einstellen.

$$\frac{\text{Z.-Leiter (C): } 1}{\text{N.-Leiter (D): } 24} = \frac{\text{Z.-Leiter (C): } 37}{\text{N.-Leiter (D): } \underline{888 = x}}$$ (Überschlag: $20 \cdot 40 = 800$)

24. Berechne entsprechend und setze das Komma nach Überschlag:
a) $7 \cdot 12$; $13 \cdot 24$; $11 \cdot 6{,}3$ **b)** $1{,}8 \cdot 2{,}5$; $3{,}04 \cdot 25$; $0{,}022 \cdot 45$
c) $1{,}6 \cdot 1{,}2$; $1{,}06 \cdot 1{,}2$; $1{,}06 \cdot 1{,}02$ **d)** $17{,}2 \cdot 2{,}08$; $30{,}7 \cdot 0{,}34$; $0{,}543 \cdot 0{,}14$

25. Will man ebenso $x = 24 \cdot 47$ berechnen, so erhält man zunächst keine Ablesung. Ähnlich wie in Nr. 17 b und 18 b stellt man dann nicht die linke 1, sondern die rechte 1 (10) von C über die 24 von D. Als Lösung liest man unter der 47 von C auf D die gesuchte Zahl $x = 1128$ ab. Auch an dieser Form der Verhältnisgleichung $\frac{47}{x} = \frac{1}{24}$ erkennt man sofort, daß sie gleichbedeutend mit $47 \cdot 24 = 1 \cdot x$ ist.

26. Berechne entsprechend und setze das Komma nach Überschlag:
a) $7 \cdot 8$; $43 \cdot 7$; $24 \cdot 65$ **b)** $2{,}3 \cdot 9$; $3{,}7 \cdot 5{,}9$; $45 \cdot 0{,}86$
c) $6{,}2 \cdot 0{,}31$; $17 \cdot 62$; $0{,}905 \cdot 2{,}6$ **d)** $5{,}3 \cdot 27$; $359 \cdot 0{,}56$; $0{,}765 \cdot 0{,}46$.

Aus dem vorhergehenden ergibt sich als

Regel: **Bei der Multiplikation zweier Zahlen stellt man die linke oder rechte 1 der Z.-Leiter C über den einen Faktor auf D und liest unter dem zweiten, der auf C steht, das Ergebnis auf der N.-Leiter D ab.**

27. Wie ändert sich die Einstellung und Ablesung in Verhältnisgleichungen folgender Art: $\frac{3}{2} = \frac{x}{2{,}4}$? Wie groß wird x? **$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$**

28. **a)** bis **d)** Vertausche in Nr. 20 a ··· d das 3. und 4. Glied. x steht also jetzt wie in Nr. 27. Berechne es.

29. Die Aufg. Nr. 27 und 28 sind sämtlich von der Form $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, so daß $x = \frac{a}{b} \cdot c$ ist. Jede einfache Aufgabe der Division zweier Zahlen $x = \frac{a}{b}$ läßt sich auf die vorige Form bringen, wenn man $c = 1$ setzt. **Teilen $x = \frac{a}{b}$**

Beispiel: Ist $\frac{12}{15} = x$ zu berechnen, so zeigt die Schreibweise als Vgl. $\frac{12}{15} = \frac{x}{1}$ sofort, daß die 12 der Z.-Leiter über die 15 der N.-Leiter kommen muß. Der Quotient ($x = 0{,}8$) steht auf C über der (rechten) 1 von D, wobei die Kommastellung durch Überschlagsrechnung bestimmt worden ist.

30. Bei der Aufgabe $\frac{15}{12} = \frac{x}{1}$ erscheint das Ergebnis $x = 1{,}25$ über der (linken) 1 von D.

Aus Nr. 29 und 30 folgt als

Regel: **Bei der Division zweier Zahlen stellt man den Zähler (Dividenden) auf der Z.-Leiter C über den Nenner (Divisor) auf der N.-Leiter D ein und liest das Ergebnis über der linken oder rechten 1 ab.**

Wann erscheint das Ergebnis über der linken, wann über der rechten 1?

31. Berechne nach der aufgestellten Regel die folgenden Aufgaben, wobei die Kommastellung nach dem Beispiel durch Überschlagsrechnung bestimmt wird.

Beispiel: $\frac{4,35}{0,85} \approx 5$, denn $\frac{400}{80} = 5$. Die Ablesung ergibt 5,12.

a) $\frac{22}{15}$, $\frac{160}{22}$, $\frac{243}{32}$, $\frac{2,3}{5,2}$, $\frac{6,5}{25,6}$, $\frac{4}{0,222}$, $\frac{6}{56}$. **b)** Bestimme die Kehrwerte von a).

32. Verwandle in Zehnerbrüche: **a)** $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{13}$, **b)** $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{17}$, $\frac{1}{19}$, **c)** $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{7}{29}$. Rechne einige Aufgaben zur Probe schriftlich. Stellenzahl?!

36. Abschnitt: Anwendungen der Verhältnisgleichungen.

Vorbem.: Benutze bei den folgenden Aufgaben möglichst den Rechenstab.

A. Verhältnisse.

$\frac{y}{x} = m$

Die Aufg. Nr. 1···2 enthalten Zusammenstellungen der Form des Verhältnisses $\frac{y}{x} = m$. Bestimme darin

α) jeweils die fehlende Größe aus $y = mx$ und

β) (durch Zeichnung oder Rechnung) den neuen Wert y_1 für $x_1 = x + 1$.

1.	Weg	y	**a)** 14 km	**b)** 240 km	**c)** —
	Zeit	x	2 Std.	—	2 Std. 10 Min.
	Geschwindigkeit	m	—	180 km/std.	84 km/std
	Arbeitslohn	y	**d)** 4,20 RM	**e)** 5,60 RM	**f)** —
	Arbeitszeit	x	—	7 Std.	4 Std.
	Stundenlohn	m	0,60 RM	—	0,90 RM
2.		y	**a)** 175 kg	**b)** 120 RM	**c)** —
		x	35 kg	—	21 m
		m	—	6	3
	Gewicht	y	**d)** 3,5 kg	**e)** —	**f)** 16,8 kg
	Rauminhalt	x	—	12 ccm	2000 ccm
	Artgewicht	m	2,8	7,6	—

Hubraum und PS

3. Eine Autofirma berichtet in ihrer technischen Übersicht über vier Wagentypen: 1,1 *l* (23 PS[1]); 1,3 *l* (26 PS); 2,5 *l* (55 PS); 3,6 *l* (75 PS). Entspricht die Steigerung der Literzahl (des Hubraums) der Steigerung der Wagenstärken (der PS-Zahl)?

Anl.: Bilde mit dem Rechenstab $\frac{1,1}{23}$ usw. und vergleiche bei einer Einstellung! (S. 129, Nr. 16 b.)

B. Einfache Verhältnisgleichungen. – Dreisatz.

Sichtweite

1. Beisp.: Die Sichtweite auf See beträgt rund 15 sm. Wieviel km? Überschlag!

Ansatz	Als Vgl. geschrieben	Auf dem Rechenstab
1 sm ≙ 1,852 km 15 sm ≙ x km	$\frac{1}{15} = \frac{1,852}{x}$	Leiter C 1 .... 1,852 Leiter D 1,5 x

[1] Abkürzung für Pferdestärken.

2. Beisp.: Es wurde gemeldet: im Nov. 1937 errang eine He-Maschine eine neue Weltbestleistung über 100 km bei 1000 kg Nutzlast. Sie flog die Strecke Hamburg—Stolp und zurück in 1 Std. 58 Min. und erreichte dabei eine Geschwindigkeit von 504,09 km/std. Wie lang war die überflogene Strecke? Überschlag: $x \approx 2 \cdot 500$ km.

Ansatz	Als Vgl. geschrieben	Auf dem Rechenstab
In 60 Min. flog sie 504,09 km „ 118 „ „ „ x „	$\frac{60}{118} = \frac{504{,}09}{x}$	60 . . . . 504 118 x

Diese Beispiele zeigen: Die Verhältnisgleichung wird überall da mit Vorteil angewandt, wo wir früher mit dem Dreisatz arbeiteten. Die gesuchte Größe tritt als 4. Proportionale auf. Mache stets vorher einen Überschlag, rechne halbschriftlich, d. h. mit dem Rechenstab unter schriftlicher Festlegung von Zwischenergebnissen. **Proportion und Dreisatz**

4. a) Im Jahre 1898 legte ein Kraftwagen 1 km in der kürzesten Zeit von 57 Sekunden zurück. Wieviel km sind das auf eine Stunde umgerechnet? **Motorisierung**
b) Im Jahre 1938 betrug die kürzeste Zeit für eine engl. Meile (das sind 1,609 km) 10,42 Sek.; wieviel km macht dies in der Stunde aus?
Anl.: a) In 57 Sek. 1 km / „ 3600 „ x „ b) In 10,42 Sek. 1,609 km / „ 3600 „ x „

5. Zu seiner Fahrt von Berlin nach München im Oktober 1938 brauchte der Korpsführer des NSKK. $4\frac{1}{2}$ Std. Die reine Fahrzeit auf der Reichsautobahn betrug $4\frac{1}{4}$ Std., die Fahrstrecke 530 km. Welche durchschnittliche Stundengeschwindigkeit erreichte er auf der Reichsautobahn?

6. Ein Kraftwagen verbraucht 8,5 (12,4) *l* Brennstoff auf 100 km Autobahn, der Volkswagen dagegen nur 6 *l*. Wie groß ist die Brennstoffersparnis bei einer Fahrstrecke von a) 65, b) 145, c) 240 km?
d) bis f) Berechne die Ersparnis an Benzinkosten für a) bis c) bei einem Literpreis von 41 Rpf.

7. a) Die „Ju 52" braucht für eine Flugstunde bei einer Geschwindigkeit von 235 km/std 750 *l*. Was kosten 100 km Flugstrecke bei einem Benzinpreis von 0,41 RM?
b) Die „Ju 52" faßt 13 Fluggäste; welcher Benzinpreis kommt auf einen?
c) Vergl. damit den Benzinpreis für einen mittelstarken Wagen, der 15 *l* Benzin auf 100 km verbraucht.
d) Wieviel kommt dabei auf eine Person bei vier Fahrgästen?

8. Die Arbeitsdauer für die Trockenlegung eines Bruches durch 1280 Arbeitsmänner wird auf 780 Arbeitstage veranschlagt. Auf wieviel Mann ist die Arbeitsgruppe zu verstärken, wenn die Arbeit in 560 Tagen geschafft werden soll? **Ungerade Verhältnisse**
Anl.: 1. Löse die Aufgabe mit Ansatz. 2. Beachte, daß $1280 \cdot 780$ Arbeitstage geleistet werden müssen. Bilde aus der Produktgleichung die Vgl.

9. Der Kraftarm eines Hebels ist 84 cm, der Lastarm 35 cm. Berechne a) die Kraft, die einer Last von 6 kg (15; 2,4; 7,5 kg), b) die Last, die einer Kraft von 10 kg (4,5; 9,7; 1,05 kg) das Gleichgewicht hält.

10. Der Lastarm eines Hebekrans ist 2,40 m, der Kraftarm a) 9,60, b) 5,40 m. Es sollen Lasten von 1 t (1,5; 3,2; 0,7 t) gehoben werden. Wie groß müssen die aufgewandten Kräfte mindestens sein?

C. Zum Hundertsatz. — Fehlerprozente.

Fast alle Aufgaben der Hundertsatzrechnung können leicht als Verhältnisgleichungen (mit oder ohne Rechenstab) gelöst werden.

Beisp.: Im Jahre 1932 betrug das deutsche Volkseinkommen 43 Mrd. ℛℳ, im Jahre 1937 68 Mrd. ℛℳ. Wieviel v. H. betrug die Steigerung?

Ansatz: Auf 43 Mrd. — Steigerung 25 Mrd.
„ 100 „ „ x „

Vgl.: $\frac{43}{100} = \frac{25}{x}$.

Aufbau

11. Berechne ebenso für 1936 nach Anh. II, 5 den Hundertsatz der Steigerung gegenüber 1932.

12. Ebenso für **a)** Anh. II, 6; **b)** Anh. II, 7; **c)** Anh. II, 13; **d)** Anh. II, 14.

13. Berechne, wieviel v. H. die Steigerung der Hektarerträge im Altreich gegenüber denen der Ostmark im Jahre 1937 ausmachte (Anh. II, 8a).

14. Um ausländische Zahlungsmittel (Devisen) für Nahrungsmittel und Rohstoffe hereinzubekommen, müssen wir deutsche Wertarbeit ausführen. Wieviel v. H. beträgt der Devisengewinn beim Export eines mittleren PKW., bei einem Ausfuhrerlös von **a)** 2000 ℛℳ, **b)** 3000 ℛℳ, wenn die bei ihm verwendeten ausländischen Rohstoffe **a)** 250 ℛℳ, **b)** 320 ℛℳ ausmachen?

15. Berechne die Steigerung gegenüber dem Jahre 1932 nach Anh. II, 20.

16. Wieviel v. H. macht 1932, 1933 ... die Anzahl der Arbeiter und Angestellten an der Gesamtzahl der Rundfunkteilnehmer aus? (Anh. II, 14.)

Die Straßen des Führers

Wie vor hundert Jahren der Aufbau des deutschen Eisenbahnnetzes viel zur Einigung der deutschen Stämme beigetragen hat, werden auch die Straßen Adolf Hitlers als Grundlagen eines Fernverkehrsstraßennetzes viel zum Verständnis und zur Einigung der Völker Europas beitragen. Neben diese ideelle Seite tritt wesentlich noch die wirtschaftliche.

17. Auch der ausländische Kraftfahrer fährt gern auf den Straßen des Führers. Vor 1933 besuchten jährlich durchschnittlich 300000 Kraftwagen Deutschland. Im Jahre 1935 waren es schon 590000, 1936 720000, 1937 930000[1]. **a)** Berechne die prozentualen Steigerungen im Vergleich zu 1933 (eine Einstellung!). **b)** Stelle die angegebenen Zahlen durch Strecken dar.

18. Eine Versuchsfahrt zwischen Bruchsal und Bad Nauheim hatte folgende Ergebnisse:

a) Als kürzeste Frist wurden gebraucht für die Fahrt auf der Autobahn 1 Std. 14 Min., auf der Reichsstraße 2 Std. 16 Min. Der Benzinverbrauch war auf beiden Fahrten derselbe. Um wieviel v. H. fährt also der Kraftwagen mit der gleichen Benzinmenge auf der Autobahn schneller?

b) Bei 70 km Durchschnittsgeschwindigkeit verbrauchte der Wagen 11 *l* auf der Autobahn, 17 *l* auf der Reichsstraße. Wieviel v. H. betrug die Benzinersparnis?

19. Ein 6,5-t-Diesellastzug brauchte auf einer Meßfahrt (s. Nr. 18) auf der Autobahn nur 33,4 *l* gegenüber sonst 48,2 *l* für 100 km. Wieviel v. H. Ersparnis?

---

[1] Nach Ausführungen von Dr. Todt auf dem Reichsparteitag 1937.

20. Will man Schätz- oder Meßfehler verschiedener Personen für verschiedene Entfernungen vergleichen, so genügt es nicht, den wirklichen Fehler zu bestimmen. Man stellt den prozentualen Fehler fest. So werden bei Sportkämpfen, Geländeübungen usw., in HJ, SA und Wehrmacht die Leistungen nach der Größe des prozentualen Fehlers gewertet.

Beispiel: Bei einer Geländeübung der HJ wird ein Ziel A, das 1050 m entfernt ist, auf 1200 m, ein Ziel B, das 840 m entfernt ist, auf 700 m geschätzt. Welche Schätzung ist besser?

Absoluter, relativer, prozentualer Fehler

Anleitung: Man unterscheidet den wirklichen (absoluten), den relativen und den prozentualen Fehler.

Es beträgt der wirkliche Fehler $+\,150$ m $(-\,140$ m$)$ auf 1050 m (840 m),

" " " relative " $\frac{150}{1050}$ m $\left(\frac{140}{840}\text{ m}\right)$ " 1 m,

" " " prozentuale " $\frac{150\cdot 100}{1050}$ m $\left(\frac{140\cdot 100}{840}\text{ m}\right)$ " 100 m.

Folgende Tabelle gibt die Vergleichsmöglichkeit für die beiden Beobachtungen.

	Entfernung geschätzt	Entfernung gemessen	Fehler absoluter	Fehler relativer	Fehler v. H.
A	1200 m	1050 m	**150**	$\frac{150}{1050}$	**$14\frac{2}{7}$**
B	700 m	840 m	**140**	$\frac{140}{840}$	**$16\frac{2}{3}$**

Trotz des absolut größeren Fehlers bei A war diese Entfernungsschätzung besser.

21. Zeichne zwei beliebig lange Strecken. Schätze und miß ihre Länge, bestimme die Fehler und trage alles wie bei Nr. 20 in eine Tabelle ein.

22. Zeichne nach dem Augenmaß Strecken von **a)** 4, **b)** 12, **c)** 9,5 cm Länge. Miß nach und bestimme die Fehler (Tabelle).

23. Zur Feststellung der Fehlerprozente beim Entfernungsschätzen wird im deutschen Jungvolk eine bestimmte Tafel benutzt. Das Bild mit dem Zinsstrahl in Bd. I kann diese Tabelle ersetzen, wenn die Zahlen an der waagerechten Achse die wahre Entfernung und die an der senkrechten Achse den absoluten Schätzungsfehler angeben. An den Zinsstrahlen kann man dann die Fehlerprozente ablesen. — Bei 900 m Entfernung beträgt der Fehler 50 m. Bestimme die Fehlerprozente.

24. Bestimme die prozentualen Fehler in den Aufg. Bd. I, S. 47 **a)** Nr. 9; **b)** Nr. 10; **c)** Nr. 11.

Anm.: Auch die Aufgaben der Tausendsatzrechnung lassen sich nach Art der Vgl. lösen (vgl. Bd. I, 52. Abschn.). Tausendsatz

D. Fortlaufende Verhältnisgleichungen. — Richtzahlen.

In Nr. 16 b, S. 129, wurden am Rechenstab mehr als zwei Verhältnisse einander gleichgesetzt: $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}$. In diesem Falle ist jeder Zähler die Hälfte des zugehörigen Nenners, die Zähler stehen untereinander in gleichem Verhältnis wie die entsprechenden Nenner:

$$1:3:4:5 \text{ wie } 2:6:8:10.$$ Allgemein gilt:

Fortlaufende Proportion

Erkl. 1: Durch Gleichsetzung von mehr als zwei Verhältnissen erhält man eine fortlaufende Proportion:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots (= k),$$

die man schreiben kann: $a:b:c:\ldots = a':b':c':\ldots$
oder auch: $a = k \cdot a'$, $b = k \cdot b'$, $c = k \cdot c'$, ...

Für ihre rechnerische Behandlung ist der Rechenstab besonders vorteilhaft, da er mit einer Einstellung mehrere Fragen beantwortet.

Beispiel: Berechne in der Vgl. $2:4:5:6 = 100:x:y:z$ oder in $3:5:7:8 = 100:x:y:z$ die fehlenden Werte x, y, z.

Kampf dem Verderb

25. a) Aus einer bestimmten Knochenmenge werden 50 kg Fett, 75 kg Leim und 200 kg Futter- und Düngemittel gewonnen. Berechne den Hundertsatz jedes Anteiles.

Anl.: Auf die in der Aufgabe angenommene bestimmte Menge, die 100% entsprechen soll, kommen demnach $50 + 75 + 200 = 325$ Teile, somit gilt: $\frac{100}{325} = \frac{x}{50} = \frac{y}{75} = \frac{z}{200}$.

Vergl. mit deinen Ergebnissen folgende Pressenotiz: Aus 100 kg Knochen gewinnt man 8 kg Fett, 28 kg Leim und 60 kg Knochenmehl.

b) Welche Menge Fett, Leim und Knochenmehl liefern $5\frac{1}{2}$ dz Knochen, die in einem Vierteljahr in einer Schule gesammelt wurden?

c) Berechne die entsprechenden Zahlen für die in Deutschland aus Schlachtungen anfallende Knochenmenge, die in den Jahren 1927···37 durchschnittlich etwa 350000 t betrug. Bis zum Jahre 1938 sind davon 80% verloren gegangen. Dafür mußten Knochen eingeführt werden.

26. Das Schießpulver ist ein Gemisch von Salpeter, Schwefel und Kohle im Gewichtsverhältnis 75 : 12 : 13. Wieviel g eines jeden dieser Bestandteile braucht man zur Herstellung von 1300 g Schießpulver?

Vorbem.: Bei Vergleichen geben häufig die absoluten Zahlen kein klares Bild. Deshalb setzt man eine der zu vergleichenden Zahlen, die man als Ausgangszahl (Bezugszahl) wählt, gleich 100 und berechnet die anderen Werte als 4. Proportionale in Hundertteilen (Prozenten) dieser Ausgangszahl. Die Ergebnisse nennt man Richt- oder Indexzahlen. Besonders gern wendet man sie bei räumlich oder zeitlich getrennten Massenerscheinungen an. Dabei muß stets die Bezugszahl angegeben werden. (s. Nr. 17.)

Erkl. 2: Gibt man dem 1. Gliede einer fortlaufenden Vgl. den Wert 100, so nennt man die darauffolgenden Zahlen Richt- oder Indexzahlen.

Richt- oder Indexzahlen

Beispiel: Als es im Jahre 1933 Deutschland gelungen war, die Arbeitslosenziffer von 6,0 Mill. am 1. 1. 1933 auf 3,8 Mill. am 1. 10. 1933, also um 2,2 Mill. zu senken, wiesen Gegner des Nationalsozialismus darauf hin, daß auch die Vereinigten Staaten von Amerika in der gleichen Zeit ihre Arbeitslosenzahl von 12,2 auf 10,0 Mill., also um die gleiche Zahl gesenkt hätten (Anh. II, 11). Nach ihnen lag also gar keine besondere Leistung des Nationalsozialismus vor! Ein anderes Bild ergeben sofort die entsprechenden Indexzahlen.

Setzt man in beiden Fällen die Arbeitslosenzahl vom 1. 1. 1933 gleich 100 und berechnet die Richtzahl für den 1. 10., so ergibt sich:

für Deutschland
6,0 Mill. Arbeitslose $\triangleq$ 100
3,8 „ „ $\triangleq$ x

$$\frac{6{,}0}{3{,}8} = \frac{100}{x}$$
$\underline{x = 63}$, d. h.

für USA.
12,2 Mill. Arbeitslose $\triangleq$ 100
10,0 „ „ $\triangleq$ y

$$\frac{12{,}2}{10{,}0} = \frac{100}{y}$$
$\underline{y = 82}$, d. h.

die Arbeitslosenziffer wurde bei uns um fast 40%, in USA. um noch nicht 20% gesenkt. Nur nebenbei sei auf die Verarmung des durch Weltkrieg, Versailler Diktat, Inflation und Systemherrschaft ausgebeuteten Deutschlands und die ungeheuren Räume und den natürlichen Reichtum Amerikas hingewiesen.

27. Rechne nach Anh. II, 11 die Arbeitslosenzahlen a) für das Deutsche Reich, b) England, c) USA., d) Frankreich in Indexzahlen um und setze jedesmal dabei die Zahl vom 1. 4. 1933 gleich 100. **Aufbau**

28. Stelle die Zahlen nach Anh. II, 5, die die gewaltige Arbeits- und Wirtschaftskraft unseres Volkes zeigen, in Indexzahlen dar. Setze die Zahl des Jahres 1933 gleich 100. Besorge dir die entsprechenden Zahlen der Weltwirtschaft, setze auch sie in Richtzahlen um und vergleiche.

29. Rechne nach Anh. II, 14 in Richtzahlen (bezogen auf 1933) um:
a) die Zahl der Rundfunkteilnehmer,
b) die Zahl der daran teilnehmenden Arbeiter und Angestellten.
c) Wieviel v. H. machen die Arbeiter und Angestellten jedesmal aus?

Nicht nur in dieser erweiterten Hundertsatzrechnung finden die fortlaufenden Verhältnisgleichungen Anwendung, wie die folgenden Aufgaben zeigen.

30. Der Kochgasverbrauch vermindert sich bei Benutzung einer Kochkiste. Eine Hausfrau stellt das Verhältnis von 4 : 5 fest. Wieviel könnten Hausfrauen sparen, die einen Verbrauch von 20 cbm (22; 35; 41; 53; 64; 79 cbm) haben? (Anl.: $\frac{4}{5} = \frac{?}{20} = \frac{?}{22} = \frac{?}{35} = \frac{?}{41} \ldots$; eine Einstellung!)

31. Der durch schlechte Ausnutzung und Verderb in städtischen Haushalten ungenutzte Teil der Lebensmittel verhält sich zum Verbrauch rund wie 1 : 12. Wieviel Kilogramm gehen in einem Haushalt verloren, der in einem Monat rund 126 kg (150; 240; 95 kg) Lebensmittel verbraucht? (Anl.: $\frac{1}{12} = \frac{?}{126} = \ldots$ eine Einstellung.)

32. Im Durdreiklang ist das Schwingungsverhältnis $c : e : g : \bar{c} = 4 : 5 : 6 : 8$. Berechne die Schwingungszahlen, wenn c die Schwingungszahl 261 hat.
Anl.: $\frac{261}{4} = \frac{e}{5} = \frac{g}{6} = \frac{\bar{c}}{8}$ (auf Ganze abrunden!).

33. In Deutschland entfielen 1936 0,43 ha landwirtschaftlich genutzte Fläche auf die Ernährung für eine Person. Die entsprechenden Flächen von Deutschland, Frankreich, USA. und Sowjetrußland verhalten sich wie 10 : 19 : 70 : 73. Berechne die Flächen der drei anderen Länder. **Volk ohne Raum**

Löse auch ohne Rechenstab:

34. Ein Ei wiegt durchschnittlich 50 g. Wieviel Eiweiß, Eigelb und Eischale gehören dazu, wenn sich ihre Gewichte wie 6 : 3 : 1 verhalten?

35. Siegellack wird aus Terpentin, Zinnober, Schellack und Kreide im Gewichtsverhältnis t : z : s : k = 4 : 7 : 5 : 1 hergestellt. Wieviel Gewichtsteile eines jeden dieser Stoffe sind a) in 850 g, b) in einer Siegellackstange von 102 g Gewicht vorhanden?

36. Drei Kaufleute verdienen bei einem gemeinsamen Geschäft 1870 RM. Wie ist der Gewinn zu verteilen, wenn die Einlage des ersten 2400 RM, die des zweiten 3600 RM und die des dritten 4200 RM betrug?
Beachte: Gesamteinlage ≙ Gesamtgewinn; Leiter A und B.

E. Einschaltung (Interpolation).

37. Eine Drahtspirale wurde mit verschiedenen Gewichten p belastet und die dabei auftretende Verlängerung s gemessen. Es wurden die Werte der nebenstehenden Tabelle gefunden: Berechne die Verlängerung der Spirale bei einer Belastung von **a)** 7, **b)** 13, **c)** 19 g. **d)** Wie schwer ist ein Gewicht, das eine Verlängerung von 18 mm verursacht? (Anwendung bei der Federwaage).

p in g	5	10	15	20
s in mm	8,2	16,4	24,6	32,8

Anl.: Wächst p von 5 g auf 10 g, also um 5 g,
so wächst s von 8,2 mm auf 16,4 mm, also um 8,2 mm;
wächst p um 2 g (von 5 auf 7 g), so wächst s um x, also gilt:

5 g Belastung verursachen 8,2 mm Verlängerung
2 g „ „ x mm „
oder $\frac{5}{2} = \frac{8,2}{x}$.

Es ergibt sich x = 3,3 mm, d. h. die Verlängerung ist

$$s = 8,2 + 3,3 = 11,5 \text{ mm}.$$

Der Rechenstab löst die Aufg. **a)** bis **d)** mit einer Einstellung: 8,2 auf B unter 5 auf A. Auf A stehen dann die Gewichte in g, auf B die Verlängerungen in mm (Tabellenbildung).

38. Um eine Federwaage zu eichen, beobachtet man den Zusammenhang zwischen Federlänge (l) und Gewicht (p) und stellt fest:

p	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2
l	20	20,8	21,6	22,4	23,2

Wie schwer ist eine Last, wenn l = 22 ist?

Einschaltung oder Interpolation

Erkl. 3: Das Berechnen von Zwischenwerten aus beobachteten oder bekannten Werten (z. B. aus den Angaben einer Tabelle) bezeichnet man als Einschalten (Interpolieren).

39. Liegt eine Kurve vor, so kann man die fehlenden Zwischenwerte einfach an dieser ablesen, z. B. die Steighöhen nach 5, 15, 25 Min. (Bild 184).

Zusammenfassung.

Das Rechnen mit Verhältnisgleichungen ist der Bruchrechnung verwandt. Vielfach ist es eine große Erleichterung, mit der Verhältniszahl zu arbeiten.

Die Anwendung der Verhältnisgleichungen erleichtert die Lösung vieler Dreisatzaufgaben, deren Ausrechnung mit Hilfe des Rechenstabes erheblich vereinfacht wird; besonders gilt dies für Aufgaben der Hundertsatz- und Tausendsatzrechnung, über fortlaufende Proportionen, Richt- oder Indexzahlen.

XII. Der Kreis.

37. Abschnitt: Wiederholungen und Ergänzungen.

A. Kreis und Kugel.

1. Wir haben bereits gefunden:

Ortssatz 1: **Alle Punkte in der Ebene, die von dem Punkte M den gleichen Abstand r haben, liegen auf dem Kreis um M mit r.**

Ortssatz 2: Alle Punkte im Raume, die von dem Punkte M den gleichen Abstand r haben, liegen auf der Kugel um M mit r.

2. Wieviel verschiedene Lagen kann ein Punkt a) in der Ebene zu einem Kreise, b) im Raume zu einer Kugel einnehmen? **Kreis und Punkt**

3. Wie liegt a) der Punkt P_1, für den $\overline{MP_1} < r$, b) der Punkt P_2, für den $\overline{MP_2} = r$, c) der Punkt P_3, für den $\overline{MP_3} > r$ ist, zum Kreise um M mit r? Zeichnung!

4. Beantworte die Fragen a) bis c) für die Kugel um M mit r.

5. a) Wie verfährt der Gärtner, wenn er ein kreisrundes Beet anlegen will? **Gärtnerkonstruktion**

b) Zeichne mit Hilfe eines Bindfadens und zweier Reißnägel die krumme Linie nach Bild 207 (Fadenkonstruktion). Sie heißt Ellipse.

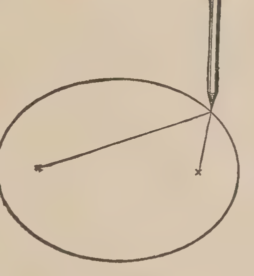


Bild 207.

6. Zwei Festungswerke liegen 8 km voneinander entfernt. Ihre Geschütze haben eine Reichweite von 16 km. Zeichne die Fläche, die die Geschütze beider Werke gemeinsam bestreichen (Maßstab 1 km $\triangleq \frac{1}{2}$ cm).

7. Ein kreisförmiges Gartenbeet von 20 m Halbmesser wird von einem Punkte seines Umfanges aus mit einer Spritze besprengt, deren Strahl 25 m weit reicht. Zeichne die Fläche, die von einem Punkte aus bespritzt werden kann (Maßstab 1 m $\triangleq$ 2 mm).

8. a) Klebe auf eine Kreisscheibe in Richtung eines Durchmessers ein dünnes Holzstäbchen und drehe sie um dieses als Achse. Was entsteht dabei? (Bild 208)[1]. Erkläre Pole, Breitenkreise und Längenkreise (Bd. I). **Kugel**

b) Bild 209 zeigt die Kugel zwischen zwei Holzklötzen. Man kann sie drehen, ohne daß die Klötze ihre Lage ändern. Erkläre nach Ortssatz 2 die Anwendung bei den Kugellagern (Bild 210). **Kugellager**

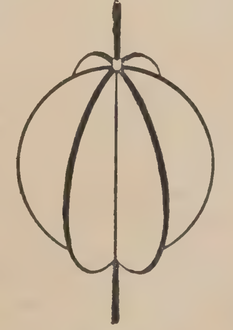


Bild 208.

---

[1] vgl. Zentrifugalapparat, Schwungmaschine in der Physik.

Ebener Schnitt der Kugel

c) Zerschneide eine Kugel (Plastilin) so, daß der Schnitt durch den Mittelpunkt geht. Was für eine Schnittfigur entsteht (Bild 211)?

d) Bild 212 zeigt einen ebenen Schnitt durch eine Kugel, der nicht durch ihren Mittelpunkt O geht. Der zur Schnittebene senkrechte Durchmesser schneidet diese in M. Verbindet man beliebige Punkte B_1 und B_3 der Schnittlinie mit M und O, so folgt aus der Deckungsgleichheit der Dreiecke OMB_1 und OMB_3 (s, s, w), daß $\overline{MB_1} = \overline{MB_3}$ ist. Daraus folgt der



Bild 209.

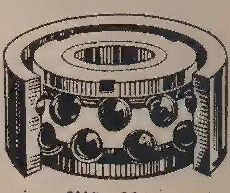


Bild 210.

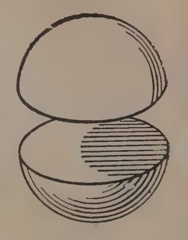


Bild 211.

Lehrs. 1: Jeder ebene Schnitt durch eine Kugel erzeugt einen Kreis.

Bild 212.

Groß-, Breiten-, Längenkreis

Erkl. 1: Großkreise heißen solche Kreise, deren Ebenen den Mittelpunkt der Kugel enthalten.

e) Die Halbmesser r der Großkreise sind zugleich Radien der Kugel und stets größer als ϱ; im $\triangle OMB_3$ ist r Spannseite, ϱ eine Lotseite.

f) Sind alle Breitenkreise oder Längenkreise Großkreise?

g) Welcher Winkel bestimmt die geographische Breite (Bild 212)?

h) Wovon hängt die Größe eines Breitenkreises ab?

Geographische Breite

9. Zeichne als Achsenschnitt der Erde einen Kreis mit r = 6,4 cm. Welchem Maßstab entspricht die Zeichnung? Trage darin den Halbmesser des Breitenkreises von a) Berlin, b) Wien, c) Rom, d) deinem Heimatort, e) Tokio, f) Daressalam, g) Windhuk, h) Duala ein. Sieh im Atlas nach!

B. Symmetrie am Kreise.

10. a) Welche Art von Symmetrie tritt am Kreise auf? Begründe es.

b) Die ausgezeichneten Symmetrieverhältnisse am Kreise bedingen seine vielfache Verwendung bei Schmuckfiguren. (Vgl. Bild 61.)

c) Untersuche die Bilder 72 a ⋯ d S. 54 auf die Art ihrer Symmetrie. Zeichne sie im vergrößerten Maßstab.

Erkl. 2: Mittelpunktswinkel heißt ein von zwei Halbmessern gebildeter Winkel (Bild 213).

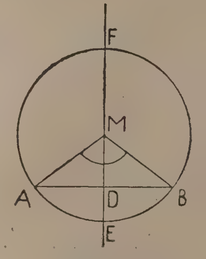


Bild 213.

Man sagt: Der Mittelpunktswinkel AMB steht über der Sehne $\overline{AB}$ oder über dem Bogen $\widehat{AB}$. (Beachte, daß $\overline{AB}$ die Kreislinie in zwei Bögen teilt.)

11. a) Weise nach: Zu gleichen Mittelpunktswinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen, gleiche Bögen und gleiche Kreisausschnitte.

b) Beweise den

Lehrs. 2: Gleiche Sehnen eines Kreises haben gleichen Abstand vom Mittelpunkt.

c) Ziehe in einem Kreis (r = 4 cm) einen Durchmesser und dazu im Abstande (x) von je $\frac{1}{2}$ cm parallele Sehnen. Miß die zugehörigen Sehnenlängen (y), trage x und y in eine Tabelle ein und zeichne die zugehörige Kurve. Wie ändert sich y mit x?

d) Zeichne in einen Kreis (r = 5 cm) der Reihe nach Sehnen von der Länge x = $\frac{1}{2}$ cm, 1 cm, $1\frac{1}{2}$ cm usw. bis 10 cm beliebig ein, und miß die zugehörigen Mittelpunktswinkel (y). Stelle die Ergebnisse in einer Tabelle zusammen, und zeichne die Kurve (Maßstab $20^0 \triangleq 1$ cm). Wie hängt y von x ab?

12. a) Wieviel Symmetrieachsen hat ein Kreis mit eingezeichneter Sehne? (Bild 213). **Kreis und 2 Punkte**

b) Wendet man die Lehrsätze der axialen Symmetrie auf das gleichschenklige „Bestimmungs“dreieck AMB (Bild 213) an so folgt der

Lehrs. 3: Der Mittelpunkt eines Kreises liegt auf der Mittelsenkrechten jeder Sehne.

c) Zeichne fünf Kreise, die durch die Punkte A und B gehen. Es gilt:
Ortssatz 3: Die Mittelpunkte aller Kreise, die eine gegebene Strecke (AB) als Sehne haben (oder die durch zwei gegebene Punkte A und B gehen) liegen auf deren Symmetrieachse.

13. Zeichne einen Kreis, der durch drei gegebene Punkte geht, oder **beschreibe um ein Dreieck einen Kreis.** **Kreis und 3 Punkte**

Beschreibe ausführlich die Lösung (Bild 214). Wieviel Mittelsenkrechte sind nötig? Den Umkreisradius bezeichnet man mit r ($\overline{MA} = \overline{MB} = \overline{MC} = r$). **Umkreis**

Bild 214.

Satz: Der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten ist der Mittelpunkt des Umkreises.

14. Die drei Beobachtungsstellen A, B und C eines Schallmeßtrupps hören in einem besonderen Falle den Abschuß eines Geschützes zu gleicher Zeit. Es ist $\overline{AB} = 2{,}5$ km und $\overline{BC} = 4$ km; $\sphericalangle$ ABC beträgt 2133^{-} (= ?°). Bestimme durch Zeichnung im Maßstab 1 : 100000 den Standort des Geschützes. **Schallmeßtrupp**

38. Abschnitt: Kreis und Gerade.

1. a) Welche verschiedenen Lagen kann eine Gerade zum Kreise einnehmen?

1. Entstehungsart der Tangente

b) Eine Schneidende strebt bei Parallelverschiebung einer Grenzlage zu; ihre Schnittpunkte mit dem Kreise rücken immer näher zusammen. Die Schneidende (Sekante) geht in eine Berührende (Tangente) über (Bild 215).

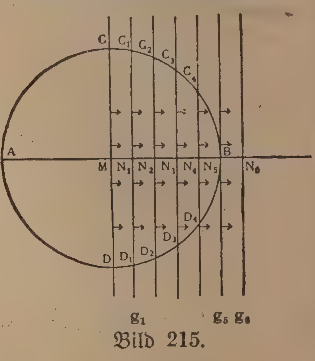


Bild 215.

$\overline{MN_1} < r$:		**schneidet**		
$\overline{MN_5} = r$:	die Gerade	**berührt**	den Kreis;	
$\overline{MN_6} > r$:		**meidet**		

Kreis		**zwei Punkte**	
und	haben	**einen Punkt**	gemein.
Gerade		**keinen Punkt**	

Kugel und Ebene

2. Wieviel verschiedene Lagen kann eine Ebene zu einer Kugel einnehmen? Auch die Schnittebene strebt bei Parallelverschiebung einer Grenzlage zu; der Schnittkreis wird immer kleiner, die Ebene geht schließlich in eine Berührungsebene über.

2. Entstehungsart der Tangente

3. a) Dreht sich die Sekante AB um den Punkt A (Bild 216), so bewegt sich B auf dem Kreise nach A hin. Die Länge der Sehne nimmt vom Durchmesser aus ab; die Sekante strebt dabei einer Grenzlage zu.

b) Zeichne nach Bild 216 einen Kreis ($r = 3$ cm) und drehe eine beliebige Gerade g um einen Punkt A auf dem Umfang des Kreises. Miß $\sphericalangle \alpha$, den g mit dem Durchmesser $\overline{AM}$ bildet, und die zugehörigen Sehnenlängen y. Trage α und y in eine Tabelle ein und zeichne die zugehörige Kurve (Maßstab: $10^0 \mathrel{\hat{=}} 10$ mm).

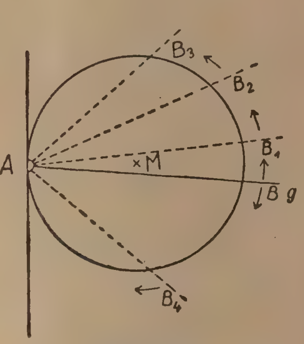


Bild 216.

4. Beweise mit Hilfe der axialen Symmetrie nach Nr. 1 b den

Lehrs. 4: Der Berührungshalbmesser einer Tangente steht auf ihr senkrecht.

Umkehrungssatz: **Die Senkrechte im Endpunkt eines Halbmessers ist Tangente.**

Grundaufgaben

5. Aufg.: **In einem Punkt an einen Kreis die Tangente zu zeichnen.** Beschreibe die Lösung (Hilfslinie: Berührungshalbmesser), Beweis (Bild 217)!

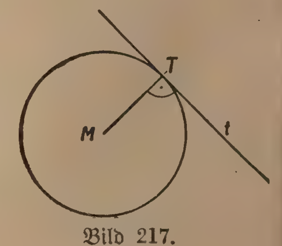


Bild 217.

6. Aufg.: **Von einem Punkt an einen Kreis eine Tangente zu legen.** Wie muß der Punkt zum Kreise liegen?

Lösung: 1. Ziehe MP, 2. Kreis über $\overline{MP}$ als Durchmesser (Schnittpunkte A und A'), 3. PA und PA' sind die gesuchten Tangenten (Bild 218).

Beschreibe die Lösung ausführlich — Beweis!

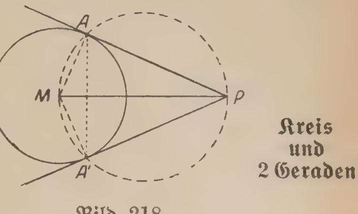


Bild 218.

Kreis und 2 Geraden

7. a) Wieviel Lösungen hat Aufg. 6?

b) MP heißt Zentrale des Punktes P, $\overline{AA'}$ seine Berührungssehne, $\overline{PA}$ und $\overline{PA'}$ nennt man die Längen der Tangenten.

c) Begründe mit Hilfe der Symmetrie (Bild 218):

Lehrs. 5: Die beiden von einem Punkte an einen Kreis gelegten Tangenten sind gleichlang, die Zentrale halbiert den Winkel der Tangenten, den Winkel der Berührungshalbmesser und die Berührungssehne.

d) Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene Geraden berühren? (s. Lehrs. 2a, S. 55).

Anwendungen.

8. Der Winkel, unter dem ein Kreis von einem Punkte P aus erscheint, ist der Winkel der Sehstrahlen von P aus, die Tangenten an den Kreis sind. Er ist zugleich der Sehwinkel der Berührungssehne (vgl. S. 49, Nr. 12). Wie ändert sich der Sehwinkel (y), wenn P sich vom Kreise entfernt ($\overline{MP} = x$)? Zeichne und miß! Tabelle! **Sehwinkel**

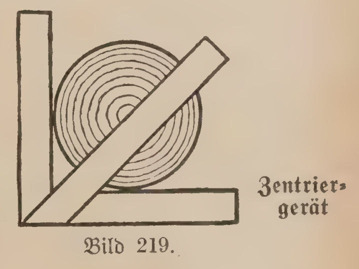
9. Zeichne an einen gegebenen Kreis zwei Tangenten, die den Winkel $\alpha = 60^0$, (38^0, 90^0) einschließen. Wieviel Lösungen hat die Aufgabe?

Anl.: Benutze den Winkel der beiden Berührungshalbmesser.

10. Wo liegen alle Punkte, von denen aus ein gegebener Kreis (M; r) unter dem Winkel $\alpha = 50^0$ (70^0, 80^0) erscheint?

11. Bestimme auf einer Geraden einen Punkt, von dem aus der Kreis (M; r) unter dem Winkel $\alpha = 60^0$ (38^0, 90^0) erscheint. Grenzbetrachtung?

12. Bild 219 zeigt ein aus drei Leisten gefertigtes „Zentriergerät", mit dem man leicht den Mittelpunkt kreisförmiger Querschnitte bestimmen kann. Beschreibe Bau und Anwendung. **Zentriergerät**


Bild 219.

13. a) **Zeichne Kreise, die drei gegebene Geraden berühren.** Wieviel Lösungen hat die Aufgabe? Wann ist die Lösung nicht möglich? **Grundaufgabe**

b) **In ein Dreieck einen Kreis zu zeichnen.** Beschreibe die Lösung ausführlich. Man bezeichnet den Halbmesser des Inkreises mit ϱ. **Inkreis**

Satz: Der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist der Mittelpunkt des Inkreises.

39. Abschnitt: Kreis und Winkel.

Erkl. 3: Umfangswinkel heißt ein von zwei Sehnen gebildeter Winkel. Sein Scheitel liegt auf dem Kreisumfang.

Der zugehörige Mittelpunktswinkel steht mit ihm über demselben Bogen.

1. a) Zeichne über dem Bogen $\widehat{AB}$ einige Umfangswinkel und miß sie.
b) Übertrage $\sphericalangle\,\gamma$ aus $\triangle ACB$ auf Pappe, mache seine Schenkel länger als die Dreiecksseiten sind und schneide ihn aus. Bringe diesen Winkel γ mit $\sphericalangle\,C$ in der Zeichnung zur Deckung und bewege ihn so, daß seine Schenkel stets durch die Punkte A und B gehen. Zur besseren Führung befestige in A und B Reißnägel. Markiere einige Lagen des Punktes P auf dem Zeichenblatt, verbinde die Punkte miteinander. Was für eine Linie entsteht?

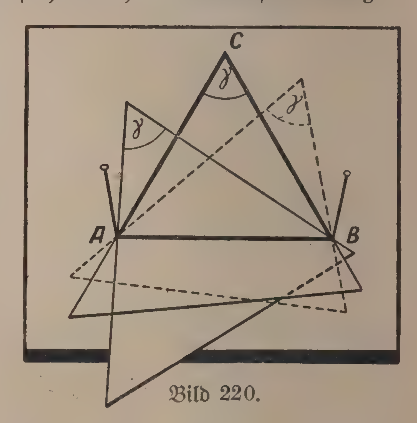


Bild 220.

Bild 221 a.

c) Zeichne mehrere Umfangswinkel $\gamma_1, \gamma_2 \ldots$ und die zugehörigen Mittelpunktswinkel $\delta_1, \delta_2 \ldots$, miß sie aus, stelle die Werte in einer Tabelle zusammen und vergleiche. — Wir beweisen allgemein den

Lehrs. 6: Jeder Umfangswinkel ist halb so groß wie der zugehörige Mittelpunktswinkel.

Beim Beweis unterscheiden wir drei Fälle:

1. Fall: Der Kreismittelpunkt liegt auf einem Schenkel des Umfangswinkels.

Es ist im Bild 221 a: $\gamma = \frac{1}{2}\delta$ (S. 67, Nr. 16).

Der Kreismittelpunkt liegt im

2. Fall: innerhalb — **3. Fall:** außerhalb — der Schenkel des Umfangswinkels.

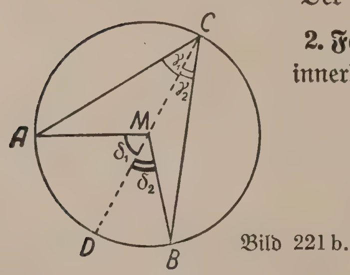


Bild 221 b.

Es ist:

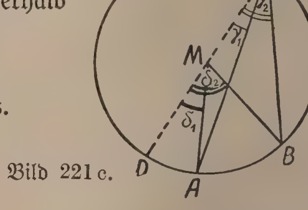


Bild 221 c.

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \tfrac{1}{2}\delta_1\\ \gamma_2 &= \tfrac{1}{2}\delta_2\end{aligned}\right\}\text{(nach dem 1. Fall)}$$

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \tfrac{1}{2}\delta_1 + \tfrac{1}{2}\delta_2$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\delta.$$

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \tfrac{1}{2}\delta_1\\ \gamma_2 &= \tfrac{1}{2}\delta_2\end{aligned}\right\}\text{(nach dem 1. Fall)}$$

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \tfrac{1}{2}\delta_2 - \tfrac{1}{2}\delta_1$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\delta.$$

2. Daraus ergeben sich unmittelbar folgende Zusätze:
   a) Alle Umfangswinkel über demselben Bogen sind gleich (vgl. 1 b).
   b) Zu gleichen Bogen eines Kreises gehören gleiche Umfangswinkel.

3. a) Weise durch Zeichnung und Überlegung nach, daß der Umfangswinkel über einem Bogen, der kleiner (größer) als ein Halbkreis ist, selbst kleiner (größer) als ein Rechter ist.
   b) Aus Lehrs. 6 ergibt sich noch einmal (vgl. S. 86, Nr. 7):

Der Umfangswinkel im Halbkreis ist ein Rechter. Satz des Thales

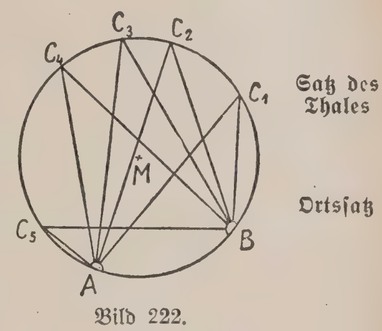


Bild 222.

4. a) Wo liegen die Scheitel aller Winkel von der gegebenen Größe γ, deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen?
   b) Ortssatz 4: Die Spitzen aller Dreiecke, von denen eine Seite (c) und ihr gegenüberliegender Winkel (γ) gegeben sind, liegen auf dem Kreisbogen, der über c als Sehne den Winkel γ als Umfangswinkel hat. Ortssatz
   c) **Grundaufg.: Über einer gegebenen Strecke ($\overline{AB}$) als Sehne den Kreisbogen zu zeichnen, der einen gegebenen Winkel (γ) als Umfangswinkel enthält.** Der Ortskreis

   Lösung: Man zeichne die Mittelsenkrechte von $\overline{AB}$, trage in einem beliebigen Punkte X an diese $\sphericalangle\, \gamma$ an und ziehe zu seinem freien Schenkel durch A die Parallele. Diese schneidet die Mittelsenkrechte in M; der Kreisbogen um M mit $\overline{MA}$ ist der gesuchte.

   Ist es im Bild der obere oder der untere?

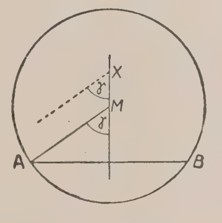


Bild 223.

   d) Führe die Zeichnung auch für einen stumpfen Winkel aus.

5. a) Wo liegen alle Punkte, von denen aus eine gegebene Strecke unter einem gegebenen Winkel erscheint (S. 49, Nr. 12)?
   b) Wo liegen die Scheitel aller rechten Winkel, deren Schenkel durch zwei feste Punkte A und B gehen?

Anwendungen.

6. a) Ein Spähtrupp will den Punkt X, in dem er sich befindet, in die Karte einzeichnen, um die Entfernung von den Orten A, B und C zu bestimmen. Nach der Karte sind die Orte A und B 4 km, B und C 5 km voneinander entfernt und schließen den Winkel $\alpha = 140^0$ ein. $\overline{AB}$ erscheint unter dem (Seh-) Winkel $\beta = 50^0$, $\overline{BC}$ unter dem (Seh-) Winkel $\gamma = 60^0$. Bestimme Rückwärts einschneiden

durch eine Zeichnung Punkt X (Maßstab: 1 km $\triangleq$ 1 cm) und die gesuchten Entfernungen (Bild 224).

Anm.: Diese Festlegung eines Punktes nennt man Rückwärtseinschneiden; sie kann zur Bestimmung des eigenen Standortes im Gelände dienen. (Die Konstruktion versagt, wenn A, B, C und X auf einem Kreise liegen: „gefährlicher Kreis").

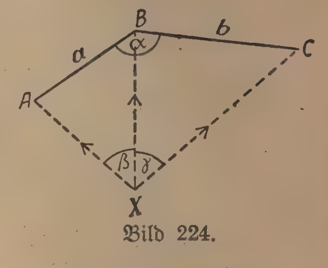


Bild 224.

b) Löse die gleiche Aufgabe, für:
$\overline{AB} = 2{,}6$ km, $\overline{BC} = 7{,}3$ km, $\sphericalangle\, \alpha = 100^0$, $\sphericalangle\, \beta = 40^0$, $\sphericalangle\, \gamma = 70^0$.

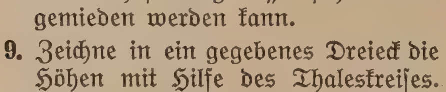
Rückwärtseinschneiden

7. Auf dem linken Rheinufer (Bild I der Anlage) steht ein Beobachter, dem die Verbindungslinie Mäuseturm — Ruine Ehrenfels unter dem Winkel $\alpha = 20^0$ und die Verbindungslinie Ehrenfels — Nationaldenkmal unter dem Winkel $\beta = 77^0$ erscheint. Bestimme durch maßstäbliche Zeichnung seinen Standort.

8. a) Von einem Schiff aus erscheint die Entfernung der beiden Leuchttürme A und B unter dem Winkel $\alpha = 35^0$ und die Entfernung des Leuchtturms B von dem Kirchturm C unter dem Winkel $\beta = 48^0$. Nach der Seekarte ist die Strecke $\overline{AB} = 5$ sm, $\overline{BC} = 7{,}5$ sm und $\sphericalangle\, ABC = \gamma = 155^0$. Bestimme den Standort des Schiffes und seine Entfernung von A, B und C aus einer maßstäblichen Zeichnung.

Gefahrenkreis

b) Zwischen den Orten A und B liegt vor der Küste eine große Sandbank. Erkläre aus der Zeichnung (Bild 225),



wie durch Peilung der „Gefahrenkreis" gemieden werden kann.

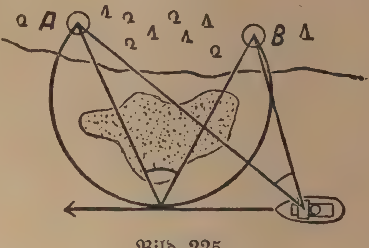


Bild 225.

9. Zeichne in ein gegebenes Dreieck die Höhen mit Hilfe des Thaleskreises.

10. Bei den folgenden Aufgaben ist von dem gesuchten oder einem Hilfsdreieck eine Seite und ihr gegenüberliegender Winkel gegeben, so daß es sich mit Hilfe des Umkreises zeichnen läßt; der gegebene Winkel wird als halber Mittelpunktswinkel benutzt.

Beispiel: $\triangle$ aus: a, r, γ; i. W.?

Plan (gekürzt): Ist $\triangle$ ABC das gesuchte, so ist $\overline{BC} = a$, $\sphericalangle\, C = \gamma$, $\overline{MA} = \overline{MB}$ $(= \overline{MC}) = r$; ferner ist $\sphericalangle\, AMD = \sphericalangle\, BMD = \gamma$, $MD \perp AB$. $\triangle$ AMB ist Hilfsdreieck (sws); denn es läßt sich aus $\overline{MA} = \overline{MB} = r$ und $\sphericalangle\, AMB = 2\gamma$ zeichnen. C liegt 1. auf: $\bigcirc$ (M; r), 2. auf $\bigcirc$ (B; a) (Bild 214, S. 141).

a) $\triangle$ aus: c, γ, h_c b) $\triangle$ aus: p, q, γ c) $\triangle$ aus: c, h_a, γ
d) $\triangle$ aus: a, s_a, α e) $\triangle$ aus: r, α, γ f) $\triangle$ aus: a, c, r

11. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus:
a) c, h_c; b) p, q; c) u, v.

40. Abschnitt: Kreis und Kreis.

Lage zweier Kreise zueinander

1. Erkl. 4: **Die Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier Kreise heißt ihre Zentrale.**

Die Zentrale zweier Kreise ist ihre Symmetrieachse.

Da ein Punkt auch als Kreis mit dem Halbmesser Null aufgefaßt werden kann, hat man seine Verbindungslinie mit einem Kreismittelpunkt ebenfalls Zentrale genannt (S. 143, Nr. 7 b).

Erkl. 5: **Eine Gerade, die zwei Kreise berührt, heißt gemeinsame Tangente** (Bild 226).

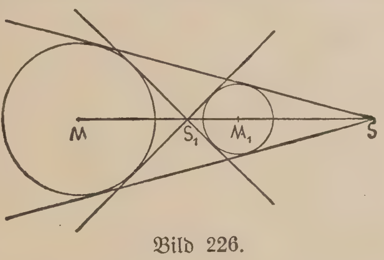


Bild 226.

Erkl. 6: **Die Verbindungslinie der Schnittpunkte zweier Kreise heißt gemeinschaftliche Sehne** (Bild 227c).

Erkl. 7: **Kreise heißen gleichmittig oder ungleichmittig, je nachdem sie den Mittelpunkt gemein haben oder nicht.**

(Achte auf die ungleichmittige (exzentrische) Scheibe bei Dampfmaschine und Motor; gleichmittige (konzentrische) Kreise zeigt die Schießscheibe!)

2. Der Kreis K (M; r) liege fest, K′ (M′; r′) bewege sich auf ihn zu. Die Bilder 227 a ⋯ e zeigen:

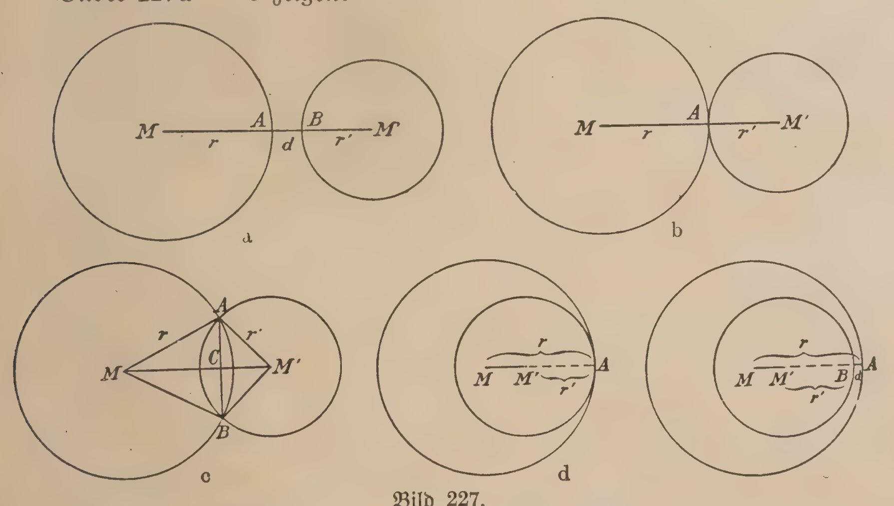


Bild 227.

a) K′ meidet K (K′ liegt ganz außerhalb von K).
b) K′ berührt K (von außen).
c) K′ schneidet K.
d) K′ berührt K (von innen).
e) K′ meidet K (K′ liegt ganz innerhalb von K).
f) Besonderer Fall von e): K′ und K haben denselben Mittelpunkt.

3. Gib für die Fälle a ⋯ e an, wieviel Punkte K und K′ gemein haben.

4. Welche Beziehungen lassen sich zwischen der Zentrale $\overline{MM'} = d$ und den Halbmessern r und r′ aufstellen?

5. Stelle durch Zeichnung und Überlegung fest:

Wo liegen die Mittelpunkte aller Kreise

a) die einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berühren, b) vom Halbmesser r′, die einen gegebenen Kreis vom Halbmesser r von außen berühren, c) vom Halbmesser r′, die einen gegebenen Kreis vom Halbmesser r von innen berühren?

Gemeinsame Tangenten

6. a) Wieviel gemeinsame Tangenten können K und K′ in den fünf Fällen 2a ⋯ e haben? b) Bild 226 zeigt die beiden inneren und die beiden äußeren gemeinsamen Berührenden ($d > r + r'$).

c) Bild 226 drehe sich um die Zentrale; die Berührenden beschreiben Kegel mit den Spitzen S und S′. Die Kegel berühren die aus den Kreisen entstandenen Kugeln (Berührungskegel).

Grundaufgabe

7. **An zwei Kreise die gemeinsamen Berührenden zu legen.**

Voruntersuchung: Ist AB eine gemeinsame äußere (und DE eine gemeinsame innere) Tangente, so kann man durch M′ die Parallelen zu ihnen ziehen (Bild 228). Die eine schneidet MA in C (die andere MD in F). Es ist

$\overline{MC} = \overline{MA} - \overline{AC} = r - r'$

$(\overline{MF} = \overline{MD} + \overline{DF} = r + r')$.

Die Konstruktion ist auf die schon bekannte zurückgeführt (S. 142, Nr. 6): vom Punkte M′ die Tangenten an die beiden Hilfskreise um M mit $r - r'$ bzw. mit $r + r'$ zu legen. Führe die Zeichnung aus und beschreibe die Lösung ausführlich. Wie erhält man die beiden anderen Tangenten?

Bild 228.

Anwendungen.

8. a) Zeige die gemeinsamen Tangenten an den Bildern 229 ⋯ 231 (Treibriemen, laufendes Band, Übersetzung eines Fahrrades). Gib an, wann gleich- oder ungleichsinniger Umlauf vorliegt. b) Wie ist der Umlaufssinn bei der Nähmaschine, c) beim Zentrifugalapparat?

Laufendes Band

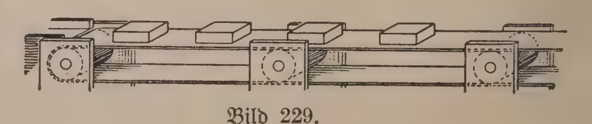


Bild 229.

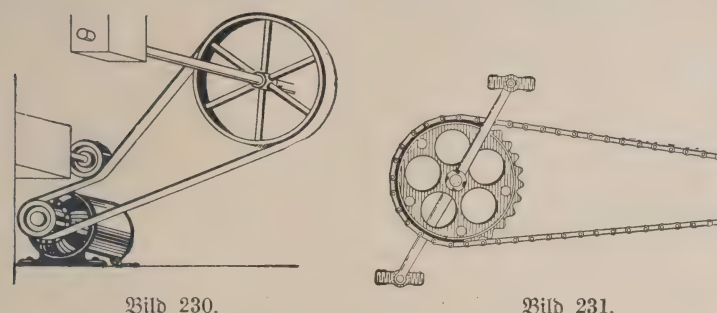


Bild 230. Bild 231.

Treibriemen

Fahrradübersetzung

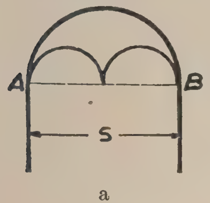
9. Das Triebrad eines Motors hat einen Durchmesser von 20 cm, das von ihm durch einen Treibriemen angetriebene Rad einer Maschine einen Durchmesser von 50 cm. Der Abstand der beiden Achsen beträgt 1,60 m. Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1 : 10 an für den Fall, daß sich die beiden Räder **a)** im gleichen Sinne, **b)** im entgegengesetzten Sinne drehen.

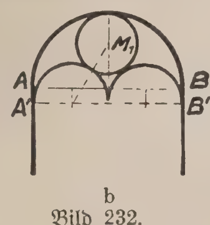
10. ○ aus r_1, der ○ (M; r) berührt und **a)** durch P geht, **b)** g berührt. **c)** ○ aus r, der ○ (M_1; r_1) und ○ (M_2; r_2) berührt.

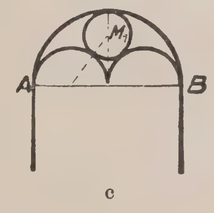
41. Abschnitt: Weitere Anwendungen und Übungen.



1. Für den romanischen Baustil ist der Rundbogen kennzeichnend. **a)** Zeichne über der Spannweite s des Fensters den romanischen Rund-







a b c

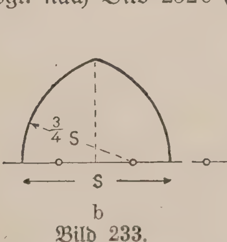
Bild 232.

bogen nach (Bild 232a). **b)** Desgl. nach Bild 232b; der Halbmesser r_1 des Kreises um M_1 ist beliebig. **c)** Desgl. nach Bild 232c ($r_1 = \frac{1}{6}$s).

Gotischer Baustil

2. Der gotische Baustil benutzt den Spitzbogen. Man unterscheidet den normalen, den gedrückten und den überhöhten (Bild 233a ··· c). **a)** Zeichne über der Spannweite s = 6 cm des Fensters die drei Arten von Spitzbogen nach Bild 233a ··· c. **b)** Zeichne ein Spitzbogenfenster nach Bild 233d.

s s $\frac{5}{4}$ s s



a b c

Bild 233.

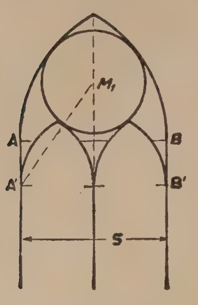


Bild 233 d.

c) Desgl. nach Bild 233e. Wie lang ist $\overline{M_1A}$?

Zur Ausschmückung der Fenster werden in beiden Stilarten häufig Zierformen verwendet, wie sie z. B. Bild 72 darstellt.

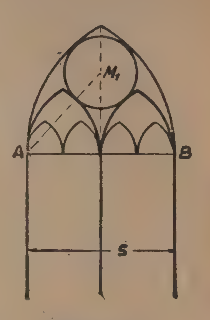


Bild 233 e.

Korbbogen

3. a) Zuweilen findet man als Abschluß von Türen und Toreinfahrten einen abgeflachten Bogen (Bild 234). Dieser sog. Korbbogen läßt sich leicht aus drei Kreisbögen zusammensetzen, die sich gegenseitig berührend ineinander übergehen. b) Erkläre aus Bild 235 die Zeichnung eines Korbbogens. ($\sphericalangle A_1 M_1 B_1 = 45^0$). c) In Bd. I befindet sich der Lageplan vom Zentralflughafen Tempelhof. Die Umrandung des eigentlichen Hafens führt den besonderen Namen Korblinie. Suche sie auf.


Bild 234.

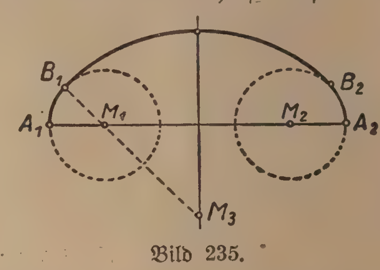


Bild 235.

Sportfeld

4. Die Laufbahnen von Sportplätzen bestehen gewöhnlich aus zwei parallelen geraden Laufstrecken, die durch zwei Korbbögen miteinander verbunden sind. Die Gerade enthält die 100-m-Bahn (Bild 236). Die drei Kreisbögen, welche die Korbbögen zusammensetzen, haben einen Mittelpunktswinkel von je 60⁰. Die drei Mittelpunkte A, B, C bilden ein gleichseitiges Dreieck. Die Laufbahn enthalte fünf Einzelbahnen von 1,20 m Breite. Die 100-m-Strecke enthalte sechs Bahnen und sei am Start und im Auslauf auf 124 m verlängert. Zeichne die Anlage im Maßstab 1 : 1000.

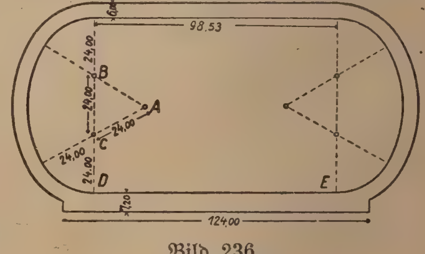


Bild 236.

Übungssätze

5. a) In wieviel Punkten schneiden sich im allgemeinen drei gerade Linien? b) Die Schnittpunkte der drei Mittelsenkrechten, der drei Winkelhalbierenden

und der drei Seitenhalbierenden nennt man **merkwürdige Punkte des Dreiecks.** Warum?
c) Zu ihnen gehört noch der Schnittpunkt der Höhen.

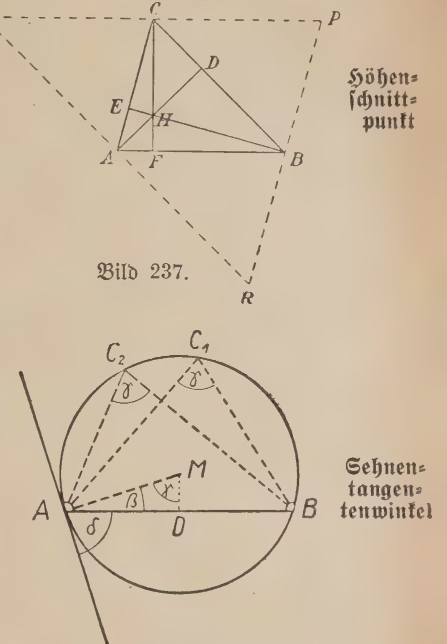


Bild 237.

Höhenschnittpunkt

Lehrs. 7: Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Zieht man zum Beweise durch die Ecken des beliebigen Dreiecks ABC die Parallelen zu den Gegenseiten, so ist in dem neuentstandenen Dreieck PQR:

$\overline{CP} = \overline{AB}$ }
$\overline{CQ} = \overline{AB}$ } (Gegenseiten im Parallelogramm)

also ist die Höhe CF des Dreiecks ABC Mittelsenkrechte im Dreieck PQR. Dasselbe gilt von den beiden anderen Höhen AD und BE. Damit ist der Satz bewiesen[1].

6. a) Laß in Bild 238 den Punkt C so weit herumwandern, bis er auf Punkt A fällt. Aus der Sehne $\overline{CB}$ wird dann die Sehne $\overline{AB}$ und aus CA die Tangente in A, ∢ δ heißt Sehnentangentenwinkel. **b)** Beweise den Satz: **Der Sehnentangentenwinkel (δ) ist gleich dem Umfangswinkel (γ) im entgegengesetzten Kreisabschnitt.** **c)** Zeichne mit Hilfe des Sehnentangentenwinkels den zugehörigen Ortskreis.

Bild 238.

Sehnentangentenwinkel

Erkl. 8: Ein Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind, heißt Sehnenviereck.

Erkl. 9: Ein Viereck, dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, heißt Tangentenviereck.

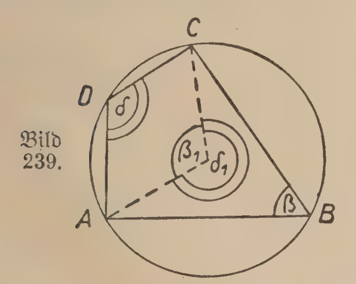


Bild 239.

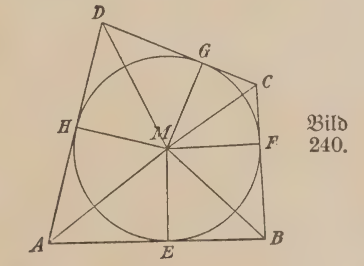


Bild 240.

a) Bestimme im Sehnenviereck (Bild 239) die Summe der gegenüberliegenden Winkel $\beta + \delta$ und drücke das Ergebnis in einem Satze aus. **b)** Um welche Vierecke läßt sich ein Kreis beschreiben?

a) Miß im Tangentenviereck (Bild 240) die Summe der Strecken $\overline{AB} + \overline{CD}$ und $\overline{AD} + \overline{BC}$ und drücke das Ergebnis in einem Satze aus. **b)** In welche Vierecke läßt sich ein Kreis einbeschreiben?

Sehnenviereck

Tangentenviereck

[1] Diesen Beweis hat i. J. 1810 der größte deutsche Mathematiker C. F. Gauß geliefert

Zusammenfassung und Übersicht.

I. Es können **Kreis** und

Punkt | **Gerade**

drei verschiedene Lagen zueinander haben.

II. Der **Kreis** in Verbindung **mit**

zwei Punkten auf ihm | **zwei berührenden Geraden**

führt auf die

Sehnensätze. | **Tangentensätze.**

In beiden Fällen liegt axiale Symmetrie vor:

a) zu den 2 Punkten. | b) zu den 2 Geraden.

Der **Kreismittelpunkt** liegt **auf** ihrer **Symmetrieachse**

(der Mittelsenkrechten). | (der Winkelhalbierenden).

III. Der **Kreis** in Verbindung **mit**

drei Punkten auf ihm | **drei berührenden Geraden**

führt auf den

Umkreis. | **Inkreis.**

Der **Kreismittelpunkt** ist **Schnittpunkt der** 3 **Symmetrieachsen**

(der Mittelsenkrechten) | (der Winkelhalbierenden).

IV. Die Aufgabe,

a) **in** einem Punkte | b) **von** einem Punkte

an einen Kreis **die Tangente** zu legen, wird gelöst mit Hilfe des

Berührungshalbmessers. | Thaleskreises.

V. Die Verbindung von **Kreis mit Kreis** führt auf die Aufgabe der Konstruktion der **gemeinsamen Tangenten.**

a) **Die beiden äußeren** | b) **Die beiden inneren**

werden gefunden als die Parallelen zu den Berührenden vom Mittelpunkte des kleineren Kreises an den **Hilfskreis,** der zum größeren **konzentrisch** ist, und der als **Radius**

die Differenz | **die Summe**

der beiden gegebenen Halbmesser hat.

Es liegt axiale Symmetrie vor. Symmetrieachse ist die Zentrale.
Aufg. (IV b) erscheint als Sonderfall von V, ein Halbmesser ist Null geworden.
Stelle für I ··· V die zugehörigen Figuren entsprechend gegenüber.

VI. Kreis und Winkel.

Der Satz des Thales ergab sich als Anwendung der zentralen Symmetrie am Rechteck. Er ist der wichtigste Sonderfall des Satzes vom Umfangswinkel.

VII. Die sog. „merkwürdigen Punkte" hängen mit der Symmetrie am allgemeinen Dreieck und am Kreise zusammen.

XIII. Flächenlehre.

42. Abschnitt: Flächenberechnung.

A. Direkte Flächenmessung (durch Abzählen).

1. Bestimme unter Verwendung von Gitterpapier den Flächeninhalt (Bd. I, 13. Abschn. u. Bild 106 a) der Rechtecke mit den Seiten a) a = 2 cm, b = 3,5 cm (Bild 241); b) a = 4 cm, b = 2,5 cm; c) a = 6 cm, b = 3,5 cm.

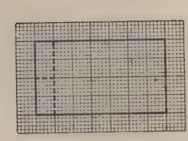


Bild 241.

Anl.: Man erhält außer den Einheitsquadraten kleine Rechtecke. Wie lang sind die Seiten dieser Rechtecke? Welchen Bruchteil eines Einheitsquadrates stellt jedes dieser Rechtecke dar? Wieviele solcher Rechtecke machen also ein Einheitsquadrat aus?

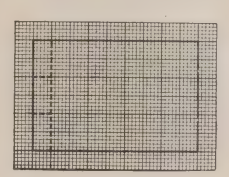


Bild 242.

2. Löse dieselbe Aufgabe für Rechtecke mit den Seiten a) a = 4,5 cm, b = 3 cm (Bild 242), b) a = 5 cm, b = 2,5 cm, c) a = 7 cm, b = 3,5 cm. Wodurch unterscheidet sich diese Aufgabe von der vorhergehenden?
3. Ebenso für Rechtecke mit den Seiten a) a = 2,5 cm, b = 3,5 cm (Bild 243), b) a = 3,5 cm, b = 4,5 cm.

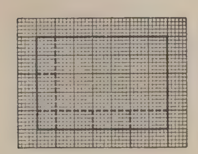


Bild 243.

4. Zeichne Quadrate mit der Seite a) 3,5 cm (Bild 244), b) 6,5 cm und bestimme den Flächeninhalt.

Du erhältst außer den ganzen Einheitsquadraten kleinere Quadrate. (Bd. I, Bild 50 und 106 c).

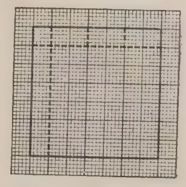


Bild 244.

c) Wieviele dieser Quadrate gehen auf ein Einheitsquadrat? d) Wieviele dieser kleineren Quadrate ergeben sich bei a) und bei b)? e) Wieviele ganze Einheitsquadrate kannst du also aus ihnen zusammensetzen? Wieviele kleine Quadrate bleiben übrig? Wie groß ist also der Flächeninhalt?

5. Zeichne rechtwinklige Dreiecke mit den Lotseiten a) 2 cm und 3 cm (Bild 245), b) 4 cm und 3 cm, c) 6 cm und 5 cm.

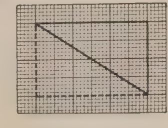


Bild 245.

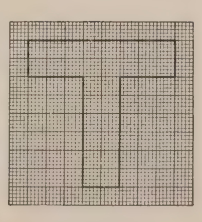


Bild 246 a.

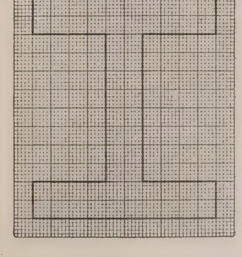


Bild 246 b.

Durch wieviele Einheitsquadrate werden ihre Flächen bedeckt?

6. Die Bilder 246 a und b stellen Querschnitte von Eisenträgern (T- und Doppel-T-Eisen) dar. Welchen Flächeninhalt haben diese Querschnitte?

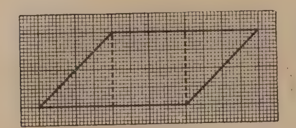


Bild 247.

Bild 248.

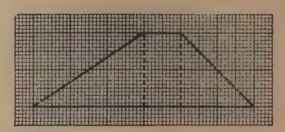


Bild 249.

7. a) bis d) Ermittle die Flächeninhalte der Bilder 247···250, indem du ihre Flächen in der (durch gestrichelte Linien) angegebenen Weise zerlegst. Bild 250 stellt einen Gebäudegrundriß in verjüngtem Maßstabe dar.

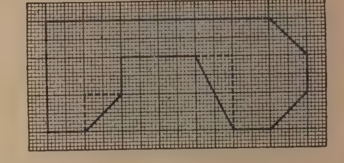


Bild 250.

B. Berechnung nach Formeln.

8. a) Das Abzählverfahren zur Bestimmung des Flächeninhalts einer Figur ist besonders umständlich, wenn die Maßzahlen der Seiten gebrochene Zahlen sind. Die im folgenden abgeleiteten Regeln erleichtern die Bestimmung.

b) **Lehrs. 1: Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt zweier anschließender Seiten.**

Rechteck

$$\boxed{F = a \cdot b}$$

Die Formel bedeutet, daß man die Maßzahl der Fläche eines Rechtecks als das Produkt der Maßzahlen zweier anstoßender Seiten erhält.

Geht die gewählte Längeneinheit (1 cm) ohne Rest in den Seiten auf (Bd. I), ist also a p cm und b q cm lang (Bild 251), so zerlegen Parallelen zur Seite a das Rechteck in q Streifen; Parallelen zur Seite b teilen jeden Streifen in p Quadrate (Seitenlänge 1 cm). Also ist der Flächeninhalt $F = pq\,cm^2$, wofür man wieder $F = ab$ setzen kann.

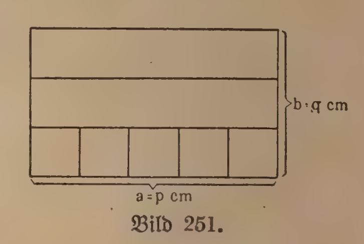


Bild 251.

c) Für das Quadrat ergibt sich:

Quadrat

$$\boxed{F = a^2}$$

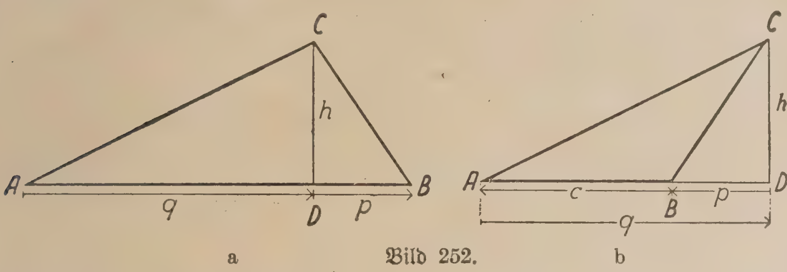
d) Die Formeln in b) und c) gelten auch für gebrochene Maßzahlen.

9. a) Den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks mit den Lotseiten a und b erhält man als die Hälfte des Rechtecks, zu welchem man es ergänzen kann (S. 82, Nr. 2 u. S. 153, Nr. 5), also ist sein Flächeninhalt:

Rechtwinkliges Dreieck

$$\boxed{F = \frac{1}{2}\,ab}$$

b) Ein beliebiges Dreieck ABC (Bild 252a und b) kann man durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Teildreiecke zerlegen. Im stumpfwinkligen Dreieck fällt diese Höhe nach außen. Der Flächeninhalt F des Dreiecks ABC ergibt sich für diese beiden Fälle:



a Bild 252. b

a) $F = \triangle ADC + \triangle BDC$

$F = \frac{qh}{2} + \frac{ph}{2}$

$F = \frac{h}{2}(q + p)$

$F = \frac{1}{2}c \cdot h$

b) $F = \triangle ADC - \triangle BDC$

$F = \frac{qp}{2} - \frac{ph}{2}$

$F = \frac{h}{2}(q - p)$

$F = \frac{1}{2}c \cdot h$

Lehrs. 2: Die Fläche eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

$$\boxed{F = \frac{1}{2} g \cdot h}$$

Beliebiges Dreieck

Folg. **Jedes Dreieck ist halb so groß wie das Rechteck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.**

c) Bild 253 stellt $\triangle ABC$ dar, das aus einem festen Stabe AB und einem Gummifaden ACB gebildet wird, der durch eine Stricknadel bei C gestrafft ist. Die Nadel werde an einem zu AB parallelen Lineale entlanggeführt. Zeichne, wie bei einer Verschiebung des Punktes C um 1, 2, 3 cm nach rechts und nach links sich die Gestalt des Dreiecks wandelt. g und h bleiben unverändert und damit auch

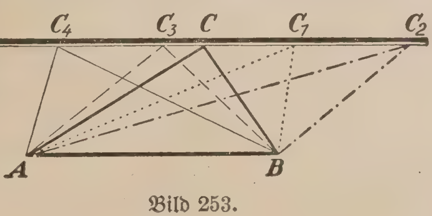


Bild 253.

$$F = \frac{1}{2} g \cdot h.$$

Folgerung: Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

10. a) Da sich jedes Dreieck zum Parallelogramm ergänzen läßt (Bild 152 und 154) und jedes Parallelogramm sich durch eine Ecklinie in zwei deckungsgleiche Dreiecke zerlegen läßt (S. 82), ist sein Flächeninhalt doppelt so groß wie der eines Teildreiecks, also $F = 2 \cdot \frac{1}{2} g \cdot h$, woraus sich ergibt:

Lehrs. 3: Das Parallelogramm hat den gleichen Flächeninhalt wie ein Rechteck, das mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Parallelogramm

$$\boxed{F = g \cdot h}$$

b) Bild 254 veranschaulicht Parallelogramme, die zwischen zwei Parallelschienen über derselben Grundlinie liegen. Ihre Gestalt ist verschieden, ihr Inhalt aber gleich. Begründe dies aus der Formel und am Bilde (deckungsgleiche Dreiecke). Auch hier gilt die

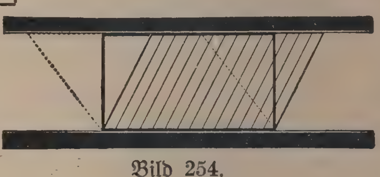


Bild 254.

Folgerung: Parallelogramme mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

11. Das Parallelogramm AGHD (Bild 163, S. 87) ist doppelt so groß wie das Trapez ABCD, aus dem es entstanden ist. Daher ist der Flächeninhalt des Trapezes

Trapez

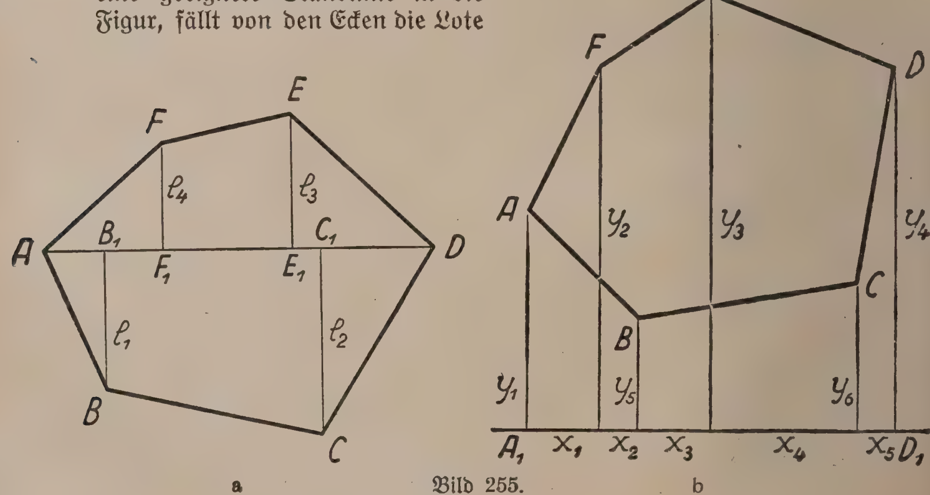
$$\boxed{F = \frac{1}{2}(a + b)\,h \quad \text{oder} \quad F = mh}$$

Lehrs. 4: Die Fläche eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus Mittellinie und Höhe.

C. Zerlegungsmethode.

Trapezverfahren

12. Den Inhalt einer beliebigen, geradlinig begrenzten Figur (Geländestück) kann man durch Zerlegung in Trapeze finden. Bei diesem Verfahren hat man zwei Möglichkeiten (Bild 255a und b). Man zeichnet eine geeignete Standlinie in die Figur, fällt von den Ecken die Lote



a Bild 255. b

auf diese und zerlegt damit die ganze Figur in Trapeze (und rechtwinklige Dreiecke).

a) Wählt man eine **innere Standlinie** (im Bild 255a Ecklinie AD), so erhält man den gesuchten **Flächeninhalt als Summe der Teilfiguren**.

Bezeichnet man noch in Bild 255a $\overline{AB_1}$ mit g_1, $\overline{B_1C_1}$ mit h_1, $\overline{C_1D}$ mit g_2, $\overline{DE_1}$ mit g_3, $\overline{E_1F_1}$ mit h_2 und $\overline{F_1A}$ mit g_4, so ist

$$F = \triangle ABB_1 + BCC_1B_1 + \triangle CDC_1 + \triangle DEE_1 + EFF_1E_1 + \triangle FAF_1$$
$$= \tfrac{1}{2} g_1 \cdot l_1 + \tfrac{1}{2}(l_1 + l_2) \cdot h_1 + \tfrac{1}{2} g_2 \cdot l_2 + \tfrac{1}{2} g_3 \cdot l_3 + \tfrac{1}{2}(l_3 + l_4)\, h_2 + \tfrac{1}{2} g_4 \cdot l_4$$

b) Wählt man eine **äußere Standlinie** (Bild 255b), die man sich als x-Achse denken kann, so erhält man den gesuchten **Flächeninhalt als Differenz der Inhalte** der Vielecke A_1D_1DEFA und A_1D_1DCBA.

Bezeichnet man die Fußpunkte der Lote von F, E und C auf A_1D_1 entsprechend mit F_1, E_1 und C_1, so ist:

$$F = AA_1F_1F + FF_1E_1E + EE_1D_1D - AA_1B_1B - BB_1C_1C - CC_1D_1D$$
$$= \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \cdot x_1 + \tfrac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_2 + x_3) + \tfrac{1}{2}(y_3 + y_4)(x_4 + x_5)$$
$$- \tfrac{1}{2}(y_1 + y_5)(x_1 + x_2) - \tfrac{1}{2}(y_5 + y_6)(x_3 + x_4) - \tfrac{1}{2}(y_6 + y_4)\, x_5.$$

13. a) **Zeichne das Vieleck ABCDEF** mit den Standgrößen A (0; 0), B (2; — 2,5), C (4,5; — 2,25), D (7; 0), E (6; 2), F (3,5; 3,5), G (1; 2) auf Gitterpapier und bestimme seinen Flächeninhalt.
b) Desgleichen für die Punkte A (— 1; 3), B (1; 0,5), C (4; 1), D (6; 4), E (4,5; 5,5), F (3; 6).

14. Anm.: Bild 256 zeigt, wie man ein beliebig gestaltetes Vieleck durch Ecklinien in Teildreiecke zerlegt. In jedem Teildreieck eine Seite und die zugehörige Höhe mißt, die Teilinhalte berechnet und daraus den Gesamtinhalt F bestimmt.

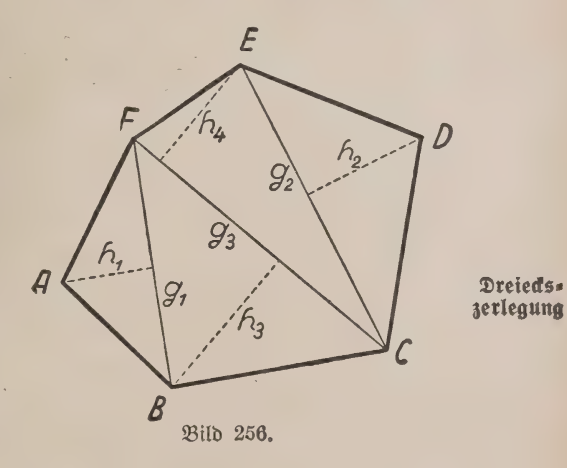


Bild 256.

Dreieckszerlegung

$$ABCDEF = \triangle ABF + \triangle CDE + \triangle BCF + \triangle CEF$$
$$F = \tfrac{1}{2} g_1 \cdot h_1 + \tfrac{1}{2} g_2 \cdot h_2 + \tfrac{1}{2} g_3 \cdot h_3 + \tfrac{1}{2} g_3 \cdot h_4.$$

D. Anwendungen.

15. Wie groß ist die Fläche a) einer Seite deines Rechenheftes, b) einer Seite dieses Buches? c) der Tafel, d) des Fußbodens, e) einer Fensterscheibe in eurem Klassenzimmer?

16. Eine Firma preist einen Teppich von $2\frac{1}{2} \times 3\,m^2$[1] zu 165 ℛℳ an, einen zweiten gleicher Güte von $3\frac{1}{2} \times 4\,m^2$ zu 280 ℛℳ. Welcher ist teurer berechnet?

17. Ein 5,5 m breites und 6 m langes Zimmer soll mit Linoleum ausgelegt werden. Was kostet das Linoleum, wenn 1 m^2 3,20 ℛℳ kostet?

18. In einem $1{,}5 \times 2{,}5\,m^2$ großen Badezimmer sollen der Fußboden sowie die Wände bis zu einer Höhe von 1 m gekachelt werden. Die Größe der rechteckigen Kacheln beträgt $15 \times 20\,cm^2$. Wieviel Kacheln werden benötigt, wenn 15 % für Tür und Fenster abgesetzt werden?

19. Ein Platz von der Länge $a = 46{,}8$ m und der Breite $b = 27{,}5$ m soll mit quadratischen Steinplatten ausgelegt werden. a) Wieviel Platten werden gebraucht, wenn ihre Seitenlänge $c = 30$ cm beträgt? b) Wieviel müssen angefahren werden, wenn mit 5 % Bruch gerechnet wird?

20. Der Boden einer Turnhalle von 35 m Länge und 16 m Breite soll mit Stabparkett ausgelegt werden. Die einzelnen Stäbe haben die Maße $12 \times 75\,cm^2$. Wieviel werden im ganzen gebraucht?

21. Der Umfang einer Litfaßsäule beträgt 4 m, die Höhe 2,20 m. a) Wie groß ist die benutzbare Fläche? b) In welcher Anordnung werden drei gleichgroße Plakate von $1{,}20 \times 1{,}80\,m^2$ geklebt? c) Welche Fläche bleibt dabei ungenutzt?

Würfelnetz

22. Aus einem $23 \times 30\,cm^2$ großen Stück Pappe soll ein Netz und daraus ein Würfel mit der Kantenlänge 6 cm hergestellt werden. a) Reicht die Pappe aus? b) Wie groß kann bei (zusammenhängendem) Netz die Würfelkante im günstigsten Falle gewählt werden?

23. Ein Rechteck habe den Flächeninhalt 120 cm^2. a) Wie groß ist die eine Seite y, wenn die andere x ist? Setze $x = 8$ (10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 100, 120) cm. b) Wie ändert sich y, wenn man x verdoppelt (verdreifacht) und umgekehrt? c) Trage die Werte für x und y aus a) als Standgrößen in ein Gitternetz ein und verbinde die erhaltenen Punkte durch eine Kurve. Maßstab! (vgl. Bd. I, Flurbereinigung).

Hyperbel

Die Gleichung $x \cdot y = c$ stellt eine Hyperbel dar.

24. Von einer Fliese, die die Form einer Raute hat, sind die beiden Ecklinien e und f ihrer Länge nach bekannt. Wie groß ist der Flächeninhalt, den die Fliese bedeckt, wenn a) $e = 12$ cm, $f = 7$ cm, b) $e = 22{,}5$ cm, $f = 16$ cm ist? c) Wieviel Fliesen braucht man für eine Fläche von 6,3 m^2?

25. a) Wie groß ist der Querschnitt eines Grabens zur Abwehr von Panzerwagen, der die Form eines gleichschenkligen Trapezes hat, wenn die obere Breite 3 m, die Tiefe 1,80 m beträgt und die Seitenwände unter einem Winkel von 110° abgeschrägt sind? Zeichnung im Maßstab 1 : 50!
b) Führe dieselbe Zeichnung und Rechnung für einen Graben gegen schwere Durchbruchpanzerwagen aus, wenn die obere Breite 6,50 m und die Tiefe 2,50 m beträgt. Die Abschrägung sei die gleiche.

---

[1] im tägl. Leben sagt man dafür oft ungenau $2\frac{1}{2}$ m mal 3 m.

26. **a)** Ermittle mit Hilfe einer Standlinie die Größe des Schulhofes. **b)** Zeichne einen Plan des Schulhofes im Maßstab 1:1000 und ermittle die Größe mit Hilfe eines darüber gelegten durchsichtigen Blattes Gitterpapier. Vergleiche die beiden Ergebnisse.

27. Zeichne folgende Dreiecke ABC und berechne den Flächeninhalt nach dem Trapez- oder Koordinatenverfahren: **Dreiecksinhalt**

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)
A:	(2; 3)	(1; 1)	(6; 8)	(12; 3)	(+1; —1)	(—3; —5)	(—4,5; +3)
B:	(8; 1)	(9,5; 6)	(2,5; 4)	(3,4; 6)	(+6; —5)	(+2; —6)	(+2; —2)
C:	(5; 6)	(3,8; 7)	(1; 9)	(7,2; 8)	(+4; +3)	(+1; +4)	(+3,2; +5)

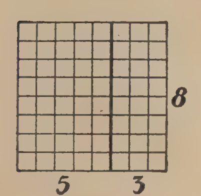
h) Weise mit Hilfe der Zeichnung von △ ABC für Aufg. **a)** die allgemeine Formel für den Flächeninhalt eines Dreiecks nach, wenn die Standgrößen von A (x_1, y_1), von B (x_2, y_2), von C (x_3, y_3) sind:

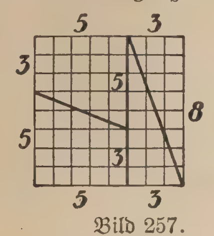
$$F = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)].$$

Anl.: Trapezzerlegung nach Nr. 12b.

i) Berechne nach h) oder mit Hilfe der Formel $F = \frac{1}{2} g \cdot h$ den Inhalt des durch folgende Punkte bestimmten Dreiecks: Nationaldenkmal—Jagdschloß Niederwald—Punkt 298,3! (s. Kartenausschnitt I in der Anlage).

28. Ein Quadrat 13×13 cm² wird so geteilt, daß zwei Rechtecke entstehen, und zwar 5×13 und 8×13 cm². Teilt man das kleine Rechteck durch die Ecklinie in zwei Dreiecke und das große Rechteck bei 5:3 und 3:5 in zwei **Scherzaufgabe**





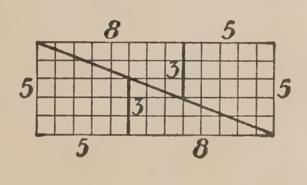


Bild 257.

Trapeze, so entstehen Figuren, die man zu einem Rechteck zusammenschließen kann, wie Bild 257 zeigt. Das Erstaunliche dabei ist, daß der Inhalt des neuentstandenen Rechtecks anscheinend um 1 qcm kleiner ist $(8 \times 21 = 168)$ als der Inhalt des Quadrats $(13 \times 13 = 169)$. Wo steckt der Fehler?

43. Abschnitt: Flächenverwandlung.

1. Erkl.: Eine Figur verwandeln bedeutet, sie in eine von anderer Gestalt umzuzeichnen, die ihr inhaltsgleich ist.

Verwandle:

2. Ein Dreieck unter Beibehaltung der Grundlinie in ein anderes mit
a) einem neuen Winkel an der Grundlinie, **b)** einer neuen Seite,
c) einem neuen gegenüberliegenden Winkel. Anl.: s. S. 155, Nr. 9c.

3. Ein Parallelogramm unter Beibehaltung einer Seite (als Grundlinie) in ein anderes mit a) einem neuen Winkel an der Grundlinie, b) einer neuen Seite. Anl.: s. S. 156, Nr. 10b.
4. Ein Dreieck in ein Parallelogramm. Anl.: Halbiere g oder h.
5. Ein Parallelogramm in ein Dreieck. Anl.: Verdoppele g oder h.
6. Ein Parallelogramm in ein Rechteck. Anl.: s. Nr. 3.
7. Das Viereck ABCD (Bild 258) ist aus zwei Dreiecken zusammengesetzt. Stellt die eine Diagonale $\overline{AC}$ einen festen Stab vor, zu dem D parallel verschoben werden kann, z. B. in die Lagen D_1 und D_2, so erkennt man, daß das Viereck ABCD in ein flächengleiches Dreieck ABD_1 (oder BCD_2) verwandelt worden ist. Begründung?

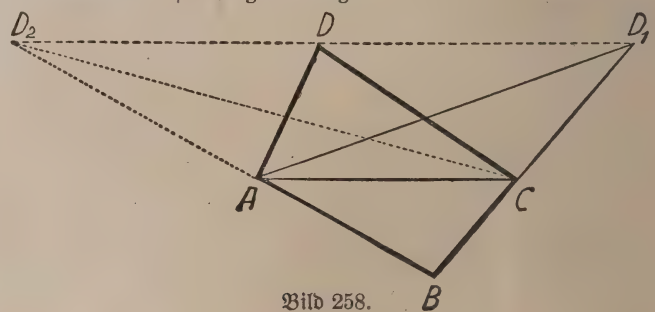


Bild 258.

Anm.: D_1 liegt auf der Verlängerung von $\overline{BC}$ (D_2 auf der Verlängerung von $\overline{BA}$), sonst wäre als Ergebnis kein Dreieck entstanden!

Verwandle:

8. Ein Viereck in ein Dreieck. Anl.: nach Nr. 7. Die Parallele durch D zur Ecklinie AC liefert D_1 (und D_2).
9. Ein Fünfeck in ein Dreieck. 10. Ein Sechseck in ein Rechteck.

Zusammenfassung

11. Mit den bisher gewonnenen Sätzen läßt sich ein beliebiges Vieleck in ein Rechteck verwandeln.

Ergänzungsparallelogramm

Erkl.: Zieht man durch einen Punkt einer Ecklinie eines Parallelogramms Parallele zu den Seiten, so heißen die beiden von der Ecklinie nicht geschnittenen Vierecke Ergänzungsparallelogramme (Bild 259).

Lehrs.: Ergänzungsparallelogramme sind gleich.

Bew.: Bezeichnet man den Flächeninhalt der beiden großen Teildreiecke des ganzen Parallelogramms (Bild 259) mit F und F′, so ist

$$F = F' \text{ (Hilfssatz S. 82)}$$

$$f_1 + f_2 + f = f_1' + f_2' + f' \text{ (s. Bild)}$$

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= f_1' \\ f_2 &= f_2' \end{aligned}\right\} \text{(Hilfssatz S. 82)}$$

$$\overline{\qquad f = f' \qquad}$$

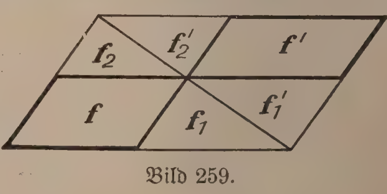


Bild 259.

12. Damit kann man die Aufgabe lösen:
Ein Parallelogramm unter Beibehaltung seiner Winkel in ein anderes mit neuer Grundlinie zu verwandeln.

Anl.: Trage die neue Grundlinie $\overline{BE}$ auf AB von B aus ab und vervollständige die Figur (Bild 260). Das alte Parallelogramm ABCD ist dann gleich dem neuen CGIH. Begründung?

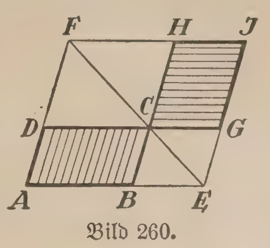


Bild 260.

13. a) Die Aufgabe, ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein anderes mit neuer Grundlinie zu verwandeln, kann auf verschiedene Art gelöst werden.

Anl zur 1. Lösung: Trage auf der ursprünglichen Grundlinie $\overline{AB}$ die gegebene von A aus ab (Bild 261). Die Parallele durch B zu CD schneidet AC in E, △ ADE ist das gesuchte. Beweis?

Anl. zur 2. Lösung: Benutzung des Ergänzungsparallelogramms. Prüfe, welche Lösung einfacher ist.

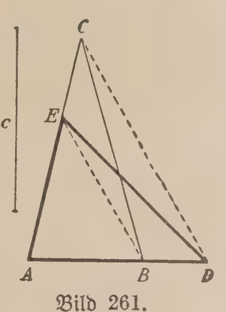
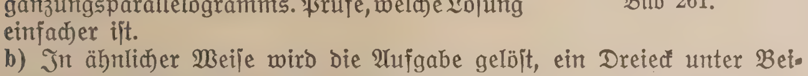


Bild 261.



b) In ähnlicher Weise wird die Aufgabe gelöst, ein Dreieck unter Beibehaltung eines Winkels in ein anderes mit gegebener Höhe zu verwandeln.

14. a) Ein Parallelogramm, b) ein Dreieck zu ver-n-fachen ($n = 3, 4, 5$).

15. Ein Dreieck von einer Ecke aus in $n = 3$ (7) gleiche Teile zu teilen.

16. Ein Parallelogramm von einer Ecke aus in a) $n = 2$, b) $n = 4$, c) $n = 10$, d) $n = 3$, e) $n = 5$ gleiche Teile zu teilen.

17. Ein Quadrat ($a = 4$ cm) in ein Rechteck zu verwandeln, von dem eine Seite (x) gegeben ist. Setze die gegebene Seite $x = 2$ (3, 6, 8 ...) cm und führe die Konstruktion immer an derselben Figur aus. Beachte, wie der 4. Eckpunkt dabei wandert. Vgl. S. 158, Nr. 23. (Aus der Figur läßt sich der Satz ablesen: unter allen flächengleichen Rechtecken hat das Quadrat den kleinsten Umfang.)

44. Abschnitt: Die Sätze des Euklid und des Pythagoras.

1. Nach Abschnitt 43 kann man jede geradlinige Figur in ein Rechteck verwandeln. Wie kann man nun ein Rechteck in ein Quadrat verwandeln?

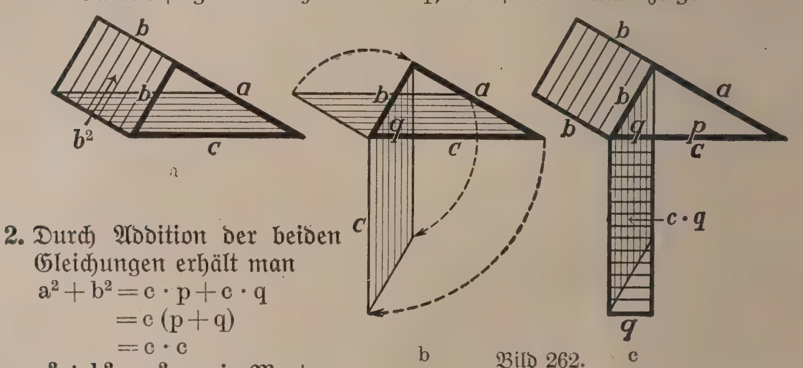
Lehrs.: Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat jeder Lotseite gleich dem Rechteck aus der Spannseite und dem anliegenden Höhenabschnitt. 1. Satz des Euklid

Lotseitensatz: $a^2 = c \cdot p \quad b^2 = c \cdot q$

Bew.: Nach Bild 262 a ⋯ c ist der Beweis in drei Schritte aufgelöst.

1. Schritt (Bild 262a): Das Lotseitenquadrat (b^2) ist gleich dem Parallelogramm (Schiebung, Bild 254, gleiche Grundlinie und Höhe).
2. Schritt (Bild 262b): Das Parallelogramm ist um 90° gedreht, sein Flächeninhalt bleibt unverändert (Drehung).
3. Schritt (Bild 262c): Das gedrehte Parallelogramm ist gleich dem Rechteck ($c \cdot q$) (Schiebung).

Daraus folgt der Satz: $b^2 = c \cdot q$, ebenso kann man zeigen: $a^2 = c \cdot p$.



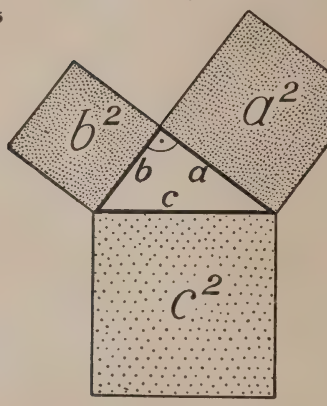
2. Durch Addition der beiden Gleichungen erhält man

$$a^2 + b^2 = c \cdot p + c \cdot q$$
$$= c\,(p + q)$$
$$= c \cdot c$$

$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$, in Worten:

b Bild 262. c

Satz des Pythagoras



Lehrs.: In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Spannseite gleich der Summe der Quadrate über den beiden Lotseiten.

Satz des Pythagoras:
$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$

3. Wendet man auf Dreieck BCD den Satz des Pythagoras an, so ergibt sich:

$$\overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BD}^2.$$

oder: $h^2 = a^2 - p^2$

so folgt: $h^2 = c \cdot p - p^2$ (s. o.)

$h^2 = p\,(c - p)$

Höhensatz: $h^2 = p \cdot q$

2. Satz des Euklid

Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den Höhenabschnitten.

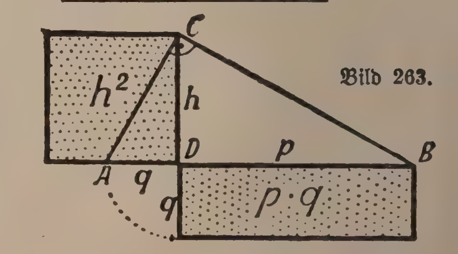
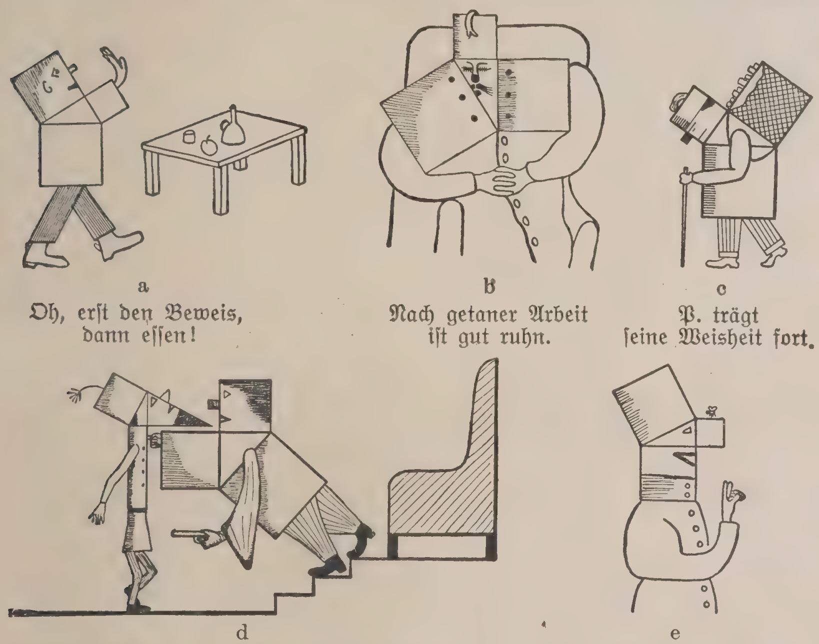


Bild 263.

Anm.: Der Satz des Pythagoras ist einer der wichtigsten Sätze. Er hat immer wieder die Teilnahme von Jung und Alt erweckt. Die folgenden Bilder mit ihren Unterschriften wurden von Schülern erdacht.



a
Oh, erst den Beweis, dann essen!

b
Nach getaner Arbeit ist gut ruhn.

c
P. trägt seine Weisheit fort.

d
Elender Euklid, du hast mir alles nachgemacht!

e
„Er" belehrt seine Schüler.

4. Verwandle ein Rechteck in ein Quadrat.

Anl.: Eine Lösung läßt sich mit Hilfe des Kathetensatzes, eine zweite mit Hilfe des Höhensatzes durchführen. Man bezeichnet die gegebenen Rechtecksseiten mit a und b, die gesuchte Quadratseite mit x. Welche Stücke des rechtwinkligen Dreiecks (ABC, Bild 263) müssen a, b und x bei der ersten Lösung, welche bei der zweiten werden? Führe danach die Zeichnung mit ausführlicher Beschreibung durch.

a) $a = 2$ cm, $b = 8$ cm; **b)** $a = 3,5$ cm, $b = 4,2$ cm; **c)** $a = 5,2$ cm, $b = 6,8$ cm. Prüfe jedesmal durch Messung der Quadratseite und Berechnung des Inhalts nach.

5. Verwandle ein Dreieck in ein Quadrat.

6. Die Fläche des Altreiches betrug 1937 470 000 qkm und unterlag folgender Nutzung: Ackerland, Wiesen und Weiden rd. 60 %, Wald rd. 30 %, Ödland, Straßen, Wasserfläche und bebaute Fläche rd. 10 %. **Nutzung deutschen Bodens**

a) Stelle diese Übersicht zeichnerisch dar, indem du ein Quadrat von der Seite $a = 7$ cm in drei rechteckige Streifen von gleicher Höhe teilst, **deren Grundlinien sich wie 6:3:1 verhalten.**

b) Verwandle jedes der Rechtecke in ein flächengleiches Quadrat. Welche Darstellung ist anschaulicher?

Kolonien 7. a) Stelle nach Anh. II, 4 die Flächen der ehemaligen deutschen Kolonien durch gleichbreite Rechtecke dar. Maßstab 20000 qkm ≙ 1 qcm, Breite eines jeden Rechtecks 10 cm. Berechne erst die Höhe eines jeden Rechtsecks. b) Verwandle diese Rechtecke in flächengleiche Quadrate. Welche Darstellung ist anschaulicher? — c) Vergleiche auch Deutschland damit!

8. Verwandle ein Quadrat in ein Rechteck, von dem a) die große Seite, b) die kleine Seite gegeben ist.

9. Zeichne ein Quadrat, das gleich der Summe a) von zwei, b) von drei gegebenen Quadraten, c) gleich der Differenz zweier gegebener Quadrate, d) gleich $3a^2$ ($=4a^2 - a^2$), e) gleich $5a^2$ ($=4a^2 + a^2$), f) gleich $10a^2$, g) gleich $\frac{1}{2}a^2$, h) gleich $\frac{1}{3}a^2$ ist.

10. Für den Satz des Pythagoras gibt es eine große Anzahl von Beweisen. Im folgenden werden noch zwei gegeben.

2. Bew.: Bild 264a, b zeigt noch einen Zerlegungsbeweis. In beiden Figuren sind die Dreiecke deckungsgleich, also muß die Summe der beiden Lotseitenquadrate I und II gleich dem Quadrat III sein. Bezeichnet man die Seiten von I mit a, die von II mit b und die von III mit c, und denkt man die Dreiecke 1 ⋯ 4 aus beiden Bildern entfernt, so bleibt übrig

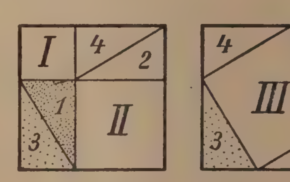


Bild 264a, b.

$$\boxed{\text{I}} + \boxed{\text{II}} = \boxed{\text{III}}$$

oder: $a^2 + b^2 = c^2$

3. Bew.: Zieht man (Bild 265) die beiden Hilfslinien $\overline{AF}$ und $\overline{CG}$ und denkt man $\triangle$ ABF um B soweit gedreht, daß $\overline{BF}$ auf $\overline{BC}$ fällt, so erkennt man, daß die beiden Dreiecke deckungsgleich sein müssen (s, w, s).

Ferner ist $\triangle BFA = \frac{1}{2} \square BFEC$ (gl. Grdl. u. Höhe)

$\triangle GBC = \frac{1}{2} \square GBDH$ (gl. Grdl. u. Höhe)

$\square BCEF = \square BDHG$

oder: $a^2 = c \cdot p$

Ebenso ist: $b^2 = c \cdot q$

$a^2 + b^2 = c^2$

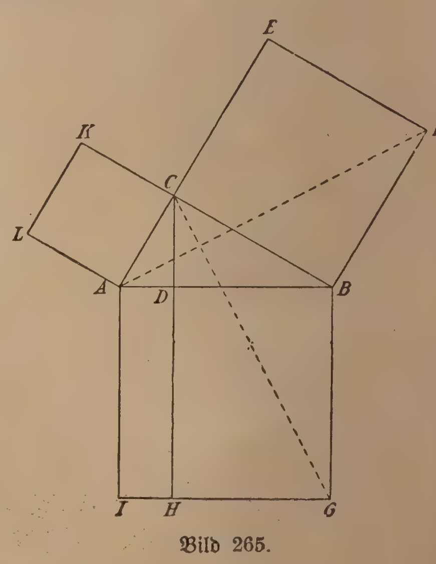


Bild 265.

45. Abschnitt: Die Quadratwurzel.

A. Einführung.

1. a) Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das gleich der Summe der beiden Quadrate mit den Seiten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm ist?

Zeichnerische Lösung siehe S. 164, Nr. 10. Die Rechnung führt zu $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Es wird also eine Zahl gesucht, die ins Quadrat erhoben 25 ergibt. Das ist $c = 5$. Man nennt 5 die Quadratwurzel aus 25.

Erkl.: Unter der Quadratwurzel aus a versteht man die Zahl, deren Quadrat a ist. Man schreibt $\sqrt{a}$.

Anm. 1: Die Zahl a unter dem Wurzelzeichen heißt Radikand. **Radikand**

Anm. 2: Man liest kurz statt „Quadratwurzel aus a" einfach auch nur „Wurzel aus a". **Wurzel**

2. Wie groß ist die Quadratseite, wenn der Flächeninhalt des Quadrates **a)** 64 cm², **b)** 81 cm², **c)** 169 mm², **d)** 0,09 km², **e)** 1,44 m² ist?

Anm. 3: $\sqrt{36}$ ist $= +6$ oder -6, denn es ist: $(+6)^2 = 36$ wie auch $(-6)^2 = 36$. Dasselbe gilt für jede andere Quadratwurzel aus einer positiven Zahl, sie hat zwei Werte. Wir beschränken uns vorläufig, wenn nichts Besonderes vermerkt ist, auf den positiven Wert. **2 Werte**

Anm. 4: Die Quadratwurzel aus einer negativen Zahl besteht für uns nicht; denn es gibt unter den bisher bekannten Zahlen keine, für die das Produkt mit sich selbst negativ ist.

3. Bestimme **a)** $\sqrt{49}$, **b)** $\sqrt{100}$, **c)** $\sqrt{196}$, **d)** $\sqrt{625}$, **e)** $\sqrt{2500}$, **f)** $\sqrt{8100}$, **g)** $\sqrt{10\,000}$, **h)** $\sqrt{810\,000}$, **i)** $\sqrt{1\,000\,000}$, **k)** $\sqrt{0{,}09}$, **l)** $\sqrt{0{,}36}$, **m)** $\sqrt{1{,}44}$, **n)** $\sqrt{0{,}0144}$, **o)** $\sqrt{0{,}0036}$, **p)** $\sqrt{0{,}000\,036}$, **q)** $\sqrt{1}$. **Vorübungen**

Wieviel Stellen haben die Quadrate der Zahlen **r)** 1 ··· 9, **s)** 10 ··· 99, **t)** 100 ... 999?

Wieviel Stellen vor dem Komma haben die Quadratwurzeln aus Zahlen **u)** zwischen 1 und 99, **v)** 100 und 9999, **w)** 9999 und 1 000 000?

4. Nach Nr. 3 ergibt sich:

ist die Zahl	so ist ihr Quadrat	ist die Zahl	so ist ihre Quadratwurzel
1-stellig	1- oder 2-stellig	1- oder 2-stellig	1-stellig
2-stellig	3- oder 4-stellig	3- oder 4-stellig	2-stellig
3-stellig	5- oder 6-stellig	5- oder 6-stellig	3-stellig

5. Es gibt verschiedene Verfahren, Quadratwurzeln zu bestimmen. Die Wurzel „geht" nur dann „auf", wenn der Radikand eine Quadratzahl ist. In jedem anderen Falle führt die Rechnung auf einen unendlichen nicht periodischen Zehnerbruch.

Alle Verfahren, die sich eines mechanischen Hilfsmittels bedienen (Kurve, Wertetafel, Rechenstab), haben nur eine beschränkte Genauigkeit: mit der Kurve (Bild 266) kann man auf zwei, mit dem Rechenstab auf drei, mit der Tafel 2 (Beilage) auf vier Stellen genau rechnen. **Genauigkeit**

B. Die Funktion $y = x^2$.

6. Stellt man für die Funktion $y = x^2$ die Wertetafel auf:

x	...	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	...
y	...	+16	+9	+4	+1	0	+1	+4	+9	+16	...

so findet man
a) zu den x-Werten die zugehörige Quadratzahl y (z. B. x = 3; y = 9),
b) zu den y-Werten die zugehörige Quadratwurzel x (z. B. y = 4; x = 2).

Parabel $y = x^2$

Diese Wertetafel ergibt als Funktionsbild die Parabel (Kurve I, Bild 266). Zeichne sie nach für x = −5 bis +5 c) im gleichen, d) im doppelten Maßstab.

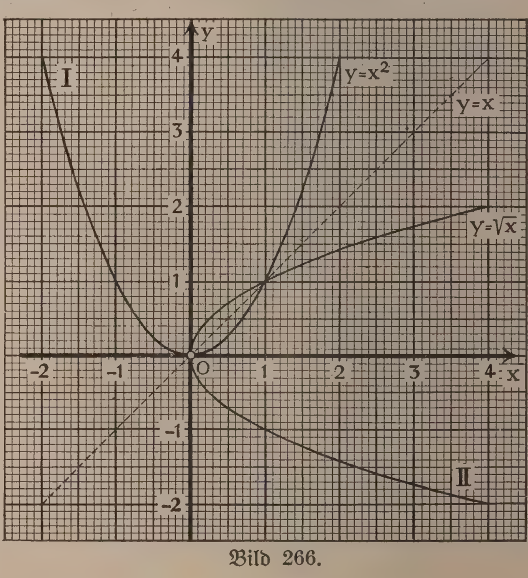


Bild 266.

$y = \sqrt{x}$

7. a) Mit Kurve I kann man zu jeder Zahl x ihr zugehöriges Quadrat y und umgekehrt zu jeder Zahl y die zugehörige Quadratwurzel x ($= \sqrt{y}$) ablesen (und zwar den positiven und den negativen Wert). Die Kurve stellt also zugleich das Bild zu $x = \sqrt{y}$ dar. Lies mit Hilfe der Kurve $y = x^2$
b) die zugehörige Quadratzahl y zu $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 1{,}2$; $x_4 = 0{,}9$ ab.
c) die zugehörige Quadratwurzel x zu $y_1 = 2$; $y_2 = 3$; $y_3 = 1{,}8$; $y_4 = 3{,}5$ ab.

8. a) Es ist üblich, die abhängige Veränderliche mit y zu bezeichnen und die unabhängige mit x. Man erhält so $y = \sqrt{x}$ oder $y^2 = x$. Das zugehörige Kurvenbild (II) liegt entsprechend zur x-Achse wie das ursprüngliche zur y-Achse. Bild 266 zeigt, daß die Kurve $y = \sqrt{x}$ aus $y = x^2$ durch Spiegelung an der Geraden $y = x$ hervorgegangen ist. — Erkläre das!
b) Bestimme mit Hilfe der Kurve $y = \sqrt{x}$ die zugehörige Quadratwurzel y zu $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2{,}5$; $x_4 = 1{,}7$; $x_5 = 2{,}2$; $x_6 = 0{,}8$.

C. Die Tafel.

9. Erkläre die Anordnung der Tafel 2 der Beilage.

Beispiel: a) Sucht man $4{,}26^2$, so findet man in der Zeile Z = 4,2 und Spalte 6 die Zahl 18,15.

b) Sucht man 426^2, so hat man zur Bestimmung der Stellenzahl einen Überschlag zu machen $426 \approx 400 \cdot 400 = 160000$, also ist $426^2 \approx 181\,500$.
c) Dasselbe gilt für $0{,}426^2$. Überschlag: $0{,}4 \cdot 0{,}4 \approx 0{,}16$; $0{,}426^2 \approx 0{,}4^2 \approx 0{,}16$; daher $0{,}426^2 \approx 0{,}1815$.

Da die Anzahl der in einer Tafel stehenden Zahlenwerte beschränkt ist, muß man häufig durch Einschalten (Zwischenschalten, Interpolieren) den Anwendungsbereich erweitern.

10. Aufg.: Es ist $6{,}147^2$ mit Hilfe der Tafel 2 zu suchen.

Für $6{,}140^2$ findet man 37,70, für $6{,}150^2$ die Zahl 37,82. Es muß also $6{,}147^2$ zwischen diesen beiden Werten liegen. Es wächst:

die Zahl von 6,140 auf 6,150, also um 10 Einh. der letzten Stelle
das Quadrat von 37,70 auf 37,82, also um 12 Einh. „ „ „
die Zahl von 6,140 auf 6,147, also um 7 Einh. „ „ „
das Quadrat von 37,70 auf 37, . ., also um x Einh. „ „ „

Daher gilt entsprechend S. 138, Nr. 37:

$\frac{10}{7} = \frac{12}{x}$ (wächst die Zahl um **10**, so wächst das Quadrat um **12**,
„ „ „ „ **7**, „ „ „ „ „ **x**,)

$10x = 84$

$x = \underline{8},4$ also ergibt sich endgültig: $6{,}147^2 = 37{,}7\underline{8}$

11. Umgekehrt findet man aus Tafel 2 auch die Quadratwurzel.

Beispiel: a) $\sqrt{20{,}43} = ?$ Man findet 20,43 in Spalte 2 der Zeile $Z = 4{,}5$. Demnach ist $\sqrt{20{,}43} = 4{,}52$.
b) $\sqrt{2043} = 45{,}2$; Überschlag: da $1600 < 2043 < 2500$, muß auch $\sqrt{2043}$ zwischen $\sqrt{1600}$ und $\sqrt{2500}$, d. h. zwischen 40 und 50 liegen.

12. Aufg.: Es ist $\sqrt{13{,}21}$ mit Hilfe der Tafel 2 zu finden. In der Tafel findet man als nächstkleineren Radikanden 13,18 und als nächstgrößeren 13,25. Es wächst:

der Radikand von 13,18 auf 13,25, also um 7 Einh. der letzten Stelle
die Wurzel von 3,630 auf 3,640, also um 10 Einh. „ „ „
der Radikand von 13,18 auf 13,21, also um 3 Einh. „ „ „
die Wurzel von 3,630 auf 3,63·, also um x Einh. „ „ „

Daher gilt:

$\frac{7}{3} = \frac{10}{x}$ (wächst der Radikand um **7**, so wächst die Wurzel um **10**,
„ „ „ „ **3**, „ „ „ „ „ **x**,)

$7x = 30$

$x = \underline{4},3$ also ergibt sich endgültig: $\sqrt{13{,}21} = 3{,}63\underline{4}$.

Weitere Aufgaben hierzu siehe S. 169, Nr. 28 . . . 36.

D. Der Rechenstab.

13. Auch mit dem gewöhnlichen Rechenstab kann man Quadrate und Wurzeln bestimmen. Für das Quadrieren hat man dabei nur den Läuferstrich auf die zu quadrierende Zahl der Zahlenleiter D einzustellen, dann zeigt er auf der Skala A das gesuchte Quadrat (Bild 199 und 205). **Quadrieren**

Beispiele: a) Läuferstrich auf die Zahl 1,5 unten gibt oben ihr Quadrat 2,25.
b) „ „ „ „ 2,5 „ „ „ „ „ 6,25.
c) „ „ „ „ 3,9 „ „ „ „ „ 15,2.
d) „ „ „ „ 4,65 „ „ „ „ „ 21,6.

Wurzelziehen

14. Für das Wurzelziehen stellt man umgekehrt den Läuferstrich auf den Radikanden auf der Zahlenleiter A ein und liest das Ergebnis, die Wurzel, auf Leiter D unter dem Läuferstrich ab. Dabei ist die Gruppeneinteilung des Radikanden zu je zwei Stellen (S. 165, Nr. 4) zu beachten. Besteht **die erste Gruppe aus einer Ziffer,** so ist der **Läuferstrich auf die linke Hälfte der Leiter A** einzustellen; ist die **erste Gruppe zweistellig,** so muß auf der **rechten Hälfte von A eingestellt werden.**

Beispiele:						
a) $\sqrt{9}$	Läuferstrich auf	linke	9	oben gibt unten	3.
b) $\sqrt{36}$	„ „	rechte	36	„ „ „	6.
c) $\sqrt{169}$	„ „	linke	169	„ „ „	13.
d) $\sqrt{2500}$	„ „	rechte	2500	„ „ „	50.

15. Die weiteren Übungsbeispiele:

a) $5{,}06^2$ b) $9{,}76^2$ c) $14{,}7^2$ d) $0{,}683^2$ e) $0{,}053^2$

f) $\sqrt{13}$ g) $\sqrt{519}$ h) $\sqrt{0{,}27}$ i) $\sqrt{3{,}08}$ k) $\sqrt{0{,}0081}$

haben als Ergebnis: 25,6; 95,3; 216; 0,466; 0,00281; 3,61; 22,8; 0,52; 1,756; 0,09.

E. Das Ausziehen der Quadratwurzel.

16. Das folgende rechnerische Verfahren erlaubt es, eine Wurzel so genau auszurechnen, wie man sie haben will. Zugrunde liegen die Formeln: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$. Man teilt den Radikanden vom Komma aus nach links und rechts in Gruppen zu je zwei Stellen. Die Anzahl der Gruppen des Radikanden vor dem Komma bestimmt die Anzahl der entsprechenden Stellen des Wurzelwertes (vgl. Nr. 4),

Beispiel 1:

```
                 _____    a+b
                √5'2 9  =  23
          a² =   4         ══
                ───       2a+b
   2ab + b² =   1 2˙9  :  4 3
   (2a + b)b =  1 2 9
                ─────
                    0
```

kurz:

```
    _____
   √5'2 9  =  23
    4         ══
   ───
43 '1 2˙9
    1 2 9
    ─────
        0
```

Es sind folgende Schritte auszuführen: 1. Man teilt die Zahl vom Komma aus nach links und rechts in Gruppen zu 2 Stellen. 2. Man zieht aus der 1. Gruppe die Wurzel, $\sqrt{5} \approx 2$. 3. Man zieht das Quadrat von 2 von der 1. Gruppe ab, Rest 1. 4. Man zieht die nächste Gruppe herunter, setzt 5. das vorläufige doppelte Ergebnis 4 davor und teilt 12 durch 4, bei der die 9 vorübergehend vernachlässigt wird und fügt 6. den Quotienten 3 im Ergebnis an die 2 (23) und im Teiler an die 4 (43) an, 7. $43 \cdot 3$ liefert dann 129.

Beispiel 2:

```
      __________
     √20,'88'49 = 4,57
      16
     ───
85   '4 8˙8
      4 2 5
     ──────
907   '6 3 4˙9
       6 3 4 9
      ────────
             0
```

Beispiel 3:

```
     _________
    √0,'05'76   0,24
        4       ════
       ───
44    '17˙6
       17 6
       ────
          0
```

Beim Überschreiten des Kommas im Radikanden muß im Ergebnis das Komma gesetzt werden.

17. Beachte: $\sqrt{3} = 1{,}732$; $\sqrt{300} = 17{,}32$; $\sqrt{30\,000} = 173{,}2$;
$\sqrt{30} = 5{,}477$; $\sqrt{3000} = 54{,}77$; $\sqrt{300\,000} = 547{,}7$;
$\sqrt{0{,}03} = 0{,}1732$; $\sqrt{0{,}3} = 0{,}5477$; $\sqrt{0{,}0003} = 0{,}01732$; $\sqrt{0{,}00003} = 0{,}05477$.

F. Aufgaben.

Vorbem.: Vor jedem Wurzelziehen überlege, auf wieviel Stellen das Ergebnis genau sein soll. Wähle danach das Verfahren zur Bestimmung der Quadratwurzel; mache stets zuvor einen Überschlag. Wenn keine Vorschrift zur Bestimmung der Wurzel gegeben ist, benutze stets die Tafel 2. Runde dazu unter Umständen den Radikanden auf 4 geltende Ziffern ab.

Erst schätze die folgenden Quadratwurzeln, dann berechne sie, soweit sie nicht aufgehen, auf zwei geltende Ziffern nach dem Komma:

	a)	b)	c)	d)	e)
18.	$\sqrt{64}$	$\sqrt{121}$	$\sqrt{225}$	$\sqrt{729}$	$\sqrt{841}$
19.	$\sqrt{961}$	$\sqrt{784}$	$\sqrt{2025}$	$\sqrt{2209}$	$\sqrt{1849}$
20.	$\sqrt{5329}$	$\sqrt{4900}$	$\sqrt{19\,600}$	$\sqrt{435\,600}$	$\sqrt{688\,900}$
21.	$\sqrt{0{,}25}$	$\sqrt{0{,}0169}$	$\sqrt{0{,}4624}$	$\sqrt{70{,}56}$	$\sqrt{0{,}0729}$
22.	$\sqrt{64\,009}$	$\sqrt{89\,401}$	$\sqrt{42\,849}$	$\sqrt{234\,256}$	$\sqrt{262\,144}$
23.	$\sqrt{98{,}01}$	$\sqrt{428{,}49}$	$\sqrt{87{,}9844}$	$\sqrt{534\,214{,}81}$	$\sqrt{0{,}0009}$
24.	$\sqrt{50}$; $\sqrt{0{,}5}$	$\sqrt{5}$; $\sqrt{0{,}05}$	$\sqrt{500}$; $\sqrt{0{,}005}$	$\sqrt{11}$	$\sqrt{13}$
25.	$\sqrt{17}$	$\sqrt{1{,}7}$	$\sqrt{0{,}17}$	$\sqrt{0{,}017}$	$\sqrt{0{,}0017}$
26.	$\sqrt{35}$	$\sqrt{96}$	$\sqrt{0{,}58}$	$\sqrt{0{,}42}$	$\sqrt{0{,}3724}$
27.	$\sqrt{22{,}03}$	$\sqrt{87{,}87}$	$\sqrt{938{,}1}$	$\sqrt{1{,}348}$	$\sqrt{14{,}4}$

Berechne mit Hilfe von Tafel 2:

	a)	b)	c)	d)	e)
28.	$\sqrt{10{,}37}$	$\sqrt{77{,}09}$	$\sqrt{5388}$	$\sqrt{2{,}465}$	$\sqrt{112{,}4}$
29.	$\sqrt{64{,}56}$	$\sqrt{45{,}63}$	$\sqrt{34{,}28}$	$\sqrt{6{,}5022}$	$\sqrt{7{,}685}$
30.	$\sqrt{750}$	$\sqrt{633}$	$\sqrt{7342}$	$\sqrt{973{,}2}$	$\sqrt{88{,}21}$
31.	$\sqrt{19{,}384}$	$\sqrt{22{,}225}$	$\sqrt{126{,}38}$	$\sqrt{32{,}994}$	$\sqrt{1{,}3449}$
32.	$3{,}6^2$	$4{,}9^2$	$3{,}25^2$	$9{,}61^2$	$7{,}88^2$
33.	36^2	49^2	325^2	961^2	788^2
34.	$4{,}253^2$	$5{,}126^2$	$7{,}938^2$	$2{,}103^2$	$6{,}345^2$
35.	$42{,}53^2$	$51{,}26^2$	$79{,}38^2$	$21{,}03^2$	$63{,}45^2$
36.	$1{,}032^2$	$0{,}032^2$	$0{,}132^2$	$13{,}24^2$	$132{,}4^2$

46. Abschnitt: Anwendungen.

1. Berechne die fehlenden Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks in folgender Aufstellung (beachte $c^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = c \cdot p$, $b^2 = c \cdot q$, $h^2 = p \cdot q$, $c \cdot h = a \cdot b$):

	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)
a =	8	5					20	1,56	
b =	6			6			15		7,5
c =		13	13					1,69	
h =						5			
p =			4		5				
q =				4	6	4			4,5

Pythagoreische Zahlen

2. Je drei ganze Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, heißen pythagoreische Zahlen. Bestätige, daß 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25; 8, 15, 17; 12, 35, 37 solche Gruppen sind.

Hierin liegt die Begründung für das Verfahren der Seilspanner (Bd. I, Bild 113) zum Abstecken eines rechten Winkels.

3. Berechne p, q, h für die rechtwinkligen Dreiecke der Aufg. Nr. 2.

4. Prüfe die in der nebenstehenden Planzeichnung eines Drachens angegebenen Maße durch Rechnung nach.

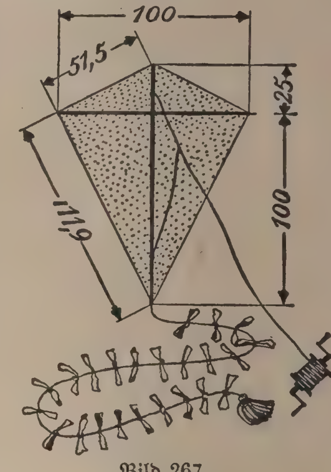


Bild 267.

$\sqrt{n}$

5. Beschreibe die Entstehung der nebenstehenden Schneckenfigur (Bild 268). Zeichne sie vergrößert nach (Maßstab 1 ≙ 2 cm). Prüfe die Genauigkeit deiner Zeichnung durch Vergleich mit $\sqrt{7}$ aus Tafel 1 (Beilage).

Ecklinie

6. Zeige, daß für die Ecklinie gilt:

a) beim Quadrat $d = a \cdot \sqrt{2}$.

b) beim Rechteck $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

c) In welcher Beziehung steht das Quadrat über der Ecklinie zu dem Quadrat selbst?

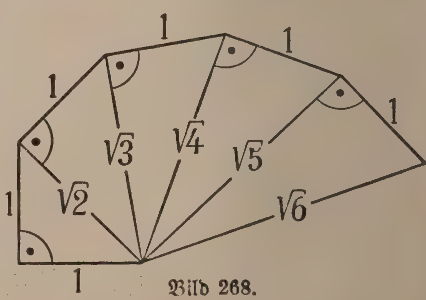


Bild 268.

7. Zeichne folgende Strecken:
a) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ b) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ c) $x = \sqrt{a \cdot b}$
d) $x = a \cdot \sqrt{2}$ e) $x = a \cdot \sqrt{3}$ f) $x = a \cdot \sqrt{5}$
Deute diese Beziehungen geometrisch (vgl. S. 164, Nr. 9).

8. Wie groß ist die Seite eines Quadrates, das einem Kreise mit dem Radius r a) einbeschrieben, b) umbeschrieben ist? (z. B. r = 3; 4,5; 6,3 cm).

9. Das gleichseitige Dreieck wird durch die Höhe in zwei deckungsgleiche rechtwinklige Dreiecke mit den Seiten a, h und $\frac{a}{2}$ zerlegt. Zeige, daß **Gleichseitiges Dreieck**

a) $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$, b) $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ ist.

10. Berechne die Fläche eines einem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Sechsecks. r = 4; 5,3; 7,5 cm.

11. Berechne die fehlenden Stücke eines gleichschenkligen Dreiecks nach nebenstehender Tabelle.

	a)	b)	c)	d)	e)
c	50	27		7,8	
a = b		20	16		
h	32		12		26
F				31,2	65

12. Berechne von einer Raute mit den Ecklinien e = 5 cm und f = 7 cm a) die Fläche, b) die Seite, c) den Radius des Inkreises.

13. Berechne Umfang und Fläche eines gleichseitigen Dreiecks aus a) der Höhe h = 5 (8,2) cm, b) dem Umkreisradius r = 3 (4,5) cm.

14. Bei einer Geländeübung der Hitlerjugend soll die Entfernung zwischen der Waldspitze A und dem Schneisenende B (Bild 269) bestimmt werden. Sie kann wegen des Teiches nicht unmittelbar gemessen werden, deshalb wird die senkrecht zur Straße liegende Strecke $\overline{BC}$ und auf der Straße die Strecke $\overline{CA}$ abgeschritten. Die Schrittzahlen für $\overline{BC}$ und $\overline{CA}$ sind a) 204 und 100, b) 343 und 775; die Schrittlänge ist 0,8 m. Wieviel Meter beträgt die gesuchte Entfernung? **Geländesport**

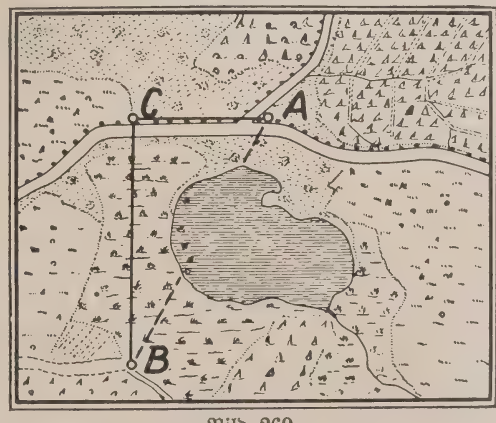


Bild 269.

15. Der Punkt P_1 hat die Koordinaten $x_1 = 2$; $y_1 = 3$, der Punkt P_2 $x_2 = 5$; $y_2 = 7$. a) Wie groß ist ihre Entfernung e? b) Stelle die Formel allgemein auf. **Strecke $\overline{P_1 P_2}$**

16. Von zwei Geländepunkten sind nur ihre Gitterzahlen $R_1 = 3421{,}06$ und $H_1 = 5537{,}74$ bzw. $R_2 = 3422{,}24$ und $H_2 = 5538{,}3$ bekannt. Wie groß ist bei einem Maßstab 1 : 25000 ihre Entfernung? Suche diese Punkte auf der Karte I (Anlage) auf und miß nach.

17. Die Entfernung der Punkte A und B beträgt auf dem Meßtischblatt 9,2 cm. A liegt 150 m höher als B. Es soll eine geradlinige Leitung zwischen den Punkten gelegt werden. Bestimme ihre Länge.

18. Bild 270 zeigt eine Schleuderballwurfbahn. Die Wurfweite wird von der Mitte der Abwurflinie aus gemessen. Wie groß ist sie, wenn der Ball gerade in der Ecke A niederfällt?

19[1]**.** Die 100-m-Laufbahn hat eine Breite von 1,20 m. Ein Läufer läuft nicht auf der Mittellinie sondern in Richtung der Ecklinie seiner Bahn. Wieviel m „verschenkt" er? Zeigt eine $^1/_{10}$-Sek.-Stoppuhr bei den normalen Laufgeschwindigkeiten den Verlust an?

A ←20m→ 25m ←10m→

Bild 270.

v · t A C B h ½ c · t E

Bild 271.

20. Mit Hilfe der Echolotung vom Flugzeug aus kann seine Höhe über dem Boden bestimmt werden. Im Bild 271 bedeutet v die Geschwindigkeit des waagerecht liegenden Flugzeugs (über Grund), c die Schallgeschwindigkeit, h die Höhe des Flugzeugs über dem Boden und t die Zeit, die der Schall eines in A gelösten Schusses braucht, um vom Flugzeug ausgehend nach Reflexion am Erdboden in B das Flugzeug wieder zu erreichen.

a) Berechne h allgemein aus dem rechtwinkligen Dreieck.

b) $v = 60$ m/sec, $c = 333$ m/sec, $t = 12$ Sek. $h = ?$

c) $v = 100$ m/sec, $c = 333$ m/sec, $t = 2$ Sek. $h = ?$

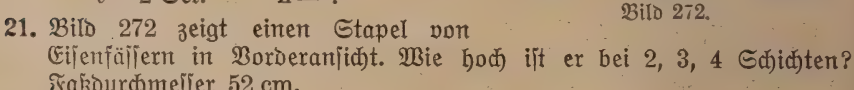


Bild 272.

21. Bild 272 zeigt einen Stapel von Eisenfässern in Vorderansicht. Wie hoch ist er bei 2, 3, 4 Schichten? Faßdurchmesser 52 cm.

---

1) Die Aufgabe kann nur gelöst werden, wenn 45. Abschnitt E behandelt wurde.

XIV. Körperberechnung (1. Teil).

47. Abschnitt: Würfel, Quader und senkrechte Säule.

A. Mantel und Oberfläche.

1. Ein alleinstehendes Siedlungshaus mit rechteckigem Grundriß soll neu verputzt werden. Es ist a = 8,2 m lang, b = 9,5 m breit, c = 8,4 m bis zu seinen vier Dachtraufen hoch. Wieviel qm Fläche ist zu bearbeiten, wenn für Türen und Fenster 20% abgehen?

2. Die Begrenzungsflächen von Quader, Würfel und Säulen sind, bis auf die Grundflächen der Säulen, die beliebige Vielecke sein können, Rechtecke. Bezeichnet man die Kanten des Quaders mit a, b, c, die Würfelkante mit a, die Grundkanten einer n-seitigen Säule mit a, b, c ... k, ihre Höhe, die gleich der Seitenkante ist, mit h, ihre Grundfläche mit G, deren Umfang mit u = a + b + c + ... + k, so ergeben sich für Mantel (M) und Oberfläche (O) dieser drei Körper die folgenden Formeln. Begründe sie! **Mantel Oberfläche**

Würfel	Quader	Säule
$M = 4a^2$	$M = 2(a + b)c$	$M = u \cdot h$
$O = 6a^2$	$O = 2(ab + bc + ca)$	$O = M + 2G$

B. Rauminhalt.

3. Wieviel cbm Luft sind in einem Klassenzimmer, das a = 8 m lang, b = 6 m breit und c = 4 m hoch ist?

4. **a)** Bei der Berechnung des Rauminhaltes eines Quaders mit den Kanten a, b und c sind entsprechende Betrachtungen wie bei der Berechnung des Flächeninhaltes eines Rechtecks (S. 153, Nr. 1 ··· 3) anzustellen.
b) a, b und c seien ganze Zahlen. Man zerlege den Körper (Bild 273) durch Parallelebenen zur Seitenfläche in a (= 5) Schichten, jede Schicht durch Parallelebenen zur Vorderfläche in b (= 3) Säulen und jede Säule durch Parallelebenen zur Grundfläche in c (= 4) Würfel. Dann besteht der ganze Körper aus a (= 5) Schichten oder a · b (= 5 · 3) Säulen oder a · b · c (= 5 · 4 · 3) kleinen Würfeln; also ist sein Rauminhalt allgemein:

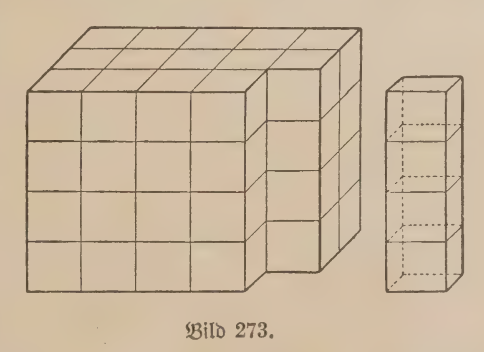


Bild 273.

$$V = a \cdot b \cdot c$$ **Quader**

c) Da für den Würfel $a = b = c$ ist, so folgt

Würfel

$$V = a^3$$

d) Die Formeln in b) und c) gelten auch für Brüche.

5. a) Zerlegt man einen Quader (Grundkanten a und b, Höhe c) durch einen ebenen Schnitt so, daß dieser die beiden Grundflächen in gleiche rechtwinklige Dreiecke mit den Lotseiten a und b teilt, so entstehen zwei gleiche dreiseitige Säulen (Bd. I, Bild 110). Jede hat den halben Rauminhalt des Quaders, also ist für die dreiseitige Säule $V = \frac{1}{2} abc$; setzt man $\frac{1}{2} ab = G$ und $c = h$ ein, so ist $V = Gh$.

Diese Formel gilt für jede dreiseitige Säule. (Warum?)

b) Entsprechend der Zerlegung eines Vielecks in Dreiecke kann man eine n-seitige Säule in lauter dreiseitige zerlegen. Daher gilt für alle Säulen

Säule

$$V = Gh$$

48. Abschnitt: Anwendungen.

Vorbem.: In den folgenden Aufgaben wird neben dem Rauminhalt auch das Gewicht und das Artgewicht der betreffenden Körper benutzt. Dabei ist es wichtig, die Benennungen für Rauminhalt und Gewicht richtig einander zuzuordnen (Bd. I, 21. Abschn.). Benutze möglichst den Rechenstab.

Beachte: mg $\widehat{=}$ mm³, g $\widehat{=}$ cm³, kg $\widehat{=}$ dm³, (oder $\widehat{=}$ l), t $\widehat{=}$ m³.

Raumecklinie

1. Übungssätze: Begründe die Formeln für Flächen- und Raumecklinien:

a) beim Würfel (Bild 274 a):

$d_1 = a\sqrt{2}$, $d = a\sqrt{3}$

b) beim Quader (Bild 274 b):

$d_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$

$d_2 = \sqrt{b^2 + c^2}$

$d_3 = \sqrt{c^2 + a^2}$

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

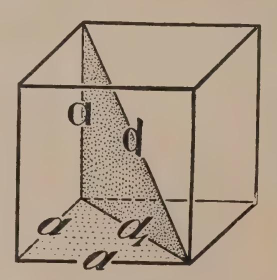


Bild 274 a.

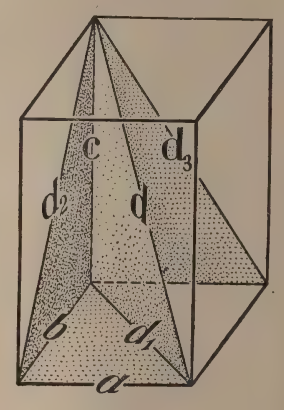


Bild 274 b.

2. Wie lang ist die Raumdiagonale des Würfels mit der Kantenlänge a) a = 1 dm, b) a = 1 m, c) a = 35,4 cm?

3. Wie lang sind Flächen- und Raumdiagonalen eines Quaders, bei dem a) a = 12 cm, b = 4 cm, c = 3 cm; b) a = 4,2 cm, b = 5,5 cm, c = 9,8 cm ist?

4. Berechne Inhalt, Oberfläche und Raumdiagonale einer quadratischen Säule von der Grundkante a und der Höhe 2 a.

5. Eine Firma gibt in ihrem Prospekt für Eisschränke V Liter bei a cm Breite, b cm Tiefe und c cm Höhe (Innenmaße) Kühlraum an. Prüfe die Prospektangaben nach.

	Kühlraum	a	×	b	×	c	cm³
a)	90 l	57	×	42	×	39	cm³
b)	130 l	66	×	48	×	42	cm³
c)	205 l	76	×	58	×	47	cm³
d)	90/85 l	54	×	42,5	×	36,5	cm³
e)	120/115 l	66,5	×	47	×	37	cm³
f)	200/195 l	83	×	56	×	42	cm³
g)	125 l	71	×	47	×	37	cm³

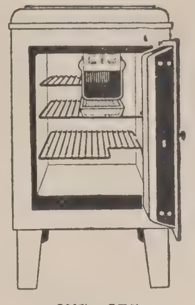


Bild 275.

6. Bestimme das Gewicht der Luft in Aufg. Nr. 3, S. 173.

7. Die Sprunggrube auf dem Schulhof ist a m lang und b m breit. Auf 1 qm Fläche werden 1,8 dz Sand gerechnet. Bestimme die notwendige Sandmenge für folgende Abmessungen und stelle fest, ob sie mit einem $1\frac{1}{2}$-Tonner[1] auf einmal angefahren werden kann:
a) $a = 3\frac{1}{2}$ m, $b = 2\frac{1}{4}$ m, b) $a = 3\frac{3}{4}$ m, $b = 2\frac{4}{5}$ m.

8. Stelle die Formeln für Mantel, Oberfläche und Rauminhalt für a) die quadratische Säule, b) die dreiseitige regelmäßige gerade Säule auf. Für beide sei die Grundkante a, die Höhe h.

9. Berechne M, O, V nach Aufg. 8a, wenn a) $a = 4$ dm, $h = 17$ cm; b) $a = 5{,}3$ cm, $h = 8{,}2$ cm ist.

10. Berechne M, O, V nach Aufg. 8b, wenn a) $a = 1{,}2$ m, $h = 3{,}5$ m; b) $a = 75$ cm, $h = 2{,}4$ m ist.

11. Im Jahre 1935 wurde die Deutschlandhalle in Berlin eingeweiht. Sie hat die Gestalt eines Quaders, dessen Länge $a = 140$ m, Breite $b = 120$ m und Höhe $h = 25$ m beträgt.
a) Wieviel Kubikmeter umbauten Raum umfaßt danach die Halle? (Das flache Dach und die Ränge werden von nur vier Säulen getragen.)
b) Wieviel Siedlungshäuser von $V_1 = 8 \cdot 9 \cdot 10$ cbm Rauminhalt,
c) wieviel Berliner Wohnhäuser von $V_2 = 18 \cdot 15 \cdot 22$ cbm Rauminhalt würden darin enthalten sein?

12. Eine Fliese ist 3 cm hoch und hat die Form einer flachen sechsseitigen Säule, deren Grundkante $a = 12$ cm lang ist. Wieviel wiegen 3000 Fliesen? (Artgew. $s = 2{,}3$.) Könnte sie ein $1\frac{1}{2}$-Tonner auf einmal anfahren?

13. Der Tribünenbau des Zeppelinfeldes in Nürnberg enthält in seinen Pfeilerhallen 144 Pfeiler von 8,80 m Höhe und $90 \cdot 90$ cm² Querschnitt aus Jurawerkstein. a) Wieviel cbm Stein sind das? b) Wie schwer ist ein Pfeiler? (Artgewicht 2,8.)

---

[1] Fachausdruck für einen LKW., der bis $1\frac{1}{2}$ t Nutzlast befördern kann.

14. Ein würfelförmiger Sockel aus Sandstein (Artgewicht $s = 2{,}4$) hat eine Kantenlänge von 2,72 m. Bestimme das Gewicht.

15. Wieviel wiegt ein Würfel aus Eisen von der Kantenlänge 0,63 m? (Artgewicht $s = 7{,}6$.)

16. Wie weit taucht ein Würfel aus Holz ($s = 0{,}78$) in Wasser ein? Kantenlänge $a = 15$ cm.

17. Wie dick muß eine Eisenplatte (Artgewicht $s_1 = 7{,}6$) sein, mit der ein Würfel aus Tannenholz (Artgewicht $s_2 = 0{,}5$) auf einer seiner Flächen versehen wird, damit er gerade im Wasser schwebt? Kantenlänge des Würfels $a = 27$ cm.

18. Ein Lehrling holt vom Sägewerk sechs lufttrockene Kiefernbretter, je 4,50 m lang, 35 cm breit und 28 mm stark ($s_1 = 0{,}54$) und sechs lufttrockene Eichenbretter je 3,5 m lang, 30 cm breit und 34 mm stark ($s_2 = 0{,}78$). Wie schwer ist die Last?

19. Ein Mensch braucht in der Ruhe etwa 1 cbm Luft je Stunde zur Atmung. Wieviel Menschen könnten ohne Zufuhr von Frischluft in einem quaderförmigen Raum von h m Höhe, t m Tiefe und b m Breite höchstens auf n Stunden untergebracht werden? a) Stelle die Formel allgemein auf.

b) $h = 2{,}5$ $t = 6$ $b = 4$ $n = 2\frac{1}{2}$
c) $h = 3{,}2$ $t = 4{,}8$ $b = 5{,}3$ $n = 1\frac{3}{4}$
d) $h = 2{,}45$ $t = 3{,}24$ $b = 4{,}58$ $n = 3\frac{1}{4}$
} (die amtlichen Bestimmungen fordern für jede Person 3 cbm).

20. Aus einer würfelförmigen Kiste von 45 cm Kantenlänge wird eine Kochkiste hergestellt. Hat ein Topf von 25 l Inhalt darin Platz, wenn drei Fünftel des Kisteninhalts durch die Auspolsterung mit Holzwolle und Stroh (Wärmeschutz!) verloren geht?

21. Eine Futterkiste hat die inneren Abmessungen: $l = 1{,}30$ m, $b = 0{,}90$ m, $h = 0{,}80$ m. Lassen sich 4 dz Hafer (Artgewicht 0,4) darin unterbringen?

22. Der untere Teil der Vorderseite eines neuen Postamtes wird mit zehn gleichen Granitplatten belegt; sie haben die Länge 3 m, die Breite 1,5 m und die Dicke 4 cm. Gewicht der Platten? (Artgewicht 2,8.)

23. Wie weit taucht ein Quader aus Eichenholz (Artgewicht 0,78) mit den Kantenlängen 4 cm, 6 cm und 10 cm in Wasser ein?

24. Eine quadratische Säule von der Grundkante $a = 4{,}5$ cm und der Höhe $h = 10{,}5$ cm aus Tannenholz (Artgewicht 0,5) trägt a) auf einer Grundfläche, b) auf einer Mantelfläche ein Eisenblech von 2 mm Dicke. Wie weit taucht der Körper in Wasser ein? (Artgewicht des Eisens 7,6.)

25. Der Querschnitt eines Eisenbahndammes ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen untere Breite 6 m, dessen obere Breite 4,20 m und dessen Höhe 2,8 m beträgt. Wieviel cbm Erde müssen für eine Länge von 150 m aufgeschüttet werden?

26. **a)** Wieviel cbm Erde müssen bei einer Länge von 350 m beim Panzerabwehrgraben von Aufg. Nr. 25a, S. 158 ausgehoben werden, wenn die untere Breite 2,50 m beträgt? **b)** Beantworte dieselbe Frage für Aufg. Nr. 25b, S. 158. Die untere Breite dieses Grabens betrage hier 5 m.

Zusammenfassung und Übersicht.

I. Der Aufgabe, den Flächeninhalt ebener geradlinig begrenzter Figuren zu bestimmen, dienen verschiedene Verfahren.

1. das Auszählverfahren,
2. das Trapezverfahren,
3. die Berechnung durch Formeln.

Rechteck:	$F = a \cdot b$	**rechtwinkliges Dreieck:**	$F = \frac{1}{2}\, a \cdot b$
Parallelogramm:	$F = g \cdot h$	**allgemeines Dreieck:**	$F = \frac{1}{2}\, g \cdot h$
Trapez: $\left(m = \frac{a+b}{2}\right)$	$F = m \cdot h$	**gleichseitiges Dreieck:**	$F = \frac{1}{4}\, a^2 \sqrt{3}$

II. Der Abschnitt Flächenverwandlung behandelt die Eigenschaften von ebenen Figuren, die zwar verschiedene Gestalt (Form) aber gleichen Flächeninhalt haben. Es ist möglich, jedes beliebige Vieleck in ein Rechteck mit vorgeschriebener Grundlinie zu verwandeln (Satz von den Ergänzungsparallelogrammen). Die Sätze des Euklid gestatten weiterhin die Verwandlung in ein Quadrat, so daß abschließend die Aufgabe gelöst werden kann:

Ein beliebiges Vieleck in ein Quadrat zu verwandeln.

Am Abschluß der gesamten bisher behandelten Geometrie steht **die wichtigste Satzgruppe, die des Euklid und Pythagoras.**

1. Satz des Euklid:	**Satz des Pythagoras:**	**2. Satz des Euklid:**
$a^2 = c \cdot p, \quad b^2 = c \cdot q$	$a^2 + b^2 = c^2$	$h^2 = p \cdot q$
Lotseitensatz		**Höhensatz**

Aus ihnen folgt:

Ecklinie des Quadrats: $d = a\sqrt{2}$

Ecklinie des Rechtecks: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$

Höhe des gleichseitigen Dreiecks: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

III. Die rechnerische Behandlung der Sätze des Euklid und des Pythagoras führt auf die **Quadratwurzel.**

Erweiterung des Zahlenbereiches. Die Subtraktion führt zu den negativen und damit zu den relativen Zahlen, die Division zu den Brüchen. Die ganzen und gebrochenen (positiven und negativen) Zahlen bilden den Bereich der **rationalen[1] Zahlen.** Diese sind von der Form $n = \frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen ($q \neq 0$) sein müssen. Zu ihnen gehören auch die endlichen und die unendlichen periodischen Zehnerbrüche, da sich diese in gewöhnliche Brüche verwandeln lassen.

Bei der Bestimmung der Wurzel aus einer ganzen Zahl treten unendliche nichtperiodische Zehnerbrüche auf. Diese gehören zu den **irrationalen Zahlen,** da sie sich nicht durch ein Verhältnis zweier ganzer Zahlen $\left(\frac{p}{q}\right)$ darstellen lassen. Damit haben wir den Bereich der Zahlen zum dritten Male erweitert. Bild 276 zeigt, daß sich irrationale Zahlen auch durch Strecken darstellen und damit zwischen die rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden einordnen lassen. Rationale und irrationale Zahlen erfüllen die Zahlengerade dicht.

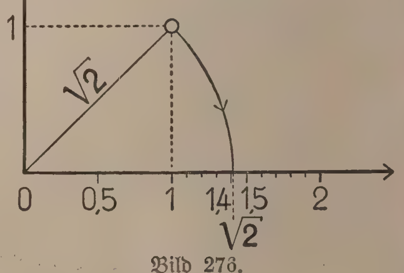


Bild 276.

IV. Zur Körperberechnung benutzt man folgende Formeln:

Würfel	$M = 4a^2$	$O = 6a^2$	$V = a^3$	$d = a\sqrt{3}$
Quader	$M = 2c(a + b)$	$O = 2(ab + bc + ca)$	$V = abc$	$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
Säule	$M = u \cdot h$	$O = M + 2G$	$V = G \cdot h$	

[1]) lat. ratio = Verhältnis.

5. Klasse.

XV. Potenzen mit Ganzen positiven Hochzahlen.

49. Abschnitt: Die Funktion $y = x^n$ und ihr Kurvenbild.

1. Was bedeutet a) 5^2, b) 6^2, c) 7^3, d) 3^4, e) 5^4, f) 10^4?
Allgemein: a^n **bedeutet** $a \cdot a \cdot a \ldots$ bis zum n^{ten} a.

Erkl.: **Die Potenz ist der abgekürzte Ausdruck für ein Produkt aus gleichen Faktoren.** Potenz

In der Potenz a^n heißt a die Grundzahl (Basis), n die Hochzahl (der Exponent). (Bd. I.)

Das Zehnersystem.

Von den verschiedenen Zahlensystemen hat nur das Zehnersystem volle Ausbildung erlangt.

2. a) Wie entsteht das Zehnersystem? Bd. I.
b) Schreibe die Zehnereinheiten 1; 10; 100; ... bis 1 Billion als Potenzen von 10.
c) Wie hängt das Zehnersystem mit den Potenzen zusammen?
d) Welches ist die Grundzahl?

3. Darstellung einer Zahl als Summe von Zehnerpotenzen.
Beispiel: Zerlegung der Zahl 725.

$$725 = 700 + 20 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 5.$$

Zerlege: a) 10 346, b) 4 598 732, c) 7 030 405 062, d) 85,124, e) 10,036.

4. In den Naturwissenschaften werden sehr große oder auch sehr kleine Zahlen oft als Potenzen von 10 angegeben, z. B. a) Lichtgeschwindigkeit: $3 \cdot 10^{10}$ cm/sec, b) Bahngeschwindigkeit der Erde: $3 \cdot 10^6$ cm/sec, c) Avogadrosche Zahl (Anzahl der Moleküle in 1 ccm): $2{,}7 \cdot 10^{19}$, d) Loschmidtsche Zahl (Anzahl der Moleküle in 22,4 *l*): $6{,}06 \cdot 10^{23}$

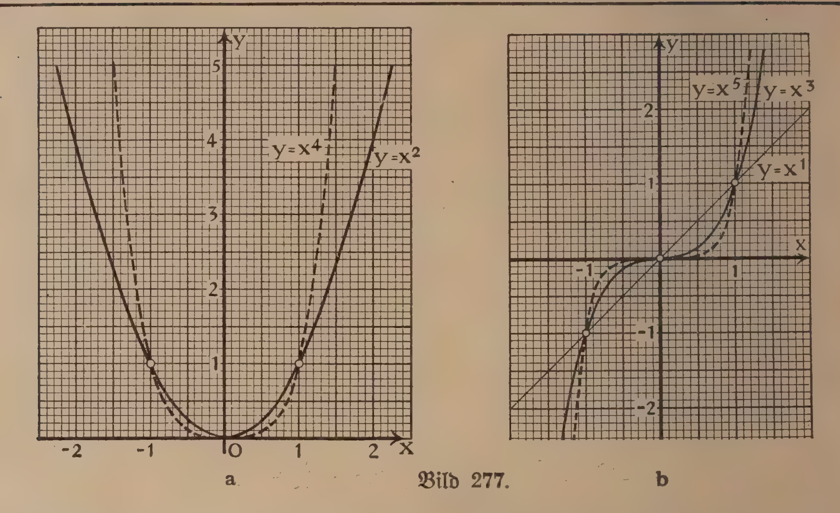
5. Allgemein heißt $y = x^n$ die Potenzfunktion, x und y sind darin veränderlich, n fest. Wertetafel und Kurve für $y = x^2$ siehe S. 166, Nr. 6. Potenzfunktion

6. a) Welche Vorzeichen hat $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$, allgemein $y = x^{2n}$ für positive und welche für negative Werte von x?

In welchen Quadranten verlaufen diese Kurven?

b) Untersuche ebenso $y = x^3$, $y = x^5 \ldots$, allgemein $y = x^{2n+1}$.

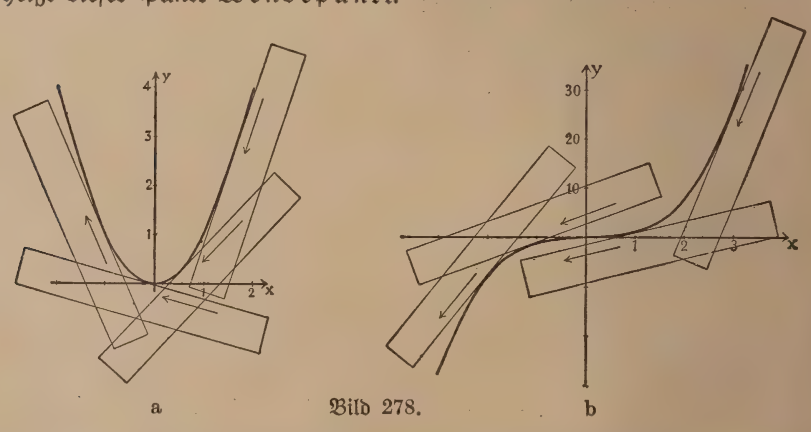
7. Diese Funktionen $y = x^n$ und ihre Kurven heißen Parabeln (2., 3., allgemein n. Ordnung). (Bild 277 a, b.) a) Welche Art von Symmetrie zeigen sie? b) Gib Achse und Zentrum der Symmetrie an. c) Welche Punkte haben diese Kurven gemein? d) Wie verhalten sie sich in der Nähe des Nullpunktes? e) Die Symmetrieachse der Parabeln gerader Ordnung $y=x^{2n}$ heißt kurz die Achse, ihr Schnittpunkt mit der Parabel der Scheitel. Parabeln n ter Ordnung — Achse und Scheitel



a Bild 277. b

8. Die Parabeln gerader Ordnung haben im Nullpunkt einen Scheitel. Fahre mit dem Lineal an einer Kurve entlang (Bild 278a), die Kurve liegt stets oberhalb des Lineals. Betrachtet man sie in der Richtung der positiven y-Achse, so erscheint sie erhaben (konvex). Führe die gleiche Überlegung für $y = x^3$ durch. Gleitet das Lineal (Bild 278b) an der Kurve entlang, so liegt sie im 1. Quadranten oberhalb des Lineals, im 3. Quadranten unterhalb; im Nullpunkt wendet sie sich in bezug auf das Lineal; darum heißt dieser Punkt **Wendepunkt**.

Wendepunkt



a Bild 278. b

Beschreibe, wie ein Radfahrer oder Schlittschuhläufer eine Kurve nach Bild 278a und b durchfahren würde.

Spricht man von **der** Parabel, so meint man stets die quadratische $y = x^2$, während $y = x^3$ „Wendepunktsparabel" genannt wird.

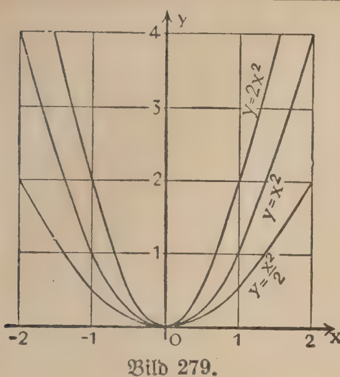


Bild 279.

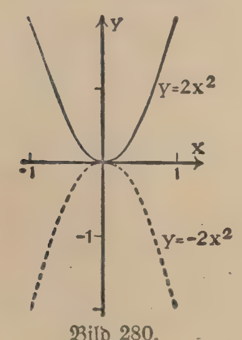


Bild 280.

9. Zeichne in ein Achsenkreuz
a) $y=x^2$, **b)** $y=x^4$ und deute noch skizzenhaft den Verlauf von $y=x^6$, $y=x^8$, $y=x^{10}$ darin an (Bild 277a).

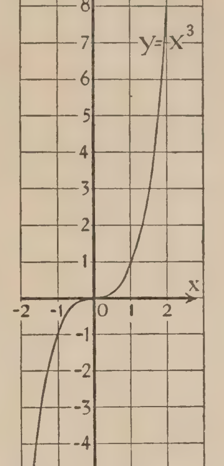
10. Zeichne ebenso in ein Achsenkreuz
a) $y=x^3$, **b)** $y=x^5$ und deute noch skizzenhaft den Verlauf von $y=x^7$ an (Bild 277 b.)

11. Zeichne in ein Achsenkreuz $y=x^2$, $y=2x^2$, $y=\frac{1}{2}x^2$, $y=\frac{1}{10}x^2$ (Bild 279).

12. Ebenso $y=-x^2$, $y=-2x^2$, $y=-\frac{1}{2}x^2$, $y=-\frac{1}{10}x^2$ (Bild 280).

13. Ebenso $y=x^3$, $y=2x^3$, $y=\frac{1}{2}x^3$, $y=\frac{1}{10}x^3$.

14. Ebenso $y=-x^3$, $y=-2x^3$, $y=-\frac{1}{2}x^3$, $y=-\frac{1}{10}x^3$.



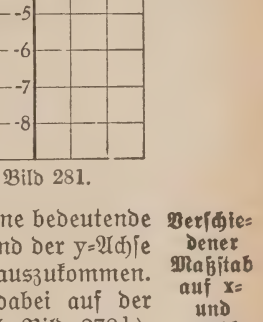


Bild 281.

15. a) Diese Kurven spielen in Naturwissenschaft und Technik eine bedeutende Rolle. Da y stark wächst, wählt man zuweilen auf der x- und der y-Achse verschiedene Maßstäbe, um auf dem Zeichenblatt gut auszukommen. **b)** Zeichne nach Bild 281 $y=x^3$ noch einmal. Wähle dabei auf der **x**-Achse 2 cm als Einheit und auf der y-Achse 1 mm (vgl. Bild 278 b). **Verschiedener Maßstab auf x- und y-Achse**

50. Abschnitt: Das Rechnen mit Potenzen.

A. Vorübungen.

Vorbem.: Nach der Erklärung der Potenz (S. 179) hat der Ausdruck a^1 keinen Sinn. Man hat festgesetzt (Bd. I):

$$a^1 = a.$$

1. Was ergibt: **a)** 2^5, **b)** 5^2, **c)** 10^6, **d)** $0{,}2^3$, **e)** $(-2)^4$, **f)** $(-3)^2$, **g)** $(-5)^4$, **h)** $(-6)^3$, **i)** $(\frac{1}{2})^2$, **k)** $(-\frac{1}{3})^3$, **l)** $(\frac{3}{4})^2$, **m)** $(-0{,}3)^4$, **n)** $(-0{,}1)^5$, **o)** $0{,}5^3$, **p)** $(2x)^2$, **q)** $(\frac{a}{4})^3$, **r)** $(\frac{1}{a})^5$, **s)** 7^1, **t)** 1^7, **u)** $(-9)^1$, **v)** $(\frac{1}{10})^1$?

2. Bei der Addition und Subtraktion von Potenzen gibt es keine Vereinfachungen. Da nur gleichartige Größen addiert und subtrahiert werden können, gilt: nur solche Potenzen lassen sich (algebraisch) addieren, die in Grund- und Hochzahl übereinstimmen.

3. Berechne die algebraische Summe: a) $5^2 + 4^3$, b) $5^2 + 4^2$, c) $5^3 + 5^2$, d) $a^2 + a^3$, e) $6^3 - 5^2$, f) $4^2 - 3^2$, g) $5^3 - 5^2$, h) $x^3 - y^3$, i) $a^p + b^q$ k) $a^p + b^p$, l) $a^p - a^q$, m) $5u^2 - 3v^4$, n) $7a^4 + 6a^4 - 10a^4$.

B. Potenzen mit gleicher Grundzahl.

4. Bilde: $4^3 \cdot 4^5 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \; \cdot \; 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^8$
$a^3 \cdot a^5 = a \cdot a \cdot a \; \cdot \; a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$ allgemein:
$a^p \cdot a^q = a \cdot a \cdot a \ldots$ [p mal als Faktor] $\times\, a \cdot a \cdot a \cdot a \ldots$ [q mal als Faktor],
$= a \cdot a \cdot a \ldots [(p + q)$ mal als Faktor].

I $\boxed{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$ i. W.? — Wie heißt die Umkehrung?

Berechne danach a) $3^5 \cdot 3^7$, b) $a^4 \cdot a^6$, c) $x^n \cdot x^2$, d) $x^{2n} \cdot x^n$.

5. a) $3^2 \cdot 3^3$ b) $a^6 \cdot a^7$ c) $4^3 \cdot 4$ d) $b^6 \cdot b$
e) $a^m \cdot a^{2m}$ f) $z^{m+1} \cdot z^3$ g) $a^{m+1} \cdot a^{n+2}$ h) $v^{x-1} \cdot v^{x+1}$
i) $u^{2m+3} \cdot u^{4-3m}$ k) $a^x \cdot a$ l) $x^{2n} \cdot x^{2-n}$ m) $b^{5-p} \cdot b^{2p-5}$

6. a) $2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^4$ b) $10^2 \cdot 10^4 \cdot 10^3$ c) $3^3 \cdot 3^2 \cdot 3$ d) $4^n \cdot 4^{2n} \cdot 4^5$
e) $a^5 \cdot a^2 \cdot a^3$ f) $x^5 \cdot x^7 \cdot x$ g) $b^m \cdot b^n \cdot b^p$ h) $y^m \cdot y^{2m} \cdot y^{m+1}$
i) $(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{2})^2$ k) $(\frac{1}{4})^3 \cdot (\frac{1}{4})^5$ l) $(\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3})^3$ m) $(\frac{a}{2})^3 \cdot (\frac{a}{2})^4 \cdot (\frac{a}{2})^5$

7. a) $a^2b^3 \cdot a^3b^4$ b) $2a^4y \cdot 4y^3$ c) $\frac{1}{2}ab^3 \cdot \frac{1}{3}a^4$ d) $z^3 \cdot 3z^{n+1}$
e) $3a^2 \cdot 3ab$ f) $x^3 \cdot 2^3 \cdot 6x$ g) $(m-n)^6 \cdot (m-n)$ h) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^4$

8. a) $3a^2 \cdot 4a^5 \cdot 5a^7$ b) $0{,}2x^2 \cdot 6x^3 \cdot 3x$ c) $2{,}5y^2 \cdot 0{,}4y^7 \cdot 5{,}6y^4$
d) $\frac{1}{3}m \cdot \frac{2}{5}m^2 \cdot \frac{3}{4}m^4$ e) $\frac{2}{7}z^6 \cdot \frac{4}{9}z^3 \cdot \frac{7}{8}z^2$ f) $\frac{5}{12}b^9 \cdot \frac{6}{13}b^7 \cdot \frac{4}{5}b^5$
g) $x^a \cdot x^3 \cdot x^{2a}$ h) $y^2 \cdot \frac{1}{3}y^5 \cdot \frac{3}{4}y^3$ i) $\frac{1}{2}x^2y^5 \cdot \frac{7}{9}x \cdot 3^2y$

9. a) $4x^2 \cdot 3a^3 \cdot 5a^5$ b) $0{,}6x^3 \cdot 1{,}4y^6 \cdot 0{,}5y$ c) $\frac{2}{3}z^3 \cdot 1{,}5u^6 \cdot 5{,}2u^7$
d) $8x^2y \cdot \frac{3}{4}x^3 \cdot 2y^2$ e) $3abc^2 \cdot 9a^4bc \cdot 5a^3b^2c$ f) $\frac{2}{3}a^3bx \cdot \frac{3}{4}abx^2 \cdot 4a^2$
g) $x^2 \cdot uv \cdot v^2x$ h) $a^{3m}b^{4n} \cdot a^{4n}b^{5m}$ i) $r^2 \cdot z^4 \cdot rs^4 \cdot s \cdot z^2$

10. a) $5a^3b^2 \cdot 6a^4b^5$ b) $0{,}4x^2y^3 \cdot 3{,}4x^3y^2$ c) $\frac{3}{4}c^5d^6 \cdot \frac{4}{5}c^2d \cdot \frac{5}{9}c^4d^{12}$
d) $2ab^2(a+b)^2$ e) $\frac{2}{3}a(a^3 - a^2)$ f) $\frac{1}{3}a^6(6b^2 - a^6)$
g) $\frac{1}{2}x^2 \cdot y^{a+b} \cdot 2y^b$ h) $x^{m-n}y^{n+1} \cdot x^{2m}y^{1-n}$ i) $x^a \cdot x^b \cdot 3x^{a+b}$

11. a) $\frac{a^2b^4}{3} \cdot \frac{a^3b^7}{4}$ b) $\frac{3m^5n^6}{10} \cdot \frac{5m^2n^8}{9}$ c) $\frac{u^3v^5}{45x} \cdot \frac{3u^2v^3}{4x}$
d) $\frac{4a^5b^4}{9c^2} \cdot \frac{18a^3b^2}{5c^4}$ e) $\frac{3a^2 \cdot 5ab^2}{x^2 \cdot xy}$ f) $\frac{21a^3}{22xu} \cdot \frac{2ab}{7xu^2}$

12. a) $(-3)^4 \cdot (-3)^2$ b) $(-a)^5 \cdot (-a)^3 \cdot (-a)^2$ c) $(-3x)^2 \cdot (-3x)^3$

13. a) $(6a^5 + 2a^4 + 3a^2 + 4a) \cdot a$ b) $(0{,}3x^4 - 0{,}2x^3 + 1{,}7x^2 - 3) \cdot 0{,}5x^2$
c) $(3a^2 + 5a^4 - 6a^5 - 8a) \cdot a^3$ d) $\frac{1}{2}(3x^2 - 0{,}5xy + 5y^3)x^2$
e) $3a^2(6a^3b^2 - 5ab) - 15a^3b$ f) $3a^2b^2 - 2ab^2(6a^3b^2 - 5ab^2)$

14. a) $(3a+2b)^2$ b) $(5x-4y)^2$ c) $(0{,}3u-0{,}4v)^2$
d) $(ab^2+ba^2)^2$ e) $(0{,}4x^2y^3-0{,}2xy^3)^2$ f) $(\frac{1}{2}c^3d^4-\frac{2}{3}c^5d^2)^2$
g) $(x^2+x-1)^2$ h) $(a^2-a+1)^2$ i) $(a^3+a^2-1)^2$

15. a) $(y^2-y+1)\cdot(y^2-1)$ b) $(z^2+z-1)\cdot(z^2+1)$ c) $(b^2-b-1)\cdot(b^2-1)$
d) $(3a+2b^3)^2\cdot(a+b)$ e) $(p^3+q^3)\cdot(p^3-q^3)$ f) $(u^3v-v^2u)^2\cdot(u-v)$

16. a) $(x+2)^2+(x-2)^2$ b) $(x+2)^2-(x-2)^2$ c) $(a+b)^3-(a-b)^3$
d) $(p+q)^3+(p-q)^3$ e) $(u+v)^2+(u-v)^2$ f) $(r-s)^2-(r+s)^2$

17. Zerlege in Faktoren:
a) $a^{14}+a^8+a^5$ b) $15x^7-12x^5+9x^3$ c) $57y^{12}+38y^8-19y^2$
d) $3^2+3^4+3^3$ e) $2^3+2^5-2^4$ f) $13x-26x^2+13^2x^5$
g) $5x-25x^2-10x^3$ h) $r^3-3rs-r^3s$ i) $x^5+x^{15}+x^{12}$
k) $3a^2b^4-12a^2b^4$ l) $10a^2b^4+12a^4b^4$ m) $24ab^9c-6ab$
n) $2a^2-5a^3+3a^4$ o) $\frac{1}{6}a^{12}+\frac{1}{12}a^{13}+\frac{1}{3}a^{11}$ p) $0{,}3s^8-1{,}2s^2-0{,}6s^5$

18. Bilde: $\frac{7^5}{7^3}=\frac{7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7}{7\cdot7\cdot7}=7^2=7^{5-3}$; $\frac{a^5}{a^3}=?$

allgemein: $\frac{a^p}{a^q}=\frac{a\cdot a\cdot a\ldots\ldots\ [p \text{ mal als Faktor}]}{a\cdot a\cdot a\ldots\ldots\ [q \text{ mal als Faktor}]}$

II $\boxed{\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}}$ (wenn $p>q$), i. W.? Wie heißt die Umkehrung?

Berechne danach: a) $\frac{3^{10}}{3^8}$ b) $\frac{a^{15}}{a^{12}}$ c) $\frac{x^{n+4}}{x^n}$ d) $\frac{y^{n+3}}{y^2}$.

Was gibt aber: e) $\frac{3^5}{3^7}$ f) $\frac{x^2}{x^6}$ g) $\frac{a^{10}}{a^{12}}$ h) $\frac{b^3}{b^{n+5}}$?

Ist $q>p$, so bleiben $(q-p)$ Faktoren im Nenner übrig:

II*a* $\boxed{\frac{a^p}{a^q}=\frac{1}{a^{q-p}}}$ (wenn $q>p$), i. W.?

19. a) $\frac{5^4}{5^2}$ b) $\frac{6^5}{6^3}$ c) $\frac{2^{11}}{2^7}$ d) $\frac{x^{12}}{x^4}$ e) $\frac{a^{17}}{a^{10}}$ f) $\frac{a^m}{a^n}$ g) $\frac{y^b}{y}$
h) $\frac{10^5}{10^2}$ i) $\frac{10^{10}}{10^9}$ k) $\frac{3^9}{3^7}$ l) $\frac{2x^2}{x}$ m) $\frac{18x^4}{x}$ n) $\frac{5a^8}{25a^6}$ o) $\frac{0{,}2r^5}{0{,}4r^3}$
p) $\frac{z^m}{z^3}$ q) $\frac{b^{4x}}{b}$ r) $\frac{c^{m+3}}{c^3}$ s) $\frac{x^{2+m}}{x^{3-m}}$ t) $\frac{a^3}{a^5}$ u) $\frac{x^p}{x^{p+1}}$ v) $\frac{b^{4n}}{b^{7n}}$

20. a) $\frac{a^{12}b^3}{a^4b^2}$ b) $\frac{x^9y^7}{x^4y^6}$ c) $\frac{2^4\cdot3^5}{2^5\cdot3^3}$ d) $\frac{4^6\cdot5^3\cdot2^4}{4^5\cdot5\cdot2^6}$ e) $\frac{10^3\cdot5^5\cdot4^5}{10^2\cdot5^5\cdot4^6}$
f) $\frac{15a^2b^3}{21ab^2}$ g) $\frac{85x^4y^7}{34xy^1}$ h) $\frac{111y^6z^3}{74z^2y^7}$ i) $\frac{0{,}12c^{13}d^5}{2{,}4c^9d^6}$ k) $\frac{0{,}5ab^3c}{2{,}5a^3bc^2}$
l) $\frac{9a}{15a^5}$ m) $\frac{75ab}{300a^2b^4}$ n) $\frac{(a+b)^5}{(a+b)^2}$ o) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}$ p) $\frac{(a-b)^3}{a-b}$

21. a) $\frac{2{,}5p^2q^3r^6}{0{,}15p^3q^2r^5}$ b) $\frac{3\frac{1}{2}a^4b^2c}{1\frac{3}{4}a^2b^3c^4}$ c) $\frac{2\frac{1}{2}x^{12}y^{11}z^{10}}{1\frac{7}{8}x^8y^3z}$ d) $\frac{1{,}5de^3f^5}{\frac{3}{4}d^2ef^4}$

22. a) $\frac{3a^4b^5}{25x^3y^2} \cdot \frac{5x^2y}{9a^5b^2}$ b) $\frac{20u^3v^4}{21c^4d^5} \cdot \frac{14c^9d^3}{75u^3v^6}$ c) $\frac{0{,}51x^3z^{13}}{1{,}4a^2b^2} \cdot \frac{7ab^3}{1{,}7x^3z^{10}}$ d) $\frac{8a^2b^3}{2ab^4}$

e) $\frac{a^{m+n}}{a^m} \cdot a^m$ f) $\frac{a^{n+2}}{a^{m+2}} \cdot a$ g) $\frac{a^5}{3ab^2} \cdot \frac{2a^2b}{1{,}5a^3}$ h) $\frac{2a^3x}{\frac{1}{2}a^m x^2}$

23. a) $a^4b^5 : a^2b^3$ b) $3x^7y^6 : 6x^3y^5$ c) $1{,}5u^9v^6a^3 : 0{,}05u^9v^3a$

d) $72a^2b^3x^4 : 24a^3b$ e) $63a^3px^5 : 49bq^4x^5$ f) $57p^4q^5 : 12p^3q^3$

g) $18ab : 54a^5b^2$ h) $16x^3y^3 : 64xyr$ i) $2{,}4p^8q^7 : 16p^5q^8$

24. a) $\frac{3x^7y^3}{4a^3b^4} : \frac{15x^3y^7}{16ab^5}$ b) $\frac{7u^3v^2}{9y^6c^9} : \frac{35u^2v^3}{36xc^7}$ c) $\frac{1\frac{1}{2}a^3b^4c^5}{1\frac{1}{4}x^2y^2} : \frac{6ab^4}{5xy^2}$

C. Potenzen mit gleicher Hochzahl.

25. Bilde: $2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = ?$

allgemein: $a^p \cdot b^p = a \cdot a \cdot a \ldots [p\,\text{mal}] \times b \cdot b \cdot b \ldots [p\,\text{mal}]$
$= ab \cdot ab \cdot ab \ldots [p\,\text{mal}]$.

III $\boxed{a^p \cdot b^p = (ab)^p}$ i. W.?

Wie heißt die Umkehrung dieser Regel?

Berechne auf möglichst einfache Weise:

26. a) $2^3 \cdot 5^3$ b) $3^2 \cdot 37^2$ c) $9^2 \cdot 11^2$ d) $2^3 \cdot 35^3$ e) $4^3 \cdot 15^3$

f) $2^5 \cdot 5^5$ g) $8^3 \cdot 125^3$ h) $(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{4}{3})^2$ i) $(\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{5})^2$ k) $(\frac{6}{5})^x \cdot (\frac{5}{6})^x$

l) $2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3$ m) $4^2 \cdot 6^2 \cdot 25^2$ n) $8^3 \cdot 5^3 \cdot 25^3$ o) $(3)^2 \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2$

p) $(\frac{3}{4})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{1}{5})^2$ q) $x^{10} \cdot 10^{10} \cdot (\frac{1}{10})^{10}$ r) $15^3 \cdot (-7)^3$

s) $(-2)^3 \cdot (-5)^3$ t) $u^6 \cdot (-v)^6 \cdot (-z)^6$ u) $(-3)^5 \cdot 2^5 \cdot (-1)^5$

27. a) $\left(\frac{a}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{b}{3}\right)^2$ b) $\left(\frac{m}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{m}{3}\right)^3$ c) $\left(\frac{x}{a}\right)^n \cdot \left(\frac{y}{b}\right)^n$ d) $(4x - 6y)^2 \cdot (\frac{1}{2}y)^2$

e) $12^2 \cdot 25^2$ f) $25^2 \cdot 11^2 \cdot (\frac{1}{25})^2$ g) $(2x)^3 \cdot (4x^2)^3 \cdot (\frac{1}{2}x^3)^3$

28. a) $(a+b)^2 \cdot (a-b)^2$ b) $(x+1)^3 \cdot (x-1)^3$ c) $(a^2b - ab^2)^2 \cdot (a+b)^2$

29. Löse die Klammern auf:

a) $(ab)^3$ b) $(xyz)^4$ c) $(2abx)^5$ d) $(0{,}3uvs)^3$

e) $(2a)^4 \cdot (5a)^4$ f) $(-5x \cdot 2y)^3$ g) $(\frac{3}{4}xy)^2$ h) $(4abx)^3 \cdot (2x)^3$

i) $(p^2 + q^2)^3 + (p^3 - q^3)^2$ k) $(u^3 + v^3)^2 - (u^2 - v^2)^3$

Beispiel: $6^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216$.

30. a) 6^4 b) 15^3 c) 24^2 d) 44^3 e) 45^4 f) 164^3

Bilde: $\frac{3^4}{5^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = (\frac{3}{5})^4$; $\frac{x^7}{y^7} = ?$

allgemein: $\frac{a^p}{b^p} = \frac{a \cdot a \cdot a \ldots p\,\text{mal}}{b \cdot b \cdot b \ldots p\,\text{mal}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \ldots [p\,\text{mal}]$

IV $\boxed{\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p}$ i. W.?

Wie heißt die Umkehrung dieser Regel?

Zusatz: Setzt man in IV $a = 1$, so ergibt sich:

IVα. $\frac{1}{b^p} = \left(\frac{1}{b}\right)^p$ i. W.?

31. a) $\frac{12^4}{4^4}$ b) $\frac{14^3}{35^3}$ c) $\frac{105^5}{21^5}$ d) $\frac{5{,}7^4}{3{,}8^4}$ e) $\frac{1{,}44^2}{36^2}$ f) $\frac{1{,}8^3}{0{,}54^3}$

g) $\frac{48^5}{72^5}$ h) $\frac{36^2}{24^2}$ i) $\frac{27^4}{81^4}$ k) $\frac{3{,}5^3}{0{,}7^3}$ l) $\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$ m) $\frac{\left(\frac{1}{8}\right)^4}{2^4}$

32. a) $\frac{24^4 \cdot 18^4}{90^4}$ b) $\frac{35^2 \cdot 20^2}{56^2}$ c) $\frac{100^3 \cdot 2^3}{\left(33\frac{1}{3}\right)^3}$ d) $\frac{\left(16\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 4^4}{5^4 \cdot 2^4}$

33. a) $\frac{(xyz)^n}{(xy)^n}$ b) $\frac{(4a^2b)^6}{(2ab^2)^6}$ c) $\frac{(x^2 - 36)^2}{(x+6)^2}$ d) $\frac{(a+1)^3 \cdot (a-1)^3}{(a^2-1)^3}$

e) $\frac{(ab^3)^2}{(ab)^2}$ f) $\frac{\left(\frac{1}{2}x^5s^7\right)^4}{\left(\frac{1}{2}xs^7\right)^4}$ g) $\frac{(x^5z)^6}{(zbx^4)^6}$ h) $\frac{(12a^4b)^m}{(3a^4b)^m}$

Löse die Klammern auf:

34. a) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ b) $\left(\frac{8}{7}\right)^2$ c) $\left(1\frac{1}{4}\right)^3$ d) $\left(33\frac{1}{3}\right)^2$ e) $(1{,}6)^2 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^3$

35. a) $\left(\frac{xy}{4}\right)^4$ b) $\left(\frac{2abc}{3a}\right)^4$ c) $\left(\frac{mx}{ny}\right)^2 \cdot \left(\frac{nx}{my}\right)^2$ d) $\left(\frac{15ax}{8z}\right)^2 : \left(\frac{5x^2a}{16z}\right)^2$

36. Berechne für $n = 1, 2\ 3 \cdots 10$ a) $\left(\frac{1}{2}\right)^n$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^n$; c) $\left(\frac{1}{10}\right)^n$.

37. Berechne: $(5^2)^3 = 5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^2 = 5^{2+2+2} = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$

$(x^5)^4 = ?$

allgemein: $(a^p)^q = a^p \cdot a^p \cdot a^p \cdots$ [q mal als Faktor]

$= a^{p+p+p+\cdots}$ [q mal als Summand].

V $\boxed{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$ i. W.? Vα $\boxed{(a^p)^q = (a^q)^p}$ i. W.?

Wie heißt die Umkehrung dieser Regel?

38. a) $(2^3)^2$ b) $(3^2)^3$ c) $(10^4)^2$ d) $(1{,}2^3)^2$

39. $(x^2)^5$ $(y^3)^6$ $(a^m)^4$ $(x^{m+1})^2$

40. $(2a^2)^3$ $(3x^2y^3)^2$ $\left(\frac{1}{3}a^3b^2\right)^3$ $(-a^2)^3$

41. $(-z^3)^2$ $(-5y^2)^3$ $(-0{,}5a^4b^2)^2$ $(-u^2v^3)^4$

42. $[(xy)^4]^2$ $[(a+b)^2]^2$ $\left(\frac{1}{2}abc\right)^3$ $\left(\frac{1}{5}x^4y^3zv^2\right)^2$

43. $(3x^2)^{a+b}$ $(x^{a+b})^{a-b}$ $(2^5x)^2$ $(x^m+1)^2$

44. $\frac{(a^2b^2)^2}{(ab^3)^4}$ $\left(\frac{x^2y}{p^2q}\right)^4$ $\frac{(x^5y^6)^3}{(x^3y^4)^4}$ $\left(\frac{x^2}{y^3z^2}\right)^2$

45. $\frac{(a^4b^5)^2}{(b^3c^2)^3}$ $\frac{(x^3yz^5)^2}{(p^6q^3)^4}$ $\frac{(12a^3b^2c^4)^5}{(6ab^2c^3)^4}$ $\frac{(-9x^2y^3z^5)^3}{(-6x^3yz^4)^3}$

46. a) $\left(\frac{4x^2y^4z^5}{3m^7u^6}\right)^3 : (2x^2y^2z^3)^5$ b) $\left(\frac{ab^5}{c^4}\right)^2 \left(\frac{cb}{a^3}\right)^3$

47. a) $\left[\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right]^2 \cdot [(a+b)^2]^2$ b) $[(x-y)^{a-b}]^{a+b}$

Beispiel für die Benutzung der dem Buche beiliegenden Zahlentafel: Berechne: $1,8^5 = ?$ Anl.: $1,8^5 = 1,8^2 \cdot 1,8^3$; $1,8^2 = 3,240$ (Tafel 2). Tafel 1 liefert: $\frac{18^3}{100} = 58,32$, also $18^3 = 58,32 \cdot 100 = 5832$; $1,8^3 = \frac{18^3}{10^3} = 5,832$; also: $1,8^5 = 3,24 \cdot 5,832 = 18,90$ (abgerundet).

Berechne danach:

48. Nach Tafel 1: a) 11^3 b) 93^3 c) $2,3^3$ d) $0,45^3$ e) 870^3

49. Nach Tafel 2: a) $1,97^2$ b) $8,64^2$ c) $37,5^2$ d) $0,654^2$ e) $2,22^2$

50. Nach Tafel 2: a) $1,885^2$ b) $72,45^2$ c) $0,5054^2$ d) $907,2^2$ e) $0,1222^2$

51. Nach Tafel 1 und 2: a) $1,8^2$ b) $1,8^3$ c) $1,8^4 = 3,240^2 = ?$ d) $1,8^5 = 1,8^2 \cdot 1,8^3 = ?$ e) $1,8^6 = (1,8^3)^2 = ?$ f) $1,8^7 = 1,8^4 \cdot 1,8^3 = ?$

52. Berechne ebenso wie in Nr. 51 die gleichen Potenzen von 4,2.

51. Abschnitt: Volkserhaltung und Volksvermehrung.

1. Gib die Anzahl deiner Vorfahren in jeder Generation an.

Ahnentafel

(Setze in Feld Nr. 1 deinen Vor- und Zunamen, in Nr. 2 den deines Vaters, in Nr. 3 deiner Mutter, in Nr. 4 deines Großvaters väterlicherseits usw. Füge Geburtsort und -tag sowie andere Angaben hinzu.)

a) Über wieviel Jahre erstreckt sich deine Ahnentafel?

b) Wieviel Jahre rechnest du danach für eine Generation?

c) Welche Ahnen haben gerade, welche ungerade Nummern?

d) Welche Gesetzmäßigkeit besteht zwischen der ersten Zahl einer Vorfahrenreihe und der Gesamtzahl der in dieser Reihe auftretenden Ahnen?

Bild 282.

e) Das Kind trägt stets die halbe Nummer seines Vaters. Welche Nummer in der Ahnentafel haben die Eltern und der Großvater väterlicherseits, wenn das Kind die Zahl n trägt?

Unter der ersten Vorfahrenreihe I versteht man die Eltern, unter der zweiten II die Großeltern, unter der dritten III die Urgroßeltern usw.

2. a) Bestimme die Zahl der Ahnen in der ersten, zweiten, dritten und vierten Vorfahrenreihe unter der Voraussetzung, daß keine Verwandtenehen vorgekommen sind, und wann sie lebten (vgl. Bild 282).
b) Desgl. in der siebenten, c) der zehnten, d) der nten Vorfahrenreihe.
Auf eine Geschlechterfolge rechnet man in Deutschland rund 30 Jahre.

3. a) Wieviel Ahnen kämen auf einen heute lebenden Menschen z. Z. des 30jährigen Krieges, wenn keine Verwandtenehen vorgekommen wären? b) Desgl. z. Z. Widukinds (um 800)? c) Wieviel Vorfahren hätten eine Million jetzt lebender „nicht verwandter" Deutscher z. Z. des 30jährigen Krieges gehabt? (Heutige Einwohnerzahl 80 Mill.) (Die Einwohnerzahl des jetzigen Reichsgebiets betrug z. Z. des 30jährigen Krieges rd. 20 Mill. Also müssen wir bei unserer Ahnenforschung auf Ahnengleichheit stoßen. Geschlechterfolge

Vorbem.: Treten Verwandtenehen auf, so verringert sich die Zahl der Ahnen. Sind z. B. die Eltern (in Bild 283, Ziffer 2 und 3) Vetter und Base, so müssen ein Großelternteil väterlicherseits und einer mütterlicherseits Geschwister sein, z. B. Ziffer 5 und 6 (Großmutter väterlicherseits und Großvater mütterlicherseits). Es fallen dann in der dritten Vorfahrenreihe die Vorfahren 10 und 11 mit den Vorfahren 12 und 13 zusammen und können also nur einmal gezählt werden. Es fehlen dann auch die zu den ausgesparten Feldern vorhergehenden Ahnen. Ahnengleichheit



Bild 283.

4. Wie groß ist der „Ahnenschwund"[1], wenn in der Vorfahrenreihe I Vetter und Base verheiratet sind, a) in der Vorfahrenreihe II (Bild 283), III, IV, V, VI, VIII, in der nten Vorfahrenreihe? Ahnenschwund
b) Wie groß ist in diesem Falle die Zahl der Ahnen in der IV., VI., VIII., nten Vorfahrenreihe?

[1] Der Ausdruck „Ahnenschwund" oder Ahnenverlust stammt von dem Geschichtsforscher Lorenz 1832 · · · 1904.

Verwandtenehen

5. a) Zeichne die zugehörige Ahnentafel unter Schraffierung der ausfallenden Felder, wenn ein Großelternpaar Vetter und Base war. b) Berechne die Zahl der Ahnen in den drei vorhergehenden Ahnenreihen (III, IV, V). Wann beginnt der Ahnenschwund? c) Gib allgemein die Zahl der Ahnen in der nten Reihe an.

6. Beide Großmütter eines Menschen waren Schwestern und beide Großväter Brüder. Zeichne die Ahnentafel. Welchen Ahnenverlust hat der Betreffende a) in der dritten, b) vierten, c) nten Vorfahrenreihe?

7. a) Zeige durch Schraffieren an einer Ahnentafel den Ahnenschwund, wenn in der ersten Vorfahrenreihe ein Mann seine Nichte (Schwestertochter) geheiratet hat. Bestimme den Ahnenschwund und die Zahl der Vorfahren in der b) vierten, c) fünften, d) nten Vorfahrenreihe.

8. a) Wie groß ist die Zahl der Nachkommen in der nten Nachfahrenreihe einer Bevölkerung von 2a Personen, wenn angenommen wird, daß stets die gleiche Anzahl von Männern und Frauen vorhanden ist, alle zur Ehe kommen und jede Familie im Durchschnitt b Kinder hat?

Vervollständige die folgende Aufstellung bis zur 6. Nachfahrenreihe.

Anzahl der:	Personen	Familien	Kinder
Ausgangsgeneration	$2a$	a	$x_1 = ab = 2a \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^1$
1. Nachfahrenreihe	ab	$ab \cdot \frac{1}{2} = \frac{ab}{2}$	$x_2 = \frac{ab}{2} \cdot b = 2a \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2$
2. Nachfahrenreihe	$\frac{ab^2}{2}$	$\frac{ab^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{ab^2}{2^2}$	$x_3 = \frac{ab^2}{2^2} \cdot b = 2a \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^3$
3. Nachfahrenreihe	⋮	⋮	⋮
n. Nachfahrenreihe			$x_{n+1} = 2a \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^{n+1}$

Setze $2a = 100\,000$ Personen und berechne[1] b) die Nachkommen (Urenkel) in der 2. Nachfahrenreihe bei durchschnittlich $b = 1{,}8$ Kindern je Familie c) die Zahl der Nachkommen in der 6. Nachfahrenreihe. Beantworte dieselben Fragen, wenn jede Familie $b = 5{,}2$ Kinder hat d) für Aufg. b) und e) für Aufg. c).

Die Bedingungen dieser Aufgaben entsprechen nicht den wirklichen Verhältnissen; bei den folgenden Aufgaben ist dies der Fall.

9. In Deutschland kommen von 100 Personen durch natürliche Auslese durchschnittlich nur $p = 64\%$ zur Fortpflanzung.

Volksvermehrung

Eine Bevölkerung von 2a Personen, mit der gleichen Anzahl von Männern und Frauen, von denen nur p% zur Ehe kommen, habe je Familie im Durchschnitt b Kinder.

[1] Unter Benutzung der beiliegenden Quadrat- und Kubikzahltafeln.

a) Vervollständige die folgende Aufstellung bis zur 6. Nachfahrenreihe:

Anzahl der:	Personen überhaupt	die zur Vermehrung kommen	Familien	Kinder
Ausgangsgeneration	$2a$	$2a\cdot\frac{p}{100}$	$a\cdot\frac{p}{100}$	$x_1=a\cdot\frac{p}{100}\cdot b$ $=2a\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)^1$
1. Nachfahrenreihe	$2a\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)$	$2a\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}$	$a\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)\frac{p}{100}$	$x_2=2a\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot\frac{p}{100}\right)^2$
2. Nachfahrenreihe	..........|..........	..........|..........	..........|..........	$x_3=$ ....|..........
n. Nachfahrenreihe	..........|..........	..........|..........	..........|..........	$x_{n+1}=$ .....|..........

b) Wie groß muß die Kinderzahl b der Familie im Durchschnitt sein, wenn sich unter den gleichen Voraussetzungen von a) eine Bevölkerung von 2a Personen erhalten soll? (Runde das Ergebnis nach oben auf Ganze ab und vergleiche damit die Forderung, daß zur Erhaltung unseres Volkes jede Familie 4 Kinder haben müßte.) Anl.: Setze $x_1 = 2a$.

10. Berechne nach Nr. 9 die Anzahl der Nachkommen, wenn jede Familie $b = 3$ Kinder hat, a) für die Ausgangsgeneration, b) für die erste, c) für die zweite, d) für die fünfte Nachfahrenreihe. **Volkstod**

11. a) bis d) Beantworte die gleichen Fragen wie in Nr. 10 a) bis d), wenn jede Familie $b = 1{,}8$ Kinder hat, wie es zur Zeit der Machtübernahme in der Mehrzahl der deutschen Großstädte der Fall war.

12. a) bis d) Beantworte die gleichen Fragen wie in Nr. 10 a) bis d) für Wien, das in den Jahren vor 1938 mit $b = 1{,}59$ Kindern je Familie den tiefsten Stand in Europa hatte.

13. Gib den Bevölkerungsabstieg unter der Herrschaft des Zweikindersystems an ($b = 2$). Im Deutschen Reich rechnet man mit einer Generationsdauer von 30 Jahren. Berechne die Anzahl der Nachkommen a) in der Ausgangsgeneration (nach 30 Jahren), b) in der ersten Nachfahrenreihe (Enkel; nach 60 Jahren), c) in der zweiten (Urenkel; nach 90 Jahren), d) in der dritten, e) vierten (nach 150 Jahren), f) fünften, g) sechsten, h) siebenten, i) achten, k) neunten Nachfahrenreihe (nach 300 Jahren). l) Veranschauliche diese Ergebnisse. **Zweikindersystem**

14. Beantworte die gleichen Fragen a) bis l) der Aufg. Nr. 13 für $b = 4$ Kinder. **Volkserhaltung**

15. In Polen kommen z. Z. durchschnittlich $b = 4{,}6$ Geburten auf eine Familie. Infolge früherer Heiratsmöglichkeit beträgt dort die Generationsdauer nur 25 Jahre. Wie groß ist die Zahl der Nachkommen (für $2a = 100000$, $p = 64\,\%$) a) x_6 in der fünften Nachfahrenreihe, also nach 150 Jahren (vgl. die Ergebnisse von Nr. 13e, 14e), b) x_{12} in der elften Nachfahrenreihe, also nach 300 Jahren? (vgl. Nr. 13k, 14k). **Bevölkerungsbewegung**

16. Beantworte unter denselben Voraussetzungen wie in der Aufg. Nr. 15 die Fragen a) und b) für Japan, wenn dort z. Z. $b = 4{,}1$ Kinder auf eine Familie kommen.

17. Beantworte unter denselben Voraussetzungen wie in Aufg. Nr. 15 die Fragen **a)** und **b)** für Italien, wenn dort z. B. $b = 4{,}2$ Kinder auf eine Familie kommen.

18. Desgleichen für Frankreich $b = 1{,}6$. (Frankreich hält seine Bevölkerungszahl heute nur durch den Zustrom Fremdblütiger.)

Erbgesundheitsgesetz

19. Die Bedeutung des Erbgesundheitsgesetzes erkennt man, wenn man die Ergebnisse der folgenden Aufgaben einander gegenüberstellt. In einer deutschen Großstadt betrug im Jahre 1932 die Kinderzahl erbgesunder Eltern $b_1 = 1{,}9$, die Kinderzahl erbkranker Eltern $b_2 = 3{,}9$ Kinder je Familie. Die Ausgangsgruppe der Gesunden betrage $2a_1 = 100\,000$, die der Erbkranken $2a_2 = 1000$.

Berechne die Zahl der Nachkommen, wenn nur Gesunde und nur Erbkranke einander heiraten für jede Gruppe, in der **a)** 1. Nachfahrenreihe (Enkel), **b)** 2. Nachfahrenreihe (Urenkel), **c)** 3. Nachfahrenreihe (Ururenkel). **d)** Veranschauliche diese Ergebnisse.

Zusammenfassung und Übersicht.

Erklärung der Potenz a^n s. S. 179.

I	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	III	$a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
II	$\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ $(p > q)$	IV	$\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
II α	$\frac{a^p}{a^q} = \frac{1}{a^{q-p}}$ $(p < q)$	IV α	$\frac{1}{b^p} = \left(\frac{1}{b}\right)^p$
V	$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	V α	$(a^p)^q = (a^q)^p$

Diese Formeln sind zu merken. Die Umkehrungen erhält man, wenn sie von rechts nach links gelesen werden.

I. Lehrs.: Potenzen mit gleicher Grundzahl werden multipliziert, indem man ihre Grundzahl mit der Summe der Hochzahlen potenziert.

Ia. Umkehrung: Eine Zahl wird mit einer Summe potenziert, indem man sie mit den einzelnen Summanden potenziert und die Potenzen multipliziert.

II. Lehrs.: Eine Potenz wird durch eine niedrigere mit gleicher Grundzahl dividiert, indem man ihre Grundzahl mit der Differenz der Hochzahlen potenziert.

IIa. Umkehrung: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenziert, indem man sie mit Minuend und Subtrahend potenziert und die erste Potenz durch die zweite dividiert.

III. Lehrs.: Potenzen mit gleicher Hochzahl werden multipliziert, indem man das Produkt ihrer Grundzahlen mit der Hochzahl potenziert.

IIIa. Umkehrung: Ein Produkt wird potenziert, indem man seine Faktoren einzeln potenziert und die Potenzen multipliziert.

IV. Lehrs.: Potenzen mit gleicher Hochzahl werden dividiert, indem man den Quotienten ihrer Grundzahlen mit der Hochzahl potenziert.

IVa. Umkehrung: Ein Bruch wird potenziert, indem man Zähler und Nenner potenziert und die Potenzen dividiert.

IVα. Zusatz: Der Kehrwert einer Potenz ist gleich der Potenz des Kehrwertes der Grundzahl.

V. Lehrs.: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Grundzahl mit dem Produkt der Hochzahlen potenziert.

Vα. Zusatz: Beim Potenzieren von Potenzen ist die Reihenfolge der Hochzahlen beliebig.

Va. Umkehrung: Man potenziert eine Zahl mit einem Produkt, indem man sie mit den einzelnen Faktoren nacheinander potenziert; die Reihenfolge ist dabei beliebig.

Anm. 1: Potenzen positiver Zahlen sind positiv.
Anm. 2: Gerade Potenzen negativer Zahlen sind positiv.
Anm. 3: Ungerade Potenzen negativer Zahlen sind negativ.
Anm. 4: Für die Addition und Subtraktion von Potenzen ergibt sich im allgemeinen keine Vereinfachung.

XVI. Quadratische Funktion und quadratische Gleichung.

52. Abschnitt: Die quadratische Funktion.

A. Die Funktionen $y = x^2$, $y - b = x^2$, $y + b = x^2$.

1. Stelle für die Funktion $y = x^2 + 2$ eine Wertetabelle auf für die Werte $-4 \cdots x \cdots +4$, zeichne die Kurve und vergleiche sie mit der Parabel $y = x^2$. (Bild 284). Jedes y ist um $+2$ vermehrt worden.

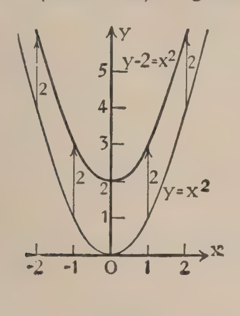


Bild 284.

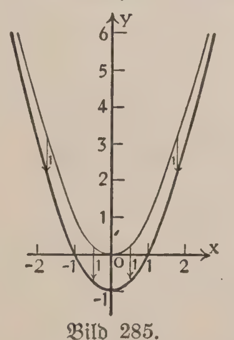


Bild 285.

2. Führe dasselbe für $y = x^2 - 2$ aus. — Welche Funktion zeigt Bild 285?

Allgemein: Das Bild der Funktion $y = x^2 + b$ oder $y - b = x^2$ ist eine Parabel, die aus der Normalparabel $y = x^2$ durch Parallelverschiebung um $+b$ in Richtung der Ordinatenachse hervorgeht. — Was gilt entsprechend für $y = x^2 - b$ oder $y + b = x^2$?

Zeichne die Kurven der folgenden Funktionen und gib an, wie man sie aus der Parabel $y = x^2$ ableiten kann. (Schablone der Normalparabel!)

3. a) $y = x^2 + 3$ b) $y = x^2 + 4$ c) $y = x^2 + \frac{1}{4}$ d) $y = x^2 + \frac{1}{2}$

4. a) $y = x^2 - 4$ b) $y = x^2 - 3$ c) $y = x^2 - \frac{1}{4}$ d) $y = x^2 - 5$

B. Die Funktionen $y = x^2$, $y = (x - a)^2$, $y = (x + a)^2$.

5. Zeichne die Bilder der Funktionen a) $y = (x + 1)^2$, b) $y = (x - 2)^2$ für $-4 \cdots x \cdots + 4$; vergleiche sie mit dem Bild der Funktion $y = x^2$. Bild 286 zeigt als Beispiel $y = (x - 1)^2$, Bild 287: $y = (x + 2)^2$.

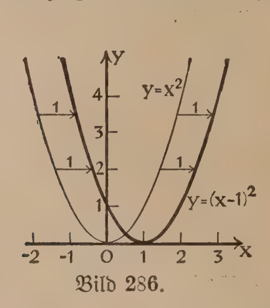


Bild 286.

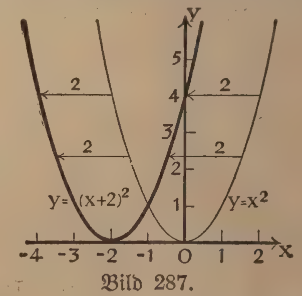
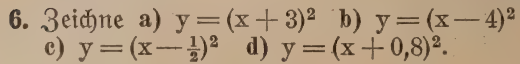


Bild 287.

Allgemein: Das Bild der Funktion $y = (x - a)^2$ ist gegenüber der Normalparabel $y = x^2$ um $+a$ in Richtung der x-Achse verschoben, entsprechend ist $y = (x + a)^2$ um $-a$ verschoben.


6. Zeichne a) $y = (x + 3)^2$ b) $y = (x - 4)^2$ c) $y = (x - \frac{1}{2})^2$ d) $y = (x + 0{,}8)^2$.

C. Die Funktion $y \pm b = (x \pm a)^2$.

7. Stelle zeichnerisch die Funktionen a) $y - 1 = (x + 2)^2$ b) $y + 1 = (x - 2)^2$ dar und vergleiche sie mit den Funktionen $y = (x + 2)^2$ und $y = x^2$. Bild 288 zeigt als Beispiel $y - 2 = (x - 3)^2$. Welche Standgrößen hat der Scheitel in diesen Fällen?

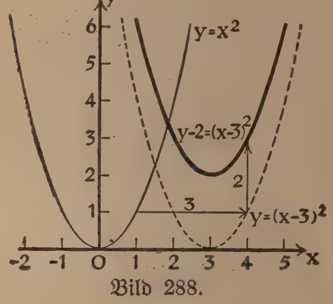


Bild 288.

8. In welchem Quadranten liegt der Scheitel der Parabel $y - b = (x - a)^2$ für a) $a > 0$, $b > 0$; b) $a < 0$, $b < 0$; c) $a > 0$, $b < 0$; d) $a < 0$, $b > 0$?

9. a) $y = (x - 3)^2 - 4$ b) $y = (x + 2)^2 - 1$ c) $y = (x + 3)^2 + 1$

D. Die Funktion $y = x^2 + px + q$[1].

10. a) Stellt man für $y = x^2 - 6x + 8$ die Tabelle auf ($-4 \cdots x$ bis $+4$) und zeichnet die Kurve, so findet man wieder eine Parabel. Bestimme den Scheitel. b) Bei $y = (x - 3)^2 - 1$ erkennt man sofort, daß der Scheitel die Standgrößen $x_s = +3$ und $y_s = -1$ hat. Es ergibt sich

[1]) Diese Kurve wird zuweilen „technische Parabel" genannt. (Vergl. S. 180, Nr. 8.)

dasselbe Kurvenbild wie bei a). **c)** Damit man aus der Form a) leicht die Lage der Kurve erkennt, muß man sie auf die 2. Form b) bringen, in der das Quadrat $(x-3)^2$ vorkommt. Dazu muß man den zweigliedrigen Ausdruck x^2-6x zu einem vollständigen Quadrat ergänzen. **Quadratische Ergänzung**

11. Den folgenden Umformungen liegen die Formeln $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$ zugrunde.

a) Es ist: $x^2+2x+1=(x+1)^2$ und $x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Um also x^2+2x bzw. x^2-2x zum Quadrat zu ergänzen, muß man das fehlende quadratische Glied 1 noch hinzufügen:

$$x^2+2x = x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1.$$
$$x^2-2x = x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1.$$

b) Erkläre die Umformung: $x^2-6x=x^2-6x+9-9=(x-3)^2-9$.

c) Ebenso $x^2+5x=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$ und $x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$.

12. Bilde die quadratische Ergänzung zu

a) x^2+8x **b)** x^2-12x **c)** x^2+9x **d)** x^2-7x
e) $x^2-\frac{1}{2}x$ **f)** $x^2+0{,}6x$ **g)** $x^2+3{,}2x$ **h)** $x^2+\frac{3}{2}x$
i) x^2+2bx **k)** x^2-2ux **l)** x^2+ax **m)** x^2-rx

Um das Bild einer Funktion $y=x^2+px+q$ zu zeichnen, bringt man diese durch quadratische Ergänzung auf die Form $y-b=(x-a)^2$, aus der man die Standgrößen des Parabelscheitels ablesen kann. **Zusammenfassung**

13. **a)** Erkläre die Umformung: $y=x^2+px+q=(x+\frac{p}{2})^2-(\frac{p}{2})^2+q$. **Verschobene Parabel**

b) Hierfür kann man schreiben $y+\left((\frac{p}{2})^2-q\right)=(x+\frac{p}{2})^2$. Der Vergleich mit $y+b=(x+a)^2$ zeigt:

Jede Funktion von der Form $y=x^2+px+q$ stellt eine Parabel dar, deren Scheitel in Richtung der x-Achse um $-\frac{p}{2}$, in Richtung der y-Achse um $-\left((\frac{p}{2})^2-q\right)$ verschoben ist.

14. Je nach dem Vorzeichen von $\left((\frac{p}{2})^2-q\right)$ kann der Scheitel der Parabel drei verschiedene Lagen zur x-Achse haben.

Ist **a)** $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q>0$ **b)** $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=0$ **c)** $\left(\frac{p}{2}\right)^2-q<0$, so liegt

der Scheitel unterhalb auf oberhalb der x-Achse,
die Parabel schneidet berührt meidet die x-Achse,
sie haben zwei Punkte einen Punkt keinen Punkt gemein.

Erklärung: Die Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse sind ihre „Nullstellen", da in diesen Punkten die Ordinaten den Wert 0 haben. **Nullstellen**

d) In welchem der Fälle a)⋯c) hat eine Parabel Nullstellen?

Bilde für die folgenden Funktionen die quadratische Ergänzung, zeichne die Kurven und gib an, wie sie aus der Parabel $y=x^2$ hervorgehen.

15. **a)** $y=x^2-2x-15$ **b)** $y=x^2-9x+20$ **c)** $y=x^2+2x-24$
d) $y=x^2-6x+11$ **e)** $y=x^2-8x+15$ **f)** $y=x^2+5x-6$
g) $y=x^2-\frac{1}{2}x-3$ **h)** $y=x^2+1{,}4x-0{,}51$ **i)** $y=x^2+\frac{2}{3}x-11$

16. Bestimme für die quadratische Funktion $y = x^2 + px + q$ die Zahlen p und q, wenn eine Wertetabelle die folgenden Werte ergibt:

a)

x	0	13
y	2	14

b)

x	1	2
y	0	8

c)

x	−2	1
y	+5	−4

d)

x	−1	2
y	8	−1

17. Stelle für die folgenden Funktionen Wertetafeln auf, zeichne die Kurven und beschreibe ihre Form und ihren Verlauf im Vergleich zu $y = x^2$:
a) $y = 2x^2$ b) $y = -2x^2$ c) $y = \frac{1}{2}x^2$ d) $y = -\frac{1}{2}x^2$
e) $y = 3x^2 - 6$ f) $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ g) $y = \frac{2}{3}x^2 - 2$ h) $y = -\frac{3}{5}x^2 + 4$

18. Für eine Kugel, die eine schiefe Ebene hinabrollt, stellt man die in t Sekunden zurückgelegten Wege, gemessen in cm, fest:

a)

t	1	3
s	2,5	22,5

b)

t	2	3
s	4,8	10,8

Zwischen s und t besteht folgende Beziehung $s = a\,t^2 + b\,t$. Setze für s und t die Wertepaare ein und bestimme die Vorzahlen a und b.

53. Abschnitt: Die quadratische Gleichung mit einer Unbekannten.

A. Allgemeine Lösungsverfahren.

1. Bild 289 zeigt die Kurve der Funktion $y = x^2 + 4x + 3$. Die Parabel schneidet die x-Achse in den Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = -3$. x_1 und x_2 genügen beide der Bestimmungsgleichung $x^2 + 4x + 3 = 0$, es sind ihre Wurzeln, ihre Lösungen.

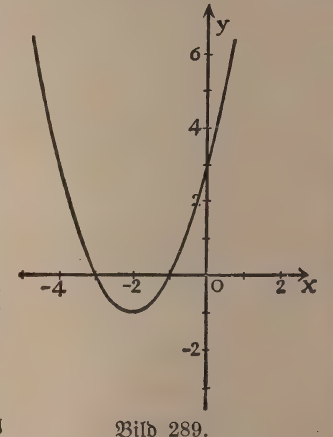


Bild 289.

Quadratische Gleichung

Erkl.: Es heißt $x^2 + px + q = 0$ eine quadratische Gleichung.

Ist $p = 0$, so nennt man die Gleichung rein quadratisch, ist $p \neq 0$, gemischt quadratisch.

Ist die Vorzahl von x^2 ungleich 1, hat also die Gleichung die Form $Ax^2 + Bx + C = 0$, so nennt man die Gleichung allgemein quadratisch. Eine solche bringt man vor der Lösung stets auf die „Normalform" $x^2 + px + q = 0$; man dividiert durch A.

Normalform

2. a) Aufgabe: Es sind die Wurzeln (Lösungen) der allgemein quadratischen Gleichung $3x^2 + 12x + 9 = 0$ zu bestimmen.
1. Schritt: Herstellung der Normalform, man teilt durch 3; $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Die weitere Behandlung kann zeichnerisch oder rechnerisch erfolgen.

Lösung durch

Zeichnung.	Rechnung.
(1. Art): Die Normalparabel wird verschoben.	
2. Schritt: Übergang zur Funktion: $y = x^2 + 4x + 3$	2. Schritt: „Ordnen" der Gleichung $x^2 + 4x = -3$

und Hinzufügen der quadratischen Ergänzung

$y = x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 3$ $y + 1 = (x + 2)^2$	$x^2 + 4x + 2^2 = 2^2 - 3$ $(x + 2)^2 = 1$
3. Schritt: Bestimmung der Scheitel ($a = -2$, $b = -1$) der Parabel und ihre Zeichnung (mit Hilfe der Schablone der Normalparabel).	3. Schritt: Wurzelziehen auf beiden Seiten $x + 2 = \sqrt{1}$ $x + 2 = \pm 1$
4. Schritt: Bestimmung der x-Werte der Parabelschnittpunkte mit der x-Achse: $\underline{x_1 = -1}$, $\underline{x_2 = -3.}$	4. Schritt: $x_1 = -2 + 1$ $\underline{x_1 = -1}$ $x_2 = -2 - 1$ $\underline{x_2 = -3}$
Bemerkung: Es empfiehlt sich, von der Normalparabel $y = x^2$ eine Schablone aus Pappe herzustellen und auf dieser Scheitel und Achse zu markieren. Man bringt die Schablone in eine solche Lage, daß der markierte Scheitel in den Punkt (a, b) kommt (vgl. 3. Schritt), und die Achse parallel zur y-Achse verläuft. Dann liest man die Schnittpunkte ab.	**b)** Allgemein: $x^2 + px + q = 0$ $x^2 + px = -q$ $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ $\underline{x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$ $\underline{x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

c) Über die Anzahl und Art der Nullstellen vgl. S. 193, Nr. 14. Die Untersuchung der zeichnerischen und rechnerischen Lösung führt dabei zu demselben Ergebnis. **Anzahl der Lösungen**

Aus der Lösungsformel folgt: Je nachdem, ob der

Radikand	**positiv,**	**Null**	**negativ** ist,
in Zeichen:	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$	$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$
hat die quadratische Gleichung	**zwei**	**eine**	**keine Lösung.**

Im 1. Falle ist $x_1 \neq x_2$, im 2. Falle $x_1 = x_2$ (Doppelwurzel), im 3. Falle sind x_1 und x_2 nicht vorhanden (S. 165, Nr. 2, Anm. 4), da eine Wurzel aus einer negativen Zahl für uns nicht besteht.

Löse die folgenden quadratischen Gleichungen:

3. a) $x^2 - 5x + 4 = 0$ **b)** $x^2 + 5x + 4 = 0$ **c)** $x^2 + 4x + 3 = 0$
d) $x^2 - 6x + 8 = 0$ **e)** $x^2 + 3x + 2 = 0$ **f)** $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$
g) $x^2 - 4x + 4 = 0$ **h)** $x^2 + 2x + 1 = 0$ **i)** $x^2 + 2x + 5 = 0$

Wieviel Lösungen haben **a)** bis **f)**? Wieviel **g)** und **h)**? Wieviel **i)**?

Zeichnerische Lösung (2. Art): Die Normalparabel bleibt fest.

4. a) Beispiel: $x^2 - x - 2 = 0$. Setzt man $x^2 = x + 2$, so ist jede Seite der Gleichung eine Funktion von x, also $y = x^2$ und $y = x + 2$.

Die Funktionen stellen eine Parabel und eine Gerade dar (vgl. Bild 290). Nur in den Schnittpunkten der Parabel mit der Geraden gehört zu dem gleichen x-Wert auch der gleiche y-Wert (vgl. S. 113). In diesem Fall ist $x^2 = x + 2$, also die Bedingung für die quadratische Gleichung erfüllt. Die Standgrößen $x_1 = -1$ und $x_2 = +2$ der Schnittpunkte sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung.

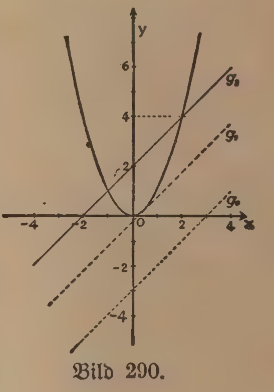


Bild 290.

b) Nach diesem zweiten Verfahren vollzieht sich die Lösung einer quadratischen Gleichung in 3 Schritten, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$x^2 + 0{,}5x - 1{,}5 = 0$$

1. Zerlegung der Gleichung in zwei Funktionen:

$$x^2 = -0{,}5x + 1{,}5$$
$$y = x^2 \text{ und } y = -0{,}5x + 1{,}5.$$

2. Die Gerade $y = -0{,}5x + 1{,}5$ wird gezeichnet und
3. mit der festen Parabel $y = x^2$ zum Schnitt gebracht; die x-Werte der Standgrößen der Schnittpunkte sind die gesuchten Wurzeln (Bild 291)

$$\underline{x_1 = 1} \quad \underline{x_2 = -1{,}5.}$$

c) Hier kommt man also **für alle Aufgaben mit der einen festen Parabel $y = x^2$** aus, mit der man nur eine Gerade zum Schnitt zu bringen hat.

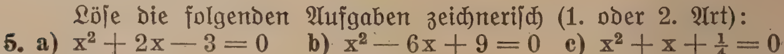
d) Wieviel verschiedene Lagen kann eine Gerade zur Parabel einnehmen?

e) Wieviel Schnittpunkte haben beide Kurven in jedem dieser Fälle (Bild 290)?

Bild 291.

f) Was kann man in diesen Fällen über die Wurzeln der quadratischen Gleichung aussagen? (vgl. S. 193, Nr. 14 und S. 195, Nr. 2c).

Löse die folgenden Aufgaben zeichnerisch (1. oder 2. Art):



5. a) $x^2 + 2x - 3 = 0$ **b)** $x^2 - 6x + 9 = 0$ **c)** $x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$
6. $x^2 - 5x + 6 = 0$ $x^2 + 5x - 6 = 0$ $x^2 - 6x - 1 = 0$
7. $x^2 - 3x - 10 = 0$ $x^2 - 6x + 8 = 0$ $x^2 + \frac{5}{6}x - 1 = 0$
8. $x^2 - 0{,}7x - 4{,}5 = 0$ $x^2 - x - 3{,}75 = 0$ $x^2 + 0{,}6\,x - 3{,}15 = 0$

Lösungsverfahren mit Hilfe eines Nomogramms.

9. Auf der beiliegenden Zahlentafel befindet sich ein Nomogramm[1]) zur Auflösung der quadratischen Gleichung. Die dort angegebenen Beispiele erläutern seinen Gebrauch. Löse danach die Aufg. Nr. 5 ··· 8.

B. Sonderfälle.

10. a) Beispiel: Rein quadratische Gleichung $p = 0$

$$x^2 - 4 = 0$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \sqrt{4}$$
$$x_{1,2} = \pm 2 \quad \text{oder getrennt:}$$
$$\underline{x_1 = +2} \quad \underline{x_2 = -2}$$

Löse allgemein **b)** $x^2 + p = 0$ und **c)** $Ax^2 + C = 0$.

Wann haben diese Gleichungen Lösungen?

Die Lösungen der rein quadratischen Gleichung sind also zwei entgegengesetzt gleiche Wurzelwerte.

11. a) $x^2 = 49$ **b)** $x^2 = 144$ **c)** $x^2 = 529$ **d)** $x^2 = 50{,}41$
e) $x^2 - 25 = 0$ **f)** $x^2 - \frac{4}{9} = 0$ **g)** $x^2 - 2 = 0$ **h)** $x^2 + 9 = 0$!

12. a) $25x^2 = 144$ **b)** $484x^2 = 841$ **c)** $16{,}81x^2 = 9$ **d)** $\frac{625}{4}x^2 = 484$
e) $x^2 = 6724$ **f)** $x^2 = 0{,}2916$ **g)** $\frac{1}{2}x^2 = 1458$ **h)** $\frac{2}{5}x^2 = 10\,240$

13. a) $10x^2 - 81 = 6x^2$ **b)** $\frac{3}{4}x^2 = 36$ **c)** $(x + 2)(x - 2) = 32$
d) $7x^2 - 25 = 3x^2$ **e)** $1{,}7x^2 = 2{,}38$ **f)** $(2x + 3)(2x - 3) = 16$

14. a) Ein besonderer Fall ist: $x^2 + px = 0$ $q = 0$

$$x(x + p) = 0.$$

Daraus folgt nach S. 30, Nr. 13: $\underline{x_1 = 0}$ und $x + p = 0$ also:

$$\underline{x_2 = -p}.$$

b) $x^2 - 9x = 0$ **c)** $x^2 = 4x$ **d)** $25x^2 + 16x = 0$.

15. Löse folgende Gleichungen, ohne die Klammern aufzulösen:

a) $(x - 3) \cdot (x + 2) = 0$ **b)** $(x - 1) \cdot (x + 0{,}5) = 0$
c) $(x + 4) \cdot (x + \sqrt{2}) = 0$ **d)** $(x - 0{,}6) \cdot x = 0$
e) $(4x + 3) \cdot (2x - 1) = 0$ **f)** $(5x + \frac{1}{2}) \cdot (2x - \frac{1}{2}) = 0$
g) $(x - a) \cdot (x - b) = 0$ **h)** $(2x - a) \cdot (x + m) = 0$

16. a) Die Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$ hat die Wurzeln $x_1 = +3$ und $x_2 = +4$. Bildet man Summe und Produkt der beiden Lösungen, so erhält man mit der Summe $x_1 + x_2 = 7$ die Vorzahl des x-Gliedes

---

[1]) Dem Sinne nach eine Rechenzeichnung. Die Nomographie, ein neuer Zweig der Mathematik, verwendet zur Erleichterung und Vereinfachung von Rechenarbeiten zeichnerische Verfahren und gewinnt heute in Industrie, Technik und Wehrmacht eine steigende Bedeutung.

mit entgegengesetztem Vorzeichen, mit dem Produkt $x_1 \cdot x_2 = +12$ das von x freie Glied. Untersuche in gleicher Weise die Aufgaben Nr. 5 ⋯ 7.

b) Gilt dies stets? — Aus: $x^2 + px + q = 0$ folgt:

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q};$$

bildet man die Summe $x_1 + x_2$ und das Produkt $x_1 \cdot x_2$, so wird

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x_2 = q.$$

c) Es ergibt sich demnach allgemein ein Zusammenhang zwischen den Vorzahlen einer quadratischen Gleichung und ihren Wurzeln.

Vorzahlgesetze von Viëta

1. Die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich der Vorzahl von x mit entgegengesetztem Vorzeichen.
2. Das Produkt der Wurzeln einer quadratischen Gleichung ist gleich dem von x freien Gliede.

17. Bestimme auf Grund der Vorzahlgesetze die quadratischen Gleichungen, deren Lösungen sind:

a) $3; -4$ b) $5; 6$ c) $-\frac{1}{2}; 2$ d) $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}$ e) $-0{,}5; -0{,}8$
f) $1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}$ g) $3 + \sqrt{2}; 3 - \sqrt{2}$ h) $-2 - \sqrt{5}; -2 + \sqrt{5}$
i) $a; b$ k) $\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2}$ l) $m + n; m - n$

18. Nach den Vorzahlgesetzen läßt sich schreiben:

$$x^2 + px + q = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2 = (x - x_1)(x - x_2).$$

Ein dreigliedriger Ausdruck $x^2 + px + q$ läßt sich in ein Produkt verwandeln, wenn es gelingt, $-p$ als Summe und q als Produkt derselben beiden Zahlen darzustellen. Beachte:

α) $x^2 + 8x + 15 = (x + 3)(x + 5)$ (Produkt positiv, Summe positiv).
β) $x^2 - 8x + 15 = (x - 3)(x - 5)$ (Produkt positiv, Summe negativ).
γ) $x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$ (Produkt negativ, Summe positiv).
δ) $x^2 - 2x - 15 = (x - 5)(x + 3)$ (Produkt negativ, Summe negativ).

Hiernach kann man in manchen Fällen ohne umständliche Rechnung die Wurzeln einer quadratischen Gleichung angeben. Versuche dies im folgenden.

19. a) $x^2 - 10x + 24 = 0$ b) $x^2 + 2x - 24 = 0$ c) $x^2 - 2x - 15 = 0$
d) $x^2 - 7x + 12 = 0$ e) $x^2 + 7x + 10 = 0$ f) $x^2 - 17x - 60 = 0$

20. a) $x^2 + 3x - 88 = 0$ b) $x^2 + 25x + 84 = 0$ c) $x^2 + 18x + 81 = 0$
d) $x^2 - 2x - 35 = 0$ e) $x^2 + 18x - 40 = 0$ f) $x^2 + 5x - 36 = 0$

54. Abschnitt: Weitere Aufgaben und Anwendungen.

1. a) $x^2+\frac{1}{2}x-3=0$ b) $x^2+\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}=0$ c) $x^2-0{,}5x-0{,}24=0$
2. a) $x^2-0{,}4x=0{,}96$ b) $x^2+2{,}9x=2{,}1$ c) $x^2+2{,}4x=-1{,}43$
3. a) $7x^2+2x-9=0$ b) $2x^2-6x+\frac{5}{2}=0$ c) $16x^2-40x+\frac{75}{4}=0$
4. a) $5x^2-43x+24=0$ b) $2x^2-1{,}9x+0{,}3=0$ c) $8x^2-11{,}2x+3{,}6=0$
5. a) $3x^2+2x+4=-5x^2-4x+3$ b) $30x^2-20x+26x^2=3x+33$
c) $5x^2-17x=-10-x^2$ d) $3x^2-5=2x^2+3x-7$
6. a) $(x-3)(2x-5)=21$ b) $x^2-(x+8)(5-2x)=4x(x-2)-6$
c) $(x-3)(x+5)-3(1-x^2)=6(2x+1)$
d) $(3+x)(4+x)(5+x)+(3-x)(4-x)(5-x)=216$
7. a) $(x+8)^2-(x+6)^2=(x+5)^2-4$
b) $(6x+2)^2-11(6x+2)+18=0$ c) $(4x-3)^2-6(6x-1)+41=0$
d) $(2x-11)^2+5(6-2x)+31=0$ e) $(4x-5)^2-3(4x+3)=316$
8. a) $x+\frac{4}{x}=5$ b) $x+\frac{180}{x}=27$ c) $x-11=-\frac{28}{x}$
d) $x-\frac{12}{x}+1=0$ e) $x-2=\frac{15}{x}$ f) $\frac{35}{x}+12+x=0$
9. a) $\frac{1}{x}-\frac{7}{12}=\frac{1}{1-x}$ b) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{30}=\frac{1}{x}$ c) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{6}=\frac{1}{x}$
d) $\frac{x}{x+3}=\frac{2x}{3x+1}$ e) $\frac{3x-1}{2x}=\frac{5x+2}{3x+4}$ f) $\frac{3}{7+2x}=\frac{x}{3}$
g) $\frac{5x}{3x-1}+\frac{3x}{2x+2}=3$ h) $\frac{4x+3}{x-1}-\frac{2x-1}{x+1}=\frac{25}{4}$ i) $\frac{x^2+2x-1}{x^2-x+1}=2$
10. a) $x^2+2ax+a^2=0$ b) $x^2-2ax-b=0$ c) $x^2+ax-\frac{3}{4}a^2=0$
d) $x^2-2ax+a^2-b^2=0$ e) $x^2-(a+b)x+ab=0$
f) $\frac{5a^2}{x^2}-\frac{a}{2x}=1$ g) $\frac{a}{x-a}-\frac{x}{x+a}=1$ h) $\frac{2a}{x}-\frac{a^2}{x^2}=1$
11. a) $x^4-5x^2=36$ b) $x^4+400=41x^2$ c) $x^4+50x^2+625=0$
d) $x^4-5x^2+4=0$ e) $x^4-54x^2=-245$ f) $x^4-20x^2+96=0$
12. a) Das Produkt aus dem vierten und sechsten Teil einer Zahl ist 216. Wie heißt die Zahl?
b) Multipliziert man den dritten (vierten) Teil einer Zahl mit ihrem Fünffachen (Siebenfachen), so erhält man 375 (2268). Wie heißt die Zahl?
c) Der 25. Teil einer Zahl ist gleich ihrem reziproken Wert. Wie heißt sie?
13. Das Produkt zweier ganzer aufeinanderfolgender Zahlen ist a) 1122; b) um 2024 größer als die größere der beiden Zahlen. Wie heißen sie?
14. Die Summe zweier Zahlen ist p, ihr Produkt q. Wie heißen die Zahlen?
a) $p=10$; $q=21$ b) $p=22$; $q=117$ c) $p=4{,}5$; $q=4{,}5$.
15. Die Differenz zweier Zahlen ist d, ihr Produkt q. Wie heißen die Zahlen? Setze: a) $d=17$; $q=480$ b) $d=71$; $q=1190$ c) $d=1{,}5$; $q=13{,}5$.
16. a) Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 3 : 4 (5 : 12). Wie lang sind die Seiten, wenn die Diagonale 15 cm lang (26 cm) ist?
b) Verlängert man eine Seite eines Quadrats um 3 cm und verkürzt die andere um 5 cm, so erhält man ein Rechteck vom Inhalt 65 cm². Wie lang ist die Seite des Quadrats?

17. Eine 8 m lange Leiter ist am unteren Ende a) 2 m, b) 2,5 m, c) 3,2 m von der Hauswand entfernt. Wie weit reicht sie empor?

18. Eine Strecke $s = 12$ cm soll durch einen Punkt P so geteilt werden, daß
a) das aus den Teilabschnitten gebildete Rechteck den Inhalt 27 qcm hat;
b) die Summe der über den Teilabschnitten errichteten Quadrate 80 qcm beträgt.

19. Um welche Strecke muß man die Seite a eines Quadrats verlängern, um ein Quadrat zu erhalten, dessen Inhalt a) zweimal, b) dreimal, c) n mal so groß ist?

20. a) Die Seite einer Raute ist 25 cm, ihre Ecklinien unterscheiden sich um 34 cm. Wie groß sind sie?
b) Der Inhalt einer Raute ist 266 qcm, die Summe ihrer Ecklinien 47 cm. Wie groß sind sie?

21. a) Ein gleichschenkliges Trapez hat den Inhalt 806 qcm, die Differenz der parallelen Seiten beträgt 10 cm und die Höhe ist gleich der kleineren der beiden parallelen Seiten. Zeichne das Trapez (Maßstab 1 : 4).
b) In einem gleichschenkligen Trapez verhalten sich die parallelen Seiten wie 5 : 6, die Höhe ist um 1 cm größer als die kleinere der parallelen Seiten und der Inhalt 264 qcm. Zeichne das Trapez (Maßstab 1 : 2).

22. In einen Halbkreis ($r = 5$ cm) soll ein Rechteck mit dem Umfang $u = 20$ cm so eingezeichnet werden, daß zwei Ecken des Rechtecks auf dem Durchmesser, die beiden anderen auf dem Halbkreis liegen. Wie lang müssen die Seiten des Rechtecks gewählt werden?

23. a) Aus einer quadratischen Platte von 1,2 m Seitenlänge soll durch Abschneiden der Ecken eine Tischplatte von der Form eines regelmäßigen Achtecks hergestellt werden. Wie müssen die Schnitte geführt werden?
b) Eine quadratische Säule hat die Höhe $h = 12$ cm. Verlängert man die Grundkante $a = 4$ cm um eine bestimmte Strecke, so nimmt ihr Rauminhalt um 108 ccm zu. Wie groß ist die Verlängerung?

24. Werden die Kanten eines Würfels um a vergrößert, so wächst sein Inhalt um b. Wie groß sind die Kanten?
a) $a = 2$ cm; $b = 218$ ccm. b) $a = 4$ cm; $b = 988$ ccm.
c) Die drei Kanten eines Quaders unterscheiden sich um je 2 cm (4 cm). Vergrößert (verkleinert) man jede um 1 cm (2 cm), so vergrößert (verkleinert) sich der Rauminhalt um 87 ccm (186 ccm). Wie groß sind sie?

25. Ein 100 (50) m langes und 20 (12) m breites Schwimmbecken soll zur Aufnahme der Zuschauertribünen, der Sprungtürme usw. ringsherum von einem Streifen umgeben sein, der an der Schmalseite doppelt so breit wie an der Längsseite ist. Wie sind die Maße des Streifens zu wählen, wenn insgesamt ein Gelände von 5600 (2500) m^2 zur Verfügung steht?

26. Der optische Morsespruch mit dem Scheinwerfer ermöglicht auf See eine Verständigung bis zu 20 sm. Zwei Schiffe fahren parallel im Abstande 1 (2; 3) sm mit den Geschwindigkeiten 20 bzw. 24 Knoten aneinander vorüber. Wieviel Minuten konnten sie sich optisch miteinander verständigen bei Fahrt a) in gleicher, b) in entgegengesetzter Richtung? (Zeichnung.)

27. Ein mit 35 Knoten fahrender Zerstörer sichtet in Fahrtrichtung einen Gegner, der in etwa 15 sm Entfernung mit 25 Knoten, durch ein Minenfeld geschützt, senkrecht zur eigenen Fahrtrichtung davonsteuert.
a) Nach wieviel Minuten ist der Zerstörer auf Schußweite (12 sm) an den Gegner herangekommen, falls beide ihre Kurse beibehalten?
b) Wie lange liegt der Gegner im Feuerbereich des Zerstörers?
c) Kommt der Zerstörer bis auf 10 sm an den Gegner heran?

28. Das Verkehrsflugzeug auf der Strecke Berlin—London ($s = 990$ km) verspätet sich wegen eines Gegenwindes von $w = 8$ (10; 12) m/sec um $t = 35$ (53; 39) Min. Wie groß ist seine Fluggeschwindigkeit bei Windstille? **Flugverkehr**

29. Zeitungsnachrichten zufolge legte das Flugzeug „Nordmeer" am 15. Aug. 1937 die 3850 km lange Strecke vom Flugstützpunkt „Schwabenland" bei Horta (Azoren) bis New York in 16 Std. 28 Min. zurück und hatte auf dem letzten Drittel der Flugstrecke einen Gegenwind von 40 km/std. Wie groß war seine Eigengeschwindigkeit? (Drücke zunächst die Flugzeit für das letzte Drittel durch die Eigengeschwindigkeit aus.)

30. Die Sportfliegerin Elly Beinhorn-Rosemeyer brauchte zu ihrem berühmten Flug am 13. Aug. 1935 für die Strecke Gleiwitz—Istanbul (1650 km) und Istanbul—Berlin (1870 km) zusammen $13\frac{1}{3}$ Std. reine Flugzeit. Wie groß war die Eigengeschwindigkeit ihres Flugzeuges unter der Annahme, daß die Windgeschwindigkeit an diesem Tage 10 km/std betrug und sie auf dem Hinflug Rückenwind und während des ganzen Rückfluges Gegenwind hatte?

31. Wird eine Bombe aus h Meter Höhe von einem Flugzeug abgeworfen, das mit $c = 100$ m/sec fliegt, so läßt sich unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes die Fallzeit t in erster Annäherung aus der Gleichung $t^4 - 3750\,t^2 + 750\,h = 0$ berechnen. Bestimme t für **a)** $h = 1000$ m, **b)** $h = 2000$ m. (Setze $t^2 = x$.) **Luftangriff**

32. Der Weg, den ein Kraftwagen beim Bremsen noch zurücklegt, ehe er zum Stehen kommt, ist bestimmt durch $s = c \cdot t - \frac{b}{2}t^2$. Wie lange dauert es, bis ein Wagen steht, wenn seine Geschwindigkeit $c = 72$ km/std, der Bremsweg $s = 40$ m und die Verzögerung $b = 5$ m/sec² beträgt? **Bremsweg**

33. Beim Kugelstoß erfolgt der Abwurf aus einem Kreis mit 2,135 m Durchmesser. Der Anlauf des Turners wird dabei durch die Kreislinie begrenzt. Die Wurfweite wird von der Auftreffstelle D bis zum Kreis in Richtung auf den Mittelpunkt zu gemessen. Welche Strecke hat ein Turner „verschenkt", wenn er statt in Richtung des Durchmessers $\overline{AB}$ in Richtung der Sehne $\overline{AC}$ anläuft ($\overline{AC} = 1{,}8$ m) und als Wurfweite $\overline{DE} = 8{,}5$ m gewertet wird (Bild 292)? — Anl.: 58. Abschn.; 29c). **Kugelstoß**

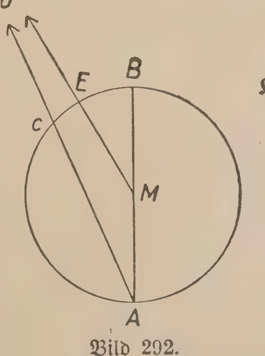


Bild 292.

Zusammenfassung und Übersicht über quadratische Funktion und Gleichung.

Durch Nullsetzen der quadratischen Funktion $y = x^2 + px + q$ erhält man die Gleichung $x^2 + px + q = 0$.

Die Nullstellen der Funktion sind die Wurzeln der Gleichung: Das führt auf den Zusammenhang zwischen der rechnerischen Lösung und der zeichnerischen mit der verschobenen Normalparabel. $y - b = (x - a)^2$ geht aus $y = x^2$ durch Parallelverschiebung hervor: ihre Achse ist der y-Achse parallel, ihr Scheitel hat die Standgrößen (a, b).

Beim Verfahren mit der festen Parabel $y = x^2$ wird diese einfach mit der Geraden $y = -px - q$ zum Schnitt gebracht.

In ähnlicher Weise gestattet das Nomogramm (siehe Beilage) mit Hilfe eines Suchstrahls die Ablesung der Wurzeln.

Rechnerisch kommt man von der allgemein quadratischen Gleichung

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

nach Division durch A auf die Normalform

$$x^2 + px + q = 0.$$

Die weitere Rechnung führt über die quadratische Ergänzung auf:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Nach dem Vorzeichen des Radikanden richtet sich die Anzahl der Lösungen.

Die quadratische Gleichung kann zwei, eine oder keine Lösung haben. Im zweiten Falle hat sie eine Doppelwurzel.

In der Zeichnung erkennt man dies daran, daß die verschobene Parabel die x-Achse schneidet, berührt oder meidet; bei der festen Parabel daran, wieviel Punkte die Gerade mit ihr gemein hat.

Zwischen Wurzeln und Vorzahlen bestehen nach Viëta die Beziehungen:

$$x_1 + x_2 = -p \qquad x_1 \cdot x_2 = +q.$$

XVII. Verhältnisgleichheit von Strecken.

55. Abschnitt: Die Strahlensätze.

A. Das Streckenverhältnis.

1. An Bild 47 erkennen wir, daß auf 100 m waagerechter Strecke 14 m Erhebung, auf 50 m waagerechter Strecke 7 m Erhebung kommen, d. h. es verhält sich $\frac{100}{50} = \frac{14}{7}$, es verhalten sich die beiden Entfernungen wie die zugehörigen senkrechten Erhebungen.

Auch Bild 198 zeigt, daß sich zwei Warenmengen, also die waagerechten Strecken, wie die zugehörigen Preise, also wie die lotrechten Strecken, verhalten.

Stelle entsprechende Überlegungen am Lohnstrahl über Arbeitszeit und Arbeitslohn (Bd. I) und am Bild 190 (Geschwindigkeit) an:

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{t_1}{t_2}$$ gilt auch hier.

Will man allgemein Strecken miteinander vergleichen, so müssen sie in derselben Einheit gemessen sein.

2. Läßt sich die Maßstrecke e auf der Strecke $\overline{AB}$ pmal und auf $\overline{CD}$ qmal abtragen, so ist (Bild 293) $\overline{AB} = p \cdot e$ und $\overline{CD} = q \cdot e$ und man sagt, es verhält sich:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{p}{q}.$$

Bild 293.

Erkl. 1: **Unter dem Verhältnis zweier Strecken versteht man das Verhältnis ihrer Maßzahlen.**

„Geht" die Maßstrecke in $\overline{AB}$ oder $\overline{CD}$ nicht „auf", bleibt also ein Rest, so wählt man eine so kleine, daß p und q ganze Zahlen werden. Praktisch kann man dies stets mit hinreichender Genauigkeit erreichen.

B. Die Strahlensätze.

3. Wiederhole die Teilung einer Strecke in n gleiche Teile! (s. S. 88).

4. Bild 294 zeigt ein Strahlenbüschel mit dem Scheitel S, das von einer Schar von Parallelen geschnitten wird, die auf einem Strahl unter sich gleiche Abschnitte erzeugen. Dann erzeugen sie auch auf jedem anderen Strahl unter sich gleiche Abschnitte, die als Maßstrecken dienen. Entsprechende Strecken auf den Strahlen haben also gleiche Maßzahlen. Ist die Maßzahl von $\overline{SA_1}$ gleich p (im Bild p = 4), so haben auch $\overline{SB_1}$ und $\overline{SC_1}$ die Maßzahl p. Ebenso haben $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$ und $\overline{C_1C_2}$ usw. die gleiche Maßzahl q (3).

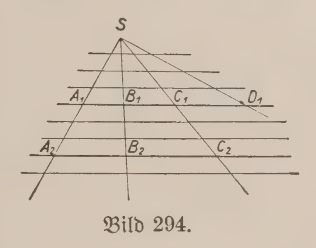


Bild 294.

Es bestehen die Verhältnisgleichungen

$$\frac{\overline{SA_1}}{\overline{A_1A_2}} = \frac{p}{q} \qquad \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{p}{p+q} \qquad \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{SA_2}} = \frac{q}{p+q}$$

$$\frac{\overline{SB_1}}{\overline{B_1B_2}} = \frac{p}{q} \qquad \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}} = \frac{p}{p+q} \qquad \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{SB_2}} = \frac{q}{p+q}$$

$$\frac{\overline{SC_1}}{\overline{C_1C_2}} = \frac{p}{q} \qquad \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC_2}} = \frac{p}{p+q} \qquad \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{SC_2}} = \frac{q}{p+q}$$

Lehrs. 1: Werden Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf einem Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf einem anderen Strahl. 1. Strahlensatz

5. In Bild 295 werden die beiden Strahlen durch S von den Parallelen A_1B_1 und A_2B_2 geschnitten. Zieht man durch A_1 zu $S\,B_2$ die Parallele, so entsteht das Parallelogramm $A_1B_1B_2C$.
Sieht man jetzt A_2S und A_2B_2 als Strahlen und A_1C und SB_2 als schneidende Parallelen an, so kann man die Verhältnisgleichung $\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{CB_2}} = \frac{\overline{A_2S}}{\overline{A_1S}}$ aufstellen. Da nun $\overline{CB_2} = \overline{A_1B_1}$ ist, folgt nach Umstellung

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}}.$$

Bild 295.

2. Strahlensatz — **Lehrs. 2: Werden Strahlen von Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte auf den Parallelen wie die vom Scheitel aus gemessenen zugehörigen Abschnitte auf einem Strahl.**

6. Bild 296 zeigt, daß die beiden Sätze auch gelten, wenn die Abschnitte auf entgegengesetzten Seiten vom Scheitel aus liegen.

1. Strahlensatz (Umkehrung) — **7. Umkehrungssatz 1a: Werden Strahlen von Geraden so geschnitten, daß sich die Abschnitte auf einem Strahl wie die entsprechenden Abschnitte auf einem anderen Strahl verhalten, so sind die schneidenden Geraden parallel.**

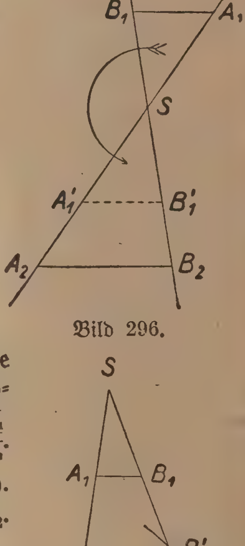


Bild 296.

Der Beweis wird folgendermaßen geführt. Zieht man durch A_2 zu A_1B_1 die Parallele A_2X, die SB_1 in X schneidet, so verhält sich nach dem 1. Strahlensatz $\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SX}}$; nach Voraussetzung gilt: $\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB_2}}$. Aus den beiden Gleichungen folgt $\overline{SB_2} = \overline{SX}$, d. h. Punkt B_2 fällt mit X zusammen, also ist $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.

Bemerkung: Die Umkehrung des 2. Strahlensatzes braucht nicht immer richtig zu sein. Wie aus Bild 297 hervorgeht, gilt auch $\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_2B_2'}}$, und trotzdem ist A_2B_2' nicht parallel A_1B_1.

Bild 297.

C. Die Konstruktion der 4. Proportionale.

8. Aus der Vgl. $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ kann man x als 4. Proportionale berechnen. Die Strahlensätze gestatten, sie auch zeichnerisch zu bestimmen. Bild 298 zeigt vier Möglichkeiten. Beschreibe sie. Welche erscheint dir am einfachsten? Für die vier Zeichnungen gilt:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$$

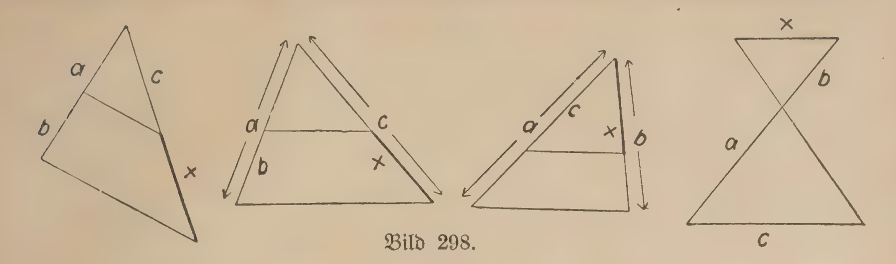


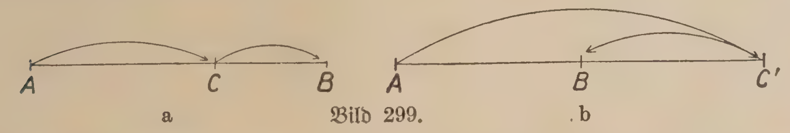
Bild 298.

9. Gegeben ist ein Rechteck mit den Seiten a = 3 cm und b = 8 cm. Wie groß muß die Länge x eines anderen inhaltsgleichen Rechtecks gewählt werden, dessen Breite c **a)** 4 cm, **b)** 5,2 cm betragen soll? Rechnung und Zeichnung. **c)** Führe die Aufgabe auch mit allgemeinen Größen durch!

10. Wie breit (x cm) muß ein Rechteck mit der Länge **a)** 7 cm, **b)** 3,6 cm, **c)** y cm gemacht werden, wenn es den gleichen Inhalt wie ein Quadrat mit der Seite a = 5 cm haben soll? Rechne und zeichne!

D. Die Teilung einer Strecke.

11. **a)** Im Bild 299 teilt C die Strecke $\overline{AB}$ in die beiden Abschnitte $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$. Man sagt: der Punkt C teilt die Strecke $\overline{AB}$ innerhalb im Verhältnis $\overline{AC}:\overline{CB}$. Dabei wird der Teilpunkt stets in der Mitte genannt, $\overline{AC}:\overline{CB}$ heißt das Teilverhältnis. **Teilverhältnis**



a Bild 299. b

b) Läßt man den Punkt C von A aus nach B hin wandern, so durchläuft das Teilverhältnis alle Werte von 0 zu immer größeren Werten und wächst schließlich über jede angebbare endliche Zahl hinaus. Man schreibt dann: $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{p}{q} \to \infty$ (gelesen: $\frac{p}{q}$ strebt nach unendlich).

12. Wähle $\overline{AB} = 4$ cm. Wie groß ist das Teilverhältnis y, wenn $\overline{AC} = x$ der Reihe nach die Werte 0,5; 1; 1,5 cm ... annimmt? Stelle diese Werte von x und y in einer Tabelle zusammen! Wie groß ist y allgemein, wenn $\overline{AC} = x$ ist? Zeichne die Kurve dieser Funktion!

13. Wandert der Punkt C über den Punkt B hinaus, so spricht man in Erweiterung des Begriffes von einer äußeren Teilung. C' heißt äußerer Teilpunkt, er teilt $\overline{AB}$ außen im Verhältnis $\frac{\overline{AC'}}{\overline{C'B}}$ (Bild 299 b).

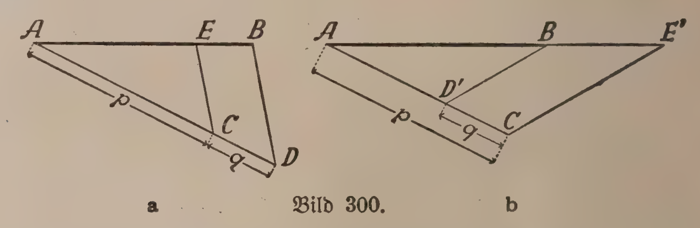
Bei der inneren Teilung heißen $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$, bei der äußeren entsprechend $\overline{AC'}$ und $\overline{C'B}$ die Abschnitte von $\overline{AB}$.

14. Bestimme weiter das Teilverhältnis y (Aufg. Nr. 12), wenn C über B hinauswandert ($\overline{AC} = 4{,}5;\ 5 \cdots 10$ cm).

Bei der inneren Teilung haben die beiden Teilstrecken $\overline{AC}$ und $\overline{CB}$ gleiche Richtung, bei der äußeren Teilung aber entgegengesetzte. Will man diesen Richtungsunterschied kennzeichnen, so gibt man dem Teilverhältnis $\frac{p}{q}$ bei der inneren Teilung das positive, bei der äußeren Teilung das negative Vorzeichen. Im folgenden wird von dem Vorzeichen abgesehen und nur von der inneren oder äußeren Teilung gesprochen.

15. Aufg.: Die Strecke $\overline{AB}$ innen im Verhältnis p : q zu teilen.

Man zieht durch A einen beliebigen Strahl und trägt auf ihm hintereinander von A aus die beiden Strecken p und q ab. Die Endpunkte seien C und D (Bild 300 a). Die Parallele durch C zu DB schneidet $\overline{AB}$ im gesuchten Teilpunkt E (Beweis?).

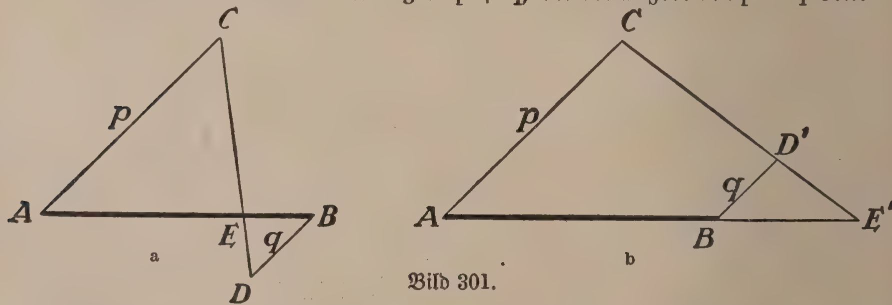


a Bild 300. b

16. Aufg.: Die Strecke $\overline{AB}$ außen im Verhältnis p : q zu teilen.

Anl.: Die Strecke q wird vom Endpunkt C der Strecke p aus rückwärts auf $\overline{AC}$ abgetragen. Im übrigen verläuft die Konstruktion genau wie bei der inneren Teilung (Bild 300 b). E′ ist der gesuchte äußere Teilpunkt.

Anm.: Wähle z. B. $\frac{p}{q} = \frac{3}{1}$; wieviel Teile entfallen bei der inneren, wieviel bei der äußeren Teilung auf die Strecke $\overline{AB}$? Man erkennt, beide Konstruktionen kommen nur auf die schon früher gelöste Aufgabe (vgl. S. 88, Nr. 5) hinaus, $\overline{AB}$ in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen: bei der inneren Teilung in p + q, bei der äußeren in p — q Teile.



a Bild 301. b

17. Zur Lösung der Aufgabe kann auch der 2. Strahlensatz benutzt werden, wie aus den Bildern 301a und b hervorgeht. Beschreibe die Zeichnung ausführlich? Beweis? — Bild 302 vereinigt beide Lösungen.

18. Teile folgende Strecken innen und außen in dem gegebenen Verhältnis!

a) a = 10 cm, p = 7, q = 3;
b) a = 12 cm, p = 5, q = 1;
c) a = 8 cm, p = 1, q = 7.

Miß die Teilstrecken nach und prüfe durch Rechnung!

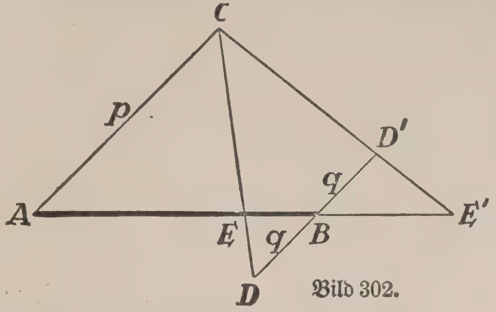


Bild 302.

56. Abschnitt: Anwendungen.

A. Wehr- und Geländekunde.

1. Beim Geländebeschreiben und Zielansprechen wird die „Daumenbreite" benutzt. Sie gestattet, zu einer gegebenen Entfernung eine seitliche Verschiebung angenähert zu bestimmen. Man beobachtet die Strecke x, die beim Visieren mit einem Auge O von dem Daumen b bei ausgestrecktem Arm gedeckt wird (Bild 303). **Daumenbreite**

a) Wieviel Meter Querstrecke x bedeutet eine Daumenbreite in der Entfernung e = 100, 300, 1000, 1500 m? (Du mußt dazu deine Daumenbreite b und deine Armlänge l messen. Durchschnittswerte sind b = 2 cm und l = 0,65 m.)

b) Wie lautet das allgemeine Gesetz?

2. Auch der „Marschkompaß" (Bild 304) kann zu Hilfe genommen werden. An die Stelle des Daumens tritt dann der Abstand der beiden Spitzen, die sich zu beiden Seiten des Kornes befinden und deren Abstand gleich $\frac{1}{10}$ der Entfernung Kimme—Korn ist. Wie heißt hier das allgemeine Gesetz, wenn die Kimme unmittelbar an das Auge gebracht wird? **Marschkompaß**

Bild 303.

Zielkorn
Entfernungsschätzer
Richtungsanzeiger
Nordpol der Magnetnadel
Kimme

Bild 304.

Strichplatte

3. In den Ferngläsern des Heeres befindet sich zur Erleichterung der Bestimmung eines Zieles eine „Strichplatte“. Die Einheiten des waagerechten Maßstabes entsprechen der Einteilung des Vollwinkels in 6400‾.

a) Wieviel Strich ist das erkannte Ziel in Bild 305 von dem Kugelbaum seitlich entfernt?

b) Die Breite eines „Striches“ auf der Strichplatte ist gleich $\frac{1}{1000}$ des Abstandes des Auges von der Strichplatte. Welche Zielbreite entspricht 1‾ in 1000 m Entfernung? (Erklärung für diesen Zusammenhang s. 63. Abschn., Nr. 29.)

c) Welche allgemeine Beziehung besteht danach zwischen z, e und n? (Bild 305.)

Zielbreite und Entfernung

d) Wie breit ist ein Ziel, das 2300 m entfernt ist, wenn der Zielbreite 30‾ entsprechen?

e) Kennt man die wirkliche Entfernung des Zieles von dem Baum in Metern, so kann man danach die Entfernung des Baumes (und damit auch mit genügender Genauigkeit die des Zieles) von dem Standpunkt des Beobachters ermitteln. Wie weit wäre danach ein Ziel entfernt, das auf 40m Breite geschätzt wird, wenn ihm auf der Strichplatte 34‾ entsprechen?

f) In Ermangelung einer Strichplatte kann die Anzahl der Striche auch mit einem „Marschkompaß“ angenähert ermittelt werden. Beachte, daß auf ihm immer 100‾ zu **einem** Abschnitt zusammengefaßt sind!

g) Schließlich kann jede „Millimeterteilung“ für solche Bestimmungen genommen werden. Halte eine solche (z. B. einen „Planzeiger“) in 50 cm vor das Auge! (Bindfaden von 50 cm benutzen!) Dann entspricht 1 mm 2‾. Weise die Richtigkeit dieser Beziehung nach!

Bild 305.

Daumensprung

4. Beim Zielansprechen und Entfernungsschätzen bedient man sich des „Daumensprungs“; eine Daumenseite wird nacheinander mit beiden Augen O_1 und O_2 anvisiert und die „Sprungstrecke“ x beobachtet (s. Bild 306).

a) Wie groß ist diese Sprungstrecke bei dem Augenabstand d = 65 mm und der Armlänge l = 0,65 m in der Entfernung e = 100, 300, 800, 2000 m?

b) Begründe die beim Entfernungsschätzen benutzte Faustregel: Die Entfernung e ist das Zehnfache der Sprungstrecke x.

c) Für behelfsmäßige Messungen merke noch: eine Daumenbreite ≈ 35‾ (für Jugendliche!), ein Daumensprung ≈ 100‾. Führe auf dem nächsten Wandertag solche Bestimmungen durch!

Bild 306.

5. Auf einer photographischen Aufnahme des Völkerschlachtdenkmals wird dessen Höhe mit 8,5 cm gemessen. Wie hoch ist es in Wirklichkeit, wenn der Apparat 160 m von der Mittelebene des Denkmals entfernt stand und die Mattscheibe vom Objektiv den Abstand 15 cm hatte?

6. **a)** Der Proportionalzirkel (Verhältniszirkel) (Bild 307) dient dazu, eine große Anzahl von Strecken in einem gegebenen Verhältnis zu verkleinern oder zu vergrößern. Beschreibe und begründe die Anwendung. **Proportionalzirkel**

b) Der Meßkeil besteht aus hartem Werkstoff und dient zur Bestimmung des kleinen Abstandes aufeinanderfolgender Meßstangen (Bild 308). Sein Querschnitt ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basislänge 1 cm, das 10 Parallelen in gleichem Abstand aufweist. Beschreibe seine Verwendung. Wieviel mm Abstand haben nach dem Bilde die Enden der beiden Meßlatten?

c) Der Transversalmaßstab stellt ein Hilfsmittel dar zur genauen Messung von Strecken in Zeichnung oder Karte. In einem Quadrat von 10 mm Seitenlänge sind von mm zu mm waagerechte und schräge (transversale) Parallele gezogen (Bild 309) und entsprechend beziffert. Wie lang sind in dem schmalen rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten 10 mm und 1 mm die parallelen Strecken? **Transversalmaßstab**

Bild 307.

Wie kann man in dem Quadrat die Strecken 1,1 mm, 1,2 mm usw. abgreifen? Wie 3,6 mm, 4,3 mm, 7,8 mm? Fügt man noch mehr Quadrate

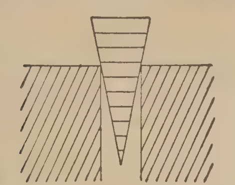


Bild 308.

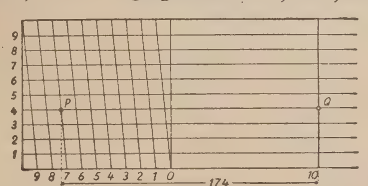


Bild 309.

mit einer Seitenlänge von 1 cm an, die noch durch waagerechte Parallele geteilt sind, dann kann man auch größere Strecken, z. B. 4,37 cm, abgreifen.

Soll ein Transversalmaßstab für eine Karte benutzt werden, so muß seine Quadratseite der Strecke 1 km im Maßstab der Karte entsprechen. Wie lang muß also die Quadratseite bei der Reichskarte (1 : 100 000) sein, wie lang bei einem Meßtischblatt (1 : 25 000)?

7. Die Windgeschwindigkeiten werden von den Wetterwarten in m/sec gegeben. Unsere Flieger brauchen sie in km/std. **Wetterdienst**

Bei starkem Wind (Stufe 6) beträgt die Geschwindigkeit c = 10 m/sec. **a)** Wieviel m, **b)** wieviel km legt dieser Wind in 1 Std. zurück?

Begründe danach die Formel $v = \frac{c \cdot 3600}{1000} = 3{,}6\,c$, wenn v die Geschwindigkeit in km/std und c dieselbe Geschwindigkeit in m/sec ist.

Rechne nachſtehende Geſchwindigkeiten von m/sec in km/std um.

c)	Fußgänger	1,5 m/sec
d)	Reiter	$3\frac{1}{2}$ m/sec

e)	Schlittſchuhläufer	10 m/sec
f)	Rauchſchwalbe	90 m/sec

g) Man kann ſich die Umrechnungsarbeit durch eine Zeichnung nach Bild 310 erſparen.

Beiſpiel: Mit Hilfe des um 0 drehbaren Lineals lieſt man an $\overline{AA'}$ bzw. $\overline{CC'}$ ab, daß ſich die Geſchwindigkeiten $c = 10$ m/sec und $v = 36$ km/std entſprechen. Erkläre die Zeichnung und fertige eine größere an.

Nomogramm

h) Gleichzeitig geſtattet unſer „Nomogramm“[1] (Bild 310) für Aufgaben aus der Schiffahrt noch die Umrechnung in Knoten (das ſind sm/std). Es gilt:

$$1 \text{ sm} \triangleq 1{,}852 \text{ km, alſo } 1 \text{ km} \triangleq \frac{1}{1{,}852} \text{ sm, alſo}$$

$$1 \text{ m/sec} \triangleq 3600 \text{ m/std} \triangleq 3{,}6 \text{ km/std} \triangleq \frac{3{,}6}{1{,}852} \text{ sm/std} \triangleq 1{,}9 \text{ sm/std (Knoten).}$$

Im Bild 310 verhält ſich $\overline{OA} : \overline{OB} : \overline{OC}$ wie $1 : 1{,}9 : 3{,}6$. Auf den drei gleichmäßigen Teilungen (cm), die in A, B und C ſenkrecht zu OC angebracht ſind, gibt jede Gerade (Faden oder Lineal) durch O drei gleiche Geſchwindigkeiten an.

Bild 310.

Storchſchnabel

8. Der Storchſchnabel (Pantograph) dient zur Umzeichnung in verändertem Maßſtab. Er beſteht aus vier gleichlangen Stäben, die in den Punkten B, D, E, F drehbar miteinander verbunden ſind. Punkt A wird feſtgehalten, mit einem Stift in Punkt B fährt man die Figur nach, die umzuzeichnen iſt. Ein Zeichenſtift in Punkt C liefert dann eine vergrößerte Figur. a) In welchem Maßſtab iſt ſie vergrößert? b) Wie müßte man verfahren, um eine verkleinerte Figur zu erhalten? c) Erkläre die Wirkungsweiſe. d) Wie kann man durch Änderung der Punkte D und E einen anderen Maßſtab erzielen? (Bild 311.)

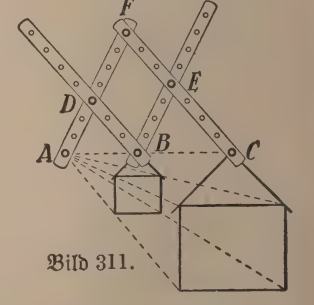


Bild 311.

[1]) Siehe Fußnote S. 197. Ein Nomogramm iſt eine Rechentafel mit Funktionsleitern.

B. Zur Entstehung der Bevölkerungspyramide.

Alter in Jahren	Bevölkerungszahlen in 1000 1910 männlich	1910 weiblich	1937 männlich	1937 weiblich
unter 10	6870	6806	5251	5057
10—20	5916	5898	5257	5090
20—30	4798	4809	5776	5752
30—40	4088	4117	5635	5862
40—50	3028	3125	3891	4820
50—60	2114	2346	3389	3790
60—70	1318	1612	2452	2674
70—80	580	754	1084	1307
80 u. mehr	112	160	207	303

9. Bild 312 zeigt den „pyramidenförmigen" Altersaufbau des deutschen Volkes im Jahre 1910 auf Grund der Tabelle. Die einzelnen 10-Jahre-Gruppen sind durch waagerechte Rechtecke dargestellt, die übereinander geschichtet sind. Fertige im Maßstab: 1 Mill. ≙ 5 mm; 10 Jahre ≙ 5 mm Streifenhöhe ein Bild des Altersaufbaus a) für 1910 b) für 1937 an (runde vorher ab!). c) Verbinde in a) die Mittelpunkte der linken senkrechten Rechtecksseiten miteinander und ebenso auf der rechten Bildseite. Auf was für einer Linie liegen diese Mittelpunkte angenähert? d) Verfahre entsprechend mit b).

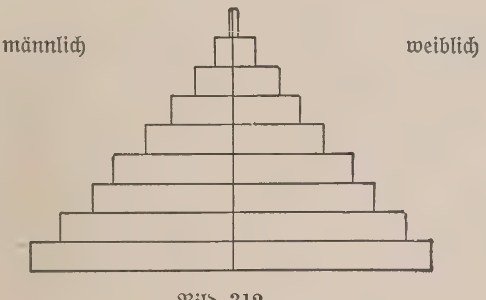


Bild 312.

Die drei Zeichnungen in Bild 313 zeigen die „Bevölkerungspyramide" für ein normal wachsendes, für ein stehenbleibendes und für ein ab-

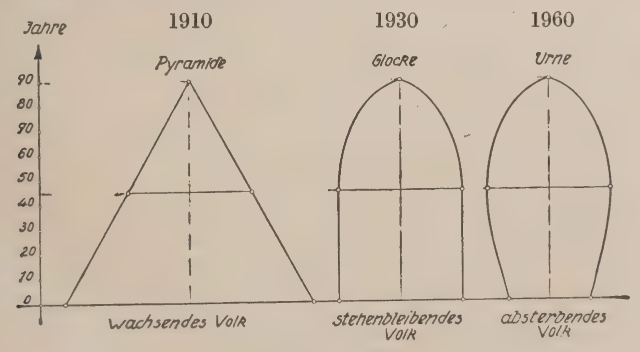


Bild 313.

sterbendes Volk. Sie entsprechen dem Bevölkerungsaufbau des deutschen Volkes, wie er in den Jahren 1910 (Pyramide) und 1930 (Glocke) war, und wie er im Jahre 1960 (Urne) eingetreten wäre, wenn nicht die Maßnahmen der nationalsozialistischen Regierung unser Volk vor diesem Schicksal bewahrt hätten (Ehestandsdarlehen, Kinderbeihilfen usw.)

In den drei Zeichnungen ist die Zahl der 45jährigen stets die gleiche.

Bevölkerungsbewegung

10. Geborene und Gestorbene im Deutschen Reich:

Jahre	Bevölkerung in Mill.	Lebendgeborene		Gestorbene		Geburtenübersch.	
		in Mill.	auf 1000 Einw.	in Mill.	auf 1000 Einw.	in Mill.	auf 1000 Einw.
1890	49,2	1,76		1,20			
1900	56,0	2,00		1,24			
1933	66,0	0,97		0,74			

a) Lies aus Bild 314 a ab, wieviel Kinder 1933 hätten geboren werden müssen, wenn die Geburtenhäufigkeit von 1890 hätte erreicht werden sollen und bestimme den starken Rückgang.

b) Bestimme wie in a) mit Hilfe des Strahlensatzes, wie groß die Zahl der Lebendgeborenen 1933 hätte sein müssen, wenn die Geburtenhäufigkeit von 1900 zugrunde gelegt würde. c) Für die Jahre nach 1933 vgl. Anh. II, 1.

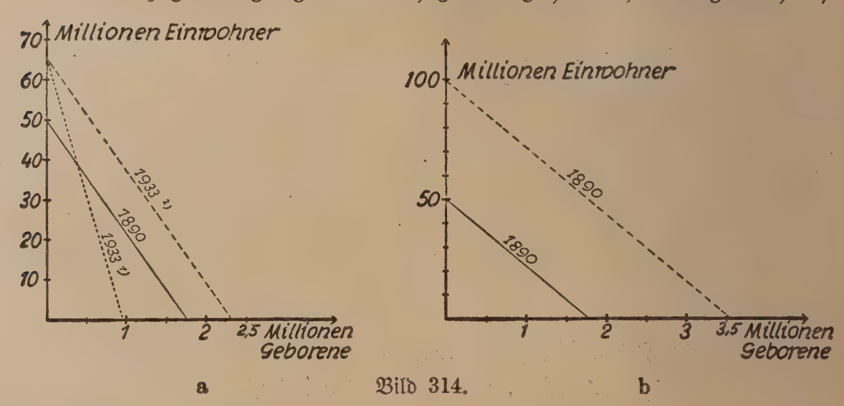


Bild 314.

11. a) Wie groß wäre für 1890 die Zahl der Geborenen für 100 Mill. Einwohner? (s. Bild 314 a). Bestimme die Zahl aus Bild 314 b und durch Rechnung. Wieviel kommen danach auf 1000 Einwohner?

b) Bestimme ebenso durch Zeichnung nach Aufg. Nr. 10 für das Jahr 1900 die Zahl der Lebendgeborenen auf 100 Mill. Einwohner und berechne danach, wieviel auf 1000 Einwohner kommen. c) Desgl. für 1933.

[1]) Wie es war. [2]) Wie es hätte sein sollen.

d) Trage die Ergebnisse von a) bis c) in die vierte Spalte der obenstehenden Tabelle ein.

12. Bestimme in gleicher Weise wie in Aufg. Nr. 11 die Zahl der Gestorbenen auf 1000 Einwohner a) für 1890, b) für 1900, c) für 1933. d) Trage die Ergebnisse von a) bis c) in die sechste Spalte der Tabelle ein und in die folgenden Spalten den Geburtenüberschuß.

Bei einem normalen Altersaufbau kämen auf 1000 Einwohner 18 Gestorbene, also auf 100 Mill. 1,8 Mill. Bestimme danach mit Hilfe des Strahlensatzes, wieviel Personen 1933 rechnerisch hätten sterben müssen, und vergleiche diese Zahl mit der tatsächlichen Anzahl der Sterbefälle. Wie groß wäre der Geburtenunterschuß bei 18 Gestorbenen auf 1000 Einwohner? Wie kommt also der Geburtenüberschuß 1933 zustande?

13. a) Die Zahl der 50 jährigen betrug 1930 rund 280 000 Männer und 300 000 Frauen. Stelle mit Hilfe dieser Zahlen die Bevölkerungspyramide für 1930 her.
b) Bestimme daraus mit Hilfe des Strahlensatzes unter Benutzung der normalen Pyramide für ein wachsendes Volk die Anzahl der Knaben, die 1930 hätten lebend geboren werden müssen. Vergleiche diese Zahl mit der wirklichen (1930 wurden 580 328 Knaben geboren). Um wieviel bleibt danach die Geburtenzahl zurück?
c) Beantworte die Frage b) für Mädchen (1930 wurden 547 122 Mädchen geboren).
d) Wie groß wäre der Überschuß der lebendgeborenen Mädchen über die lebendgeborenen Knaben?[1]

Die durch diese vereinfachte Konstruktion gefundene Pyramide entspricht nicht völlig den wirklichen Verhältnissen.

C. Verschiedenes.

14. Übungssätze: a) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks teilen sich im Verhältnis 2 : 1 (vgl. S. 83, Nr. 9). Beweis nach Bild 315.
b) Je zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Seiten. Beweis mit Hilfe der Inhaltsformel.

15. Konstruktionen: Bei den folgenden Aufgaben ist zunächst ein Stück als 4. Proportionale zu finden. Ein Dreieck zu zeichnen aus:

a) $\frac{h_b}{h_a} = \frac{5}{3}$, $a = 6$ cm, $\alpha = 55^0$

b) $\frac{h_b}{h_a} = \frac{6}{5}$, $b = 4{,}4$ cm, $\alpha = 48^0$

c) $\frac{h_b}{h_a} = \frac{5}{4}$, $a = 7$ cm, $r = 4{,}2$ cm

d) $\frac{h_a}{h_c} = \frac{2}{5}$, $c = 4$ cm, $s_c = 9$ cm.

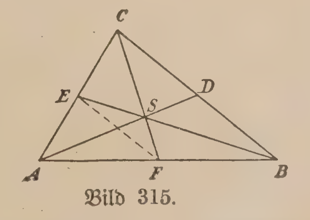


Bild 315.

[1] In Wirklichkeit kommen in normalen Zeiten auf 100 lebendgeborene Mädchen 106 lebendgeborene Knaben.

16. a) Die Flächeninhalte von Rechtecken mit gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{g \cdot h_1}{g \cdot h_2} = \frac{h_1}{h_2}$.

b) Die Flächeninhalte von Rechtecken mit gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien: $\frac{F_1}{F_2} = \frac{g_1 \cdot h}{g_2 \cdot h} = \frac{g_1}{g_2}$.

Schaubilder Vom ersten Satz haben wir bereits in den Schaubildern (Bd. I) „Deutsche in aller Welt" (13), „Bevölkerung Europas" (61), vom zweiten in den Schaubildern über „Verstädterung" (Bd. I, 79 a und b) Gebrauch gemacht. Auch die Streifendarstellung, die in den Bildern über „Deutsche Ein- und Ausfuhr" (S. 19) und über die „Verluste infolge des Versailler Diktates" (S. 89) benutzt worden ist, gehört hierher.

Vom mathematischen Standpunkt aus besteht zwischen den beiden Arten der Darstellung kein Unterschied. Man wendet die Streifendarstellung häufig dort an, wo eine Anzahl der verschiedensten Angaben anschaulich zusammengestellt werden soll.

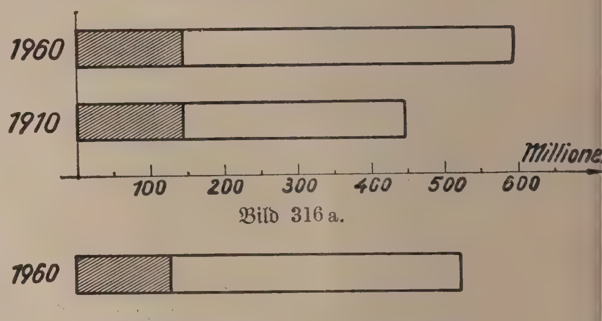


Bild 316 a.

Bild 316 b.

c) Die Bilder 316 a und b veranschaulichen durch Rechtecke mit gleicher Höhe, daß die Germanen 1910 etwa $\frac{1}{3}$ der Gesamtbevölkerung Europas ausmachten, aber 1960 voraussichtlich nur noch $\frac{1}{4}$ betragen werden. Erkläre den Unterschied. Welche von den Darstellungen ist „richtiger"?

17. An den KdF.-Sportkursen nahmen teil (in Millionen):

Jahr	1934	1935	1936	1937
Männer	0,65	3,50	6,43	8,38
Frauen	0,42	2,29	4,04	4,36

Stelle die Zahlen der Gesamtteilnehmer in den einzelnen Jahren durch Rechtecke von der Höhe 10 cm dar. Setze die Breite des kleinsten gleich 1 und bestimme die Breite der anderen a) durch Zeichnung, b) durch Rechnung. Trage in jedes den Frauenanteil ein (schraffiere!).

18. Es sei die Fläche des Deutschen Reiches im Jahre 1910 durch ein Quadrat von 10 cm Seitenlänge dargestellt. a) Trage oben als rechteckigen Streifen den Gebietsverlust durch das Versailler Diktat ein. b) Füge ebenfalls als rechteckige Streifen die Gebietszunahmen hinzu, die durch die Eingliederung der Ostmark und des Sudetenlandes eintraten (Anh. II, 3).

XVIII. Ähnlichkeitslehre.

57. Abschnitt: Die Ähnlichkeitssätze.

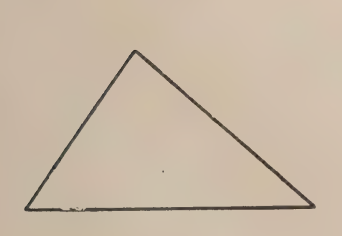
1. Deckungsgleiche Figuren haben gleichen Inhalt und gleiche Gestalt. Flächengleiche Figuren haben gleichen Inhalt, aber verschiedene Gestalt.
Im folgenden Teil werden Figuren von gleicher Gestalt, aber mit verschiedenem Inhalt betrachtet.

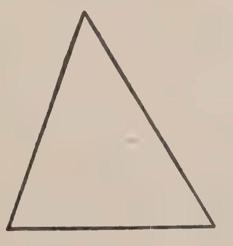
2. Der Plan eines Grundstücks, eines Gartens (Bd. I), einer Stadt ist dem wirklichen Gegenstande ähnlich; die beiden Luftbildaufnahmen Bild 317 und II (s. Anlage) nennt man ähnlich. Ein Spielzeug kann dem wirklichen Gegenstande ähnlich sein. Im Haus der Deutschen Kunst waren im Frühjahr 1938 die Großbauten des Deutschen Reiches in verkleinertem Maßstabe dargestellt. Diese Nachbildungen sind den Originalbauten ähnlich. Man nennt Figuren oder Körper gleicher Gestalt, aber verschiedener Größe einander ähnlich. Die Vergrößerung einer Photographie ist dieser ähnlich; das vergrößerte Bild, das ein Projektionsapparat auf die Leinwand wirft, ist dem ursprünglichen Bild ähnlich. Der so nur gefühlsmäßig vorhandene Begriff der Ähnlichkeit soll nun mathematisch geklärt werden. **Ähnlichkeit**

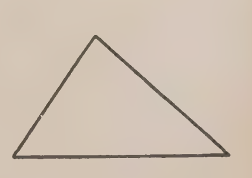


Bild 317.

3. a) Welche der Dreiecke in Bild 318 würdest du ähnlich nennen? b) Bestimme in Bild 318a das Verhältnis zweier Seiten und in Bild 318c das Verhältnis der entsprechenden Seiten. c) Miß entsprechende Winkel. d) Führe für Bild 318b und c dasselbe durch.







a Bild 318. b c

4. a) Zeichne zwei Rechtecke ($a_1 = 4$ cm, $b_1 = 2$ cm und $a_2 = 8$ cm, $b_2 = 1$ cm), dazu ein drittes ($a_3 = 8$ cm, $b_3 = 4$ cm). Welche müßten nach Nr. 2 ähnlich sein? Bilde die Seitenverhältnisse $\frac{a_1}{b_1}$, $\frac{a_2}{b_2}$, $\frac{a_3}{b_3}$. Die entsprechenden Winkel sind als Rechte gleich.

b) Miß zwei beliebige Verbindungsstrecken in der größeren Luftbildaufnahme (Bild II) und ihre Bildstrecken in dem kleinen Bilde 317. Stelle die Verhältnisse ihrer Maßzahlen auf und bestimme in beiden Bildern die entsprechenden Schnittwinkel.

5. a) Immer zeigt sich, daß wir 2 Figuren gleiche Gestalt zuschreiben, wenn sie in entsprechenden Winkeln übereinstimmen und entsprechende Seiten zwar nicht gleich groß sind, aber gleiche Verhältnisse bilden.

b) Erkl.: **Figuren heißen ähnlich ($\sim$), wenn alle entsprechenden Winkel und Seitenverhältnisse gleich sind**[1].

c) Gib weitere Beispiele für ähnliche Figuren (und ähnliche Darstellungen, Karten, Pläne) an.

6. a) Man stellt zu einem gegebenen Dreieck ABC ein zweites, das mit dem ersten in den Winkeln übereinstimmt, am einfachsten dadurch her, daß man zu einer Dreiecksseite eine Parallele A′B′ zieht (Bild 319). Für das ursprüngliche und das abgeschnittene Dreieck gilt:

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \alpha'\\ \beta &= \beta'\\ \gamma &= \gamma'\end{aligned}\right\} \text{ und } \left\{\begin{aligned}&a : a' = b : b' = c : c' \text{ oder}\\ &a : b : c = a' : b' : c' \text{ oder}\\ &a = k \cdot a',\ b = k \cdot b',\ c = k \cdot c'.\end{aligned}\right.$$

(Dabei gibt die Verhältniszahl k die Vergrößerung oder Verkleinerung an. Bild 319).

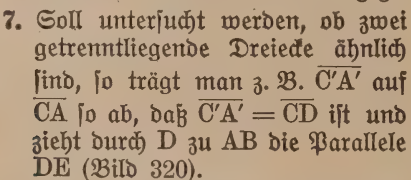
b) Daraus folgt der

Hilfssatz: Zieht man in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele, so ist das abgeschnittene Dreieck dem gegebenen ähnlich.


Bewegung einer Figur

c) Eine Bewegung (Parallelverschiebung, Drehung, Umklappung) ändert nichts an den Strecken und Winkeln einer Figur.

Bild 319.



7. Soll untersucht werden, ob zwei getrenntliegende Dreiecke ähnlich sind, so trägt man z. B. $\overline{C'A'}$ auf $\overline{CA}$ so ab, daß $\overline{C'A'} = \overline{CD}$ ist und zieht durch D zu AB die Parallele DE (Bild 320).

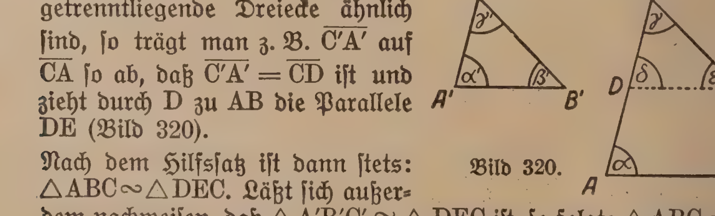


Bild 320.

Nach dem Hilfssatz ist dann stets: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$. Läßt sich außerdem nachweisen, daß $\triangle A'B'C' \cong \triangle DEC$ ist, so folgt: $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.



Dies ist der stets gleiche Gang des Beweises für die folgenden 4 Ähnlichkeitssätze.

[1] Das Zeichen $\sim$ ist ein lat. s von similis = ähnlich.

8. Für die Deckungsgleichheit müssen $\triangle A'B'C'$ und $\triangle DEC$ außer in $\overline{CD} = \overline{C'A'}$ noch in zwei anderen Stücken übereinstimmen, wofür es vier Möglichkeiten gibt:

s, s, s	s, w, s	w, s, w	s, s, w
1. $\overline{C'A'} = \overline{CD}$ 2. $\overline{A'B'} = \overline{DE}$ 3. $\overline{B'C'} = \overline{EC}$	1. $\overline{C'A'} = \overline{CD}$ 2. $\gamma' = \gamma$ 3. $\overline{C'B'} = \overline{CE}$	1. $\overline{C'A'} = \overline{CD}$ 2. $\gamma' = \gamma$ 3. $\alpha' = \delta$	1. $\overline{C'A'} = \overline{CD}$ 2. $\overline{C'B'} = \overline{CE}$ 3. $\alpha' = \delta\,(\overline{CE} > \overline{CD})$

$\triangle A'B'C'$ und $\triangle ABC$ können also nach Voraussetzung übereinstimmen in:

$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$ $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$	$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ $\gamma' = \gamma$	$\alpha' = \alpha$ $\gamma' = \gamma$	$\frac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$ $\alpha' = \alpha$

d. h. es ergeben sich **die vier**
Ähnlichkeitssätze: Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in:

s, s, s	s, w, s	w, w	s, s, w
dem Verhältnissen von je zwei Seiten	dem Verhältnis zweier Seiten und dem eingeschlossenen Winkel	**zwei Winkeln**	dem Verhältnis zweier Seiten und dem Gegenwinkel der größeren

Von diesen Sätzen ist der dritte am wichtigsten.

9. Folgerungen: **a)** In ähnlichen Dreiecken verhalten sich entsprechende Höhen wie entsprechende Seiten.

Die Teildreiecke AHC und A'H'C' sind ähnlich. Warum? Also gilt auch: $\frac{\overline{CH}}{\overline{C'H'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}$.

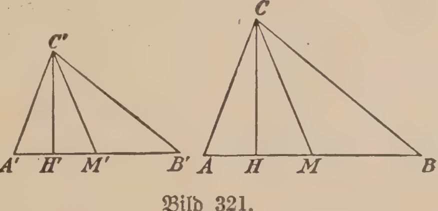


Bild 321.

b) Entsprechende Sätze gelten auch für die Seiten- und für die Winkelhalbierenden. Sprich sie aus und beweise ihre Richtigkeit!

c) Z. B. verhält sich: $\frac{a}{a'} = \frac{h_c}{h_c'} = \frac{s_c}{s_c'} = \frac{w_\gamma}{w_\gamma'} = \frac{r}{r'} = \frac{\varrho}{\varrho'}$; gib weitere Verhältnisse an.

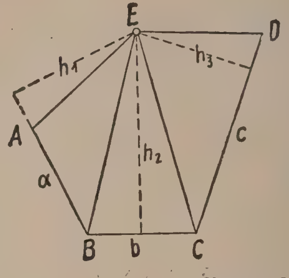
Allgemein gilt: **In ähnlichen Dreiecken sind entsprechende Strecken proportional und entsprechende Winkel gleich.**

d) Beweise mit Hilfe der Ähnlichkeitssätze den

Hilfssatz: Ähnliche Vielecke werden durch entsprechende Ecklinien in ähnliche Dreiecke zerlegt.

Die beiden folgenden Lehrsätze sagen noch etwas über Umfang und Inhalt ähnlicher Vielecke aus:

Umfang — e) **Lehrs. 1: Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie entsprechende Seiten** (oder auch: wie entsprechende Strecken).



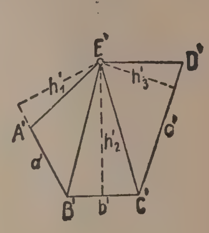


Bild 322.

Nach Voraussetzung ist:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \ldots k$$

$$a + b + c + \ldots = (a' + b' + c' + \ldots)\,k$$

$$\frac{a + b + c + \ldots}{a' + b' + c' + \ldots} = k \quad \text{oder: } \frac{u}{u'} = \frac{a}{a'}\left(= \frac{b}{b'} = \ldots\right)$$

Inhalt — f) **Lehrs. 2: Die Flächen ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten** (oder auch entsprechender Strecken).

Für die Flächen der entsprechenden Teildreiecke (Bild 322) gilt:

$$f_1 = \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot h_1 \qquad f_2 = \tfrac{1}{2} \cdot b \cdot h_2 \qquad f_3 = \tfrac{1}{2} \cdot c \cdot h_3 \text{ usw.}$$

$$f_1' = \tfrac{1}{2} \cdot a' \cdot h_1' \qquad f_2' = \tfrac{1}{2} \cdot b' \cdot h_2' \qquad f_3' = \tfrac{1}{2} \cdot c' \cdot h_3' \text{ usw.}$$

oder, da $a = a' \cdot k$ usw. und $h_1 = h_1' \cdot k$ usw. ist,

$$f_1 = \tfrac{1}{2} \cdot a' \cdot h_1' \cdot k^2 \quad f_2 = \tfrac{1}{2} \cdot b' \cdot h_2' \cdot k^2 \quad f_3 = \tfrac{1}{2} \cdot c' \cdot h_3' \cdot k^2 \text{ usw.}$$

Die Flächen der Vielecke betragen:

$$F = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$$

$$F' = f_1' + f_2' + f_3' + \ldots$$

$$F' = \tfrac{1}{2} \cdot (a' \cdot h_1' + b' \cdot h_2' + c' \cdot h_3' + \ldots) \text{ bzw.}$$

$$F = \tfrac{1}{2} \cdot (a' \cdot h_1' + b' \cdot h_2' + c' \cdot h_3' + \ldots) \cdot k^2,$$

d. h. $F = F' \cdot k^2$

oder $\frac{F}{F'} = k^2 = \frac{a^2}{a'^2}\left(= \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = \ldots\right)$

53. Abschnitt: Anwendungen der Ähnlichkeitslehre.

A. Einfache Übungen.

Höhenmessung

1. Ein Fahnenmast wirft einen 24 m langen und ein daneben senkrecht aufgestellter Stab von 1,20 m Länge einen 1,80 m langen Schatten. Wie hoch ist der Mast? (Bild 323).
2. Zur Höhenmessung wird als einfaches Instrument ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck benutzt (Försterdreieck, s. Bild 324). Beschreibe und begründe seinen Gebrauch. Welchen Zweck hat das längs einer Lotseite herabhängende Lot? Stelle aus Holz ein solches Dreieck her!

Förster-dreieck

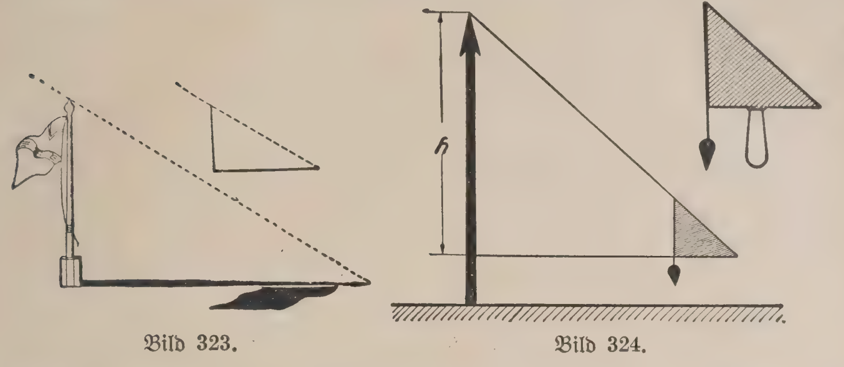


Bild 323. Bild 324.

Nachtflug

3. Für den ständig wachsenden Nachtflugverkehr werden die Flugplätze zwecks Sicherung einer guten Landung mit Instrumenten zur Bestimmung der Wolkenhöhen ausgerüstet. In A befindet sich ein mit einem Höhenkreise versehenes Fernrohr, in B der senkrecht nach oben strahlende Scheinwerfer. Die Strecke $\overline{AB} = g$ ist bekannt. Wie groß ist die Wolkenhöhe H, wenn der Erhebungswinkel α ist?
a) $g = 800$ m, $\alpha = 20^0$.
b) $g = 600$ m, $\alpha = 25^0$.
Maßstab: 100 m $\triangleq$ 1 cm.

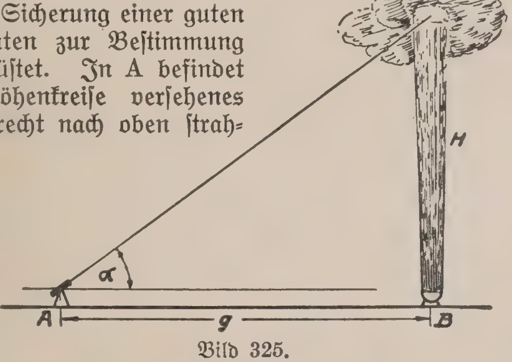


Bild 325.

Höhenmessung

4. Um die Höhe eines Gasometers zu bestimmen, wurde in einer Entfernung von 75 m der Erhebungswinkel zu 29^0 gemessen. Bestimme aus einer Zeichnung bei selbstgewähltem Maßstab die gesuchte Höhe!
Wie müßte man die Augenhöhe berücksichtigen?

5. Ist der Fußpunkt bei der Höhenmessung nicht zugänglich, so verfährt man folgendermaßen. An den Endpunkten einer bekannten Standlinie, die in Richtung auf das betreffende Gebäude (Kirchturm, Schornstein) verlaufen muß, mißt man die beiden Erhebungswinkel (Bild 326).

a) Die Spitze eines Funkturmes wurde an den Endpunkten einer 44 m langen Standlinie unter den Winkeln 38^0 und 30^0 gesehen. Bestimme durch eine Zeichnung (20 m $\triangleq$ 1 cm) die Höhe und die Entfernungen, in der die Messungen durchgeführt wurden (Bild 326).
b) Desgl. für einen Rundfunksender, dessen Spitze bei einer 52 m langen Standlinie unter

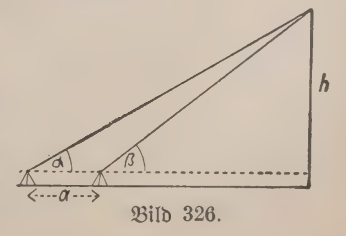


Bild 326.

den Erhebungswinkeln 1000⁻ und 600⁻ erscheint. Wie ist hier die Augenhöhe zu berücksichtigen?

Sichttoter Raum 6. Auf einem Meßtischblatt ist ein Aussichtsturm A (Höhe h_1), eine Kaserne B (Höhe h_2), ein zwischen A und B befindlicher Hügel D (Höhe h_3) eingetragen. Ist B von A aus sichtbar, wenn der Abstand $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = d$ ist?

a) $a = 10,2$ cm; $d = 3,2$ cm; $h_1 = 280$ m; $h_2 = 180$ m; $h_3 = 240$ m.

b) $a = 15,6$ cm; $d = 4,5$ cm; $h_1 = 420$ m; $h_2 = 150$ m; $h_3 = 330$ m.

Meßtisch 7. Um von einem Gelände eine Karte aufzunehmen, benutzt der Landmesser einen „Meßtisch" (daher „Meßtischblatt"!), der aus einem waagerecht aufgestellten Zeichenbrett mit aufgezogenem Zeichenblatt besteht. Eine im Gelände abgesteckte „Standlinie" $\overline{AB}$ wird in dem gewünschten Maßstab auf das Zeichenblatt als $\overline{A'B'}$ übertragen (Bild 327). Man stellt den Meßtisch zunächst in A auf, so daß A'B' nach B weist und zieht auf ihm von A aus nach besonders hervorragenden Punkten C, D, E ... im Gelände die Richtungen (Sehlinien). Dann stellt man den Meßtisch in B auf, so daß B'A' nach A weist und zieht von B' aus wieder die Richtungen (Sehlinien) nach denselben Geländepunkten. Entsprechende Sehlinien schneiden sich dann in den Punkten C', D', E' ..., die so ein Abbild des Geländes in dem gewünschten Maßstab liefern. Begründe die Richtigkeit des Verfahrens!

Im Bild 327 erscheint der Meßtisch neben den zusammengedrängten Strecken des Geländes übertrieben groß.

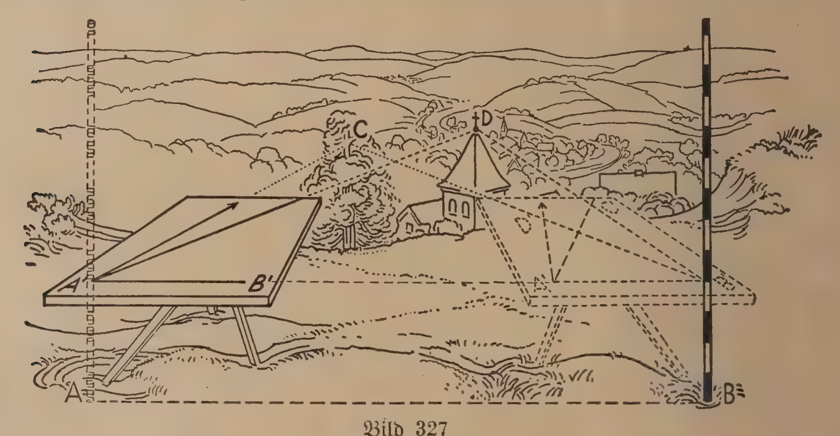


Bild 327

B. Ähnliche Vielecke. — Ähnlichkeitsverfahren.

8. a) Im Bild 328a befindet sich in S eine Lichtquelle, die von einem Vieleck ein Schattenbild auf eine Parallelebene, auf einen Schirm wirft. Die Strahlen SA'A bilden die Seitenkanten einer Pyramide, deren Grundfläche das Schattenbild ist. Das Vieleck selbst erscheint dabei als

eine zur Grundfläche parallele Schnittfigur. Das ursprüngliche Vieleck und sein Schattenbild sind ähnliche Figuren.

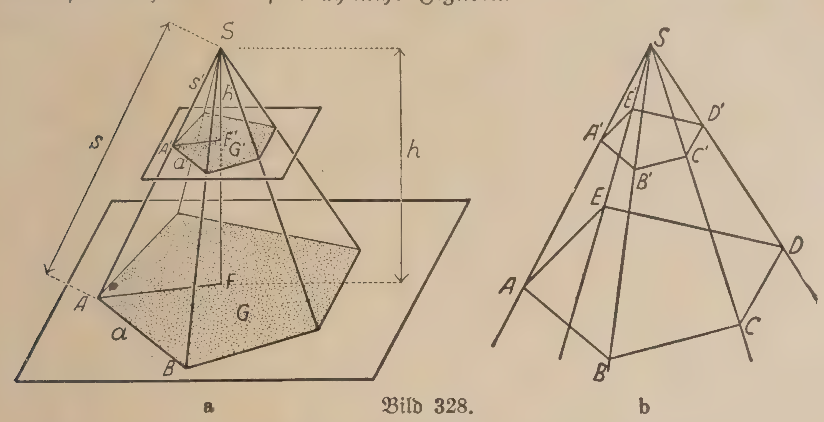


Bild 328.

b) Da die entsprechenden Seiten a, a′, b, b′ usw. einander parallel sind, kann man die Strahlensätze anwenden: $\frac{a}{a'} = \frac{s}{s'} = \frac{b}{b'}$. Aus der Gleichheit entsprechender Winkel und der Verhältnisse entsprechender Seiten folgt der

Lehrs. 1: **Schneidet man eine Pyramide durch eine zur Grundfläche parallele Ebene, so ist die Schnittfigur der Grundfläche ähnlich.** **Schnitt durch Pyramide**

Ferner gilt: $\frac{G}{G'} = \frac{a^2}{a'^2} = \frac{s^2}{s'^2} = \frac{h^2}{h'^2}$

Lehrs. 2: **Die Inhalte von Schnittfigur und Grundfläche verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.**

9. Im Bild 328b sind die Ecken A, B, C, D, E eines beliebigen Vielecks mit einem Punkt S verbunden worden. Zieht man, mit dem beliebigen Punkte A′ auf SA beginnend, nacheinander die Parallelen A′B′, B′C′, C′D′ und D′E′, und verbindet man E′ mit A′, so verhält sich $\frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{SB'}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SC'}} = \frac{\overline{SD}}{\overline{SD'}} = \frac{\overline{SE}}{\overline{SE'}}$, folglich ist auch A′E′ ∥ AE, und daher ist das neue Vieleck A′B′C′D′E′ ∼ ABCDE. — Die entsprechenden Winkel sind nach S. 64, Nr. 27 gleich. — (Zeichne 328b so um, daß A′ auf der Verlängerung von AS über S hinaus liegt.)

Erkl.: Ähnliche Vielecke, bei denen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte durch einen Punkt S (Ähnlichkeitspunkt) gehen, nennt man **ähnlich liegend**. **Ähnliche Lage**

10. Eine Figur in einem gegebenen Maßstab k : 1 vergrößern (k > 1) oder verkleinern (k < 1) heißt, zu ihr eine ähnliche zeichnen, in der alle Strecken das k-fache der entsprechenden Strecken der gegebenen Figur sind.

Vergrößerung oder Verkleinerung

11. Erkläre nach Bild 329, wie das Viereck ABCD im Verhältnis $k = 2:1$ vergrößert ist.

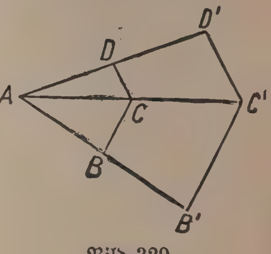
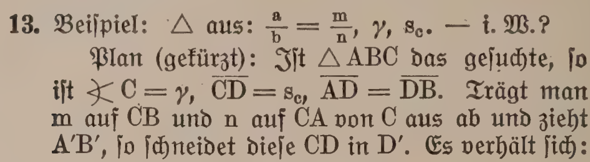


Bild 329.

12. Zeichne zu einem gegebenen a) Viereck, b) Fünfeck ein ähnliches, von dem eine Seite der Länge nach gegeben ist!



13. Beispiel: $\triangle$ aus: $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, γ, s_c. — i. W.?

Plan (gekürzt): Ist $\triangle ABC$ das gesuchte, so ist $\sphericalangle C = \gamma$, $\overline{CD} = s_c$, $\overline{AD} = \overline{DB}$. Trägt man m auf CB und n auf CA von C aus ab und zieht A′B′, so schneidet diese CD in D′. Es verhält sich:

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} = \frac{m}{n}; \text{ außerdem gilt:}$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{CA}} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{\overline{CB'}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CA}}$$

$$A'B' \parallel AB \text{ (1. Strahlens. Umk.)}$$

$$\triangle A'B'C \sim \triangle ABC \text{ (Hilfss.)}$$

A′B′C ist Hilfsdreieck, es läßt sich nach (s, w, s) aus m, n und γ zeichnen.

D′ wird als Mitte von $\overline{A'B'}$ gefunden.

D liegt 1. auf CD′ und 2. auf $\bigcirc$ (C; s_c). A liegt 1. auf CA′, B liegt 1. auf CB′, 2. liegen A und B auf der Parallelen durch D zu A′B′.

Bild 330.

14. Löse nach diesem Ähnlichkeitsverfahren folgende Dreiecksaufgaben: (Bei c) und d) zeichne zuerst ein Dreieck aus zwei Winkeln.)

a) $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$, $h_c = 3{,}5$ cm, $\gamma = 40^0$
b) $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$, $w_\gamma = 6$ cm, $\gamma = 27^0$
c) $\alpha = 75^0$, $\beta = 37^0$, $c = 5$ cm
d) $r = 4$ cm, $\beta = 110^0$, $\gamma = 55^0$
e) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, c, α
f) $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, s_b, α
g) $\frac{h_b}{h_a} = \frac{m}{n}$, s_c, β
h) $a:b:c = m:n:p$, r

Kursbestimmung

15. Das Ähnlichkeitsverfahren kommt zur praktischen Anwendung in der Fliegerei und in der Schiffahrt.

Vorbem.: Neben Eigengeschwindigkeit c und Windgeschwindigkeit w tritt in den folgenden Aufgaben noch die (resultierende) Geschwindigkeit v über Grund. Würde das Flugzeug von A aus in direkter Richtung auf das Ziel B starten (Bild 331 a), so würde es durch den Wind seitlich versetzt werden. Es muß also von vornherein eine solche Richtung einschlagen, daß die Versetzung durch den Wind aufgehoben wird. Seine wirkliche Flugrichtung und sein wirklicher Flugweg über Grund ergibt sich dann durch die Ecklinie des Parallelogramms, dessen Seiten den Wegen $s_1 = ct$ und $s_2 = wt$ entsprechen.

Geschwindigkeitsdreieck

Begründe mit Hilfe von $s_1 = ct$, $s_2 = wt$ und $\sphericalangle CAB = \sphericalangle MA'B' = \varphi_1 - \varphi_2$, daß das Wegedreieck dem Geschwindigkeitsdreieck ähnlich ist. — Die Verhältniszahl t kann aus $s = v \cdot t$ ermittelt werden.

Beispiel: Ein Flugzeug soll vom Ort A nach dem Ort B fliegen. Seine Eigengeschwindigkeit ist c. Von der zuständigen Wetterwarte erhält der Flugzeugführer die Windstärke und Windrichtung (Windvektor[1] w).

a) Welchen Kurs φ muß das Flugzeug fliegen?

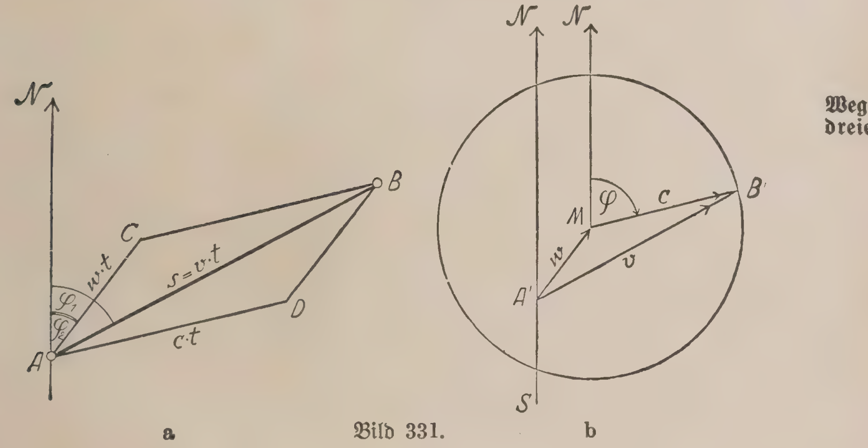
b) Mit welcher Geschwindigkeit v über Grund wird die Strecke zurückgelegt?

c) Bestimme die Flugzeit t.

Kurskonstruktion

Anleitung: Nach Wahl eines geeigneten Maßstabes (c und w in km/std) wird von dem beliebig angenommenen Punkt A′ aus der Windvektor w gezeichnet, um seinen Endpunkt M mit c der „Geschwindigkeitskreis" (Bild 331 b) beschrieben, der den in Richtung AB von A′ aus gezogenen Strahl in B′ schneidet. △ A′MB′ ist das „Geschwindigkeitsdreieck".

Wegedreieck



a Bild 331. b

Abtrift

zu **a)** Winkel $NMB' = \varphi$ ist der vom Flieger einzuschlagende Kurs, er ist unmittelbar aus der Zeichnung zu entnehmen (und setzt sich aus φ_1 und dem Vorhaltewinkel $BAD = \beta$ [auch Abtrift genannt] zusammen).

zu **b)** $\overline{A'B'}$ gibt in dem gewählten Maßstab (s. oben) die Geschwindigkeit v über Grund.

zu **c)** Die Flugzeit t findet man aus $t = \frac{s}{v}$.

α) Es kann s selbst gegeben sein. β) Ist $\overline{AB}$ als Kartenstrecke im zugehörigen Maßstab bekannt, so kann s errechnet werden. γ) Liegen $\overline{AB}$ und Geschwindigkeitsdreieck im gleichen Maßstab verkleinert vor, so braucht man nur $\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = t$ zu bestimmen.

---

[1] Unter einem Vektor versteht man eine durch absoluten Betrag, Richtung und Richtungssinn bestimmte Größe. Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft sind solche Vektoren (gerichteten Größen). Sie werden durch einen Pfeil dargestellt.

Probe für diesen Fall: Vervollständigt man das Wegedreieck dadurch, daß man durch A zu A′M und durch B zu B′M die Parallelen zieht, so gilt: $\frac{s}{v} = \frac{s_1}{c} = \frac{s_2}{w} = t$.

Kursbestimmung **16.** Bestimme nach den Angaben der folgenden Tabelle zeichnerisch für die einzelnen Flüge a) bis h) den (Steuer-) Kurs φ, die Geschwindigkeit v über Grund und die Flugzeit t. Maßstab: $c \frac{km}{std} \triangleq 10$ cm.

Flugstrecke	s km	$\varphi_1{}^0$	$c \frac{km}{std}$	$w \frac{m}{sec}$	$\varphi_2{}^0$	Wind aus
a) Berlin—Hannover	270	265	120	7	$202\frac{1}{2}$	NNO
b) Berlin—München	510	196	100	10	270	O
c) Königsberg—Berlin	535	241	180	15	45	SW
d) Bremen—Berlin	330	100	120	15	45	„
e) Köln—Berlin	490	67	120	15	45	„
f) Freiburg i. Br.—Berlin	650	36	150	15	45	„
g) München—Berlin	510	16	150	15	45	„
h) Breslau—Berlin	300	300	140	15	45	„

Sternflug **17.** Wann müssen die Flugzeuge der Aufg. Nr. 16 a) bis h) zu einem Sternflug nach Berlin starten, damit sie um 18 Uhr in Berlin-Tempelhof eintreffen?

Marine **18.** a) Eine Torpedobootsflottille fährt mit u = 20 sm/std (Knoten) nach N. Ein zu ihr gehörendes Torpedoboot steht 8 sm von ihr in SO und erhält Befehl, mit erhöhter Geschwindigkeit (v = 30 sm/std) zu ihr zu stoßen. Welchen Kurs muß es steuern, und in welcher Zeit erreicht es die Flottille?

Anleitung: Sind A und B die Standorte der Flottille bzw. des Torpedobootes zur Zeit, als der Befehl erteilt wird, und C der Treffpunkt, so ist △ ABC dem aus u, v und dem Winkel N ⟶ SO (Winkel zwischen der Fahrtrichtung der Flottille und der Richtung Flottille ⟶ Boot) gezeichneten Dreieck ähnlich. Führe eine maßstabsgerechte Zeichnung durch!
b) Wie ändert sich die Lage des Treffpunktes, wenn sich unter sonst gleichen Bedingungen die Richtung ändert, in der das einzelne Boot beim Eintreffen des Befehles zur Flottille stand?

Vorhaltewinkel **19.** Ein U-Boot sichtet in NW ein feindliches Schiff, das mit u = 12 sm/std in Richtung N 40° O läuft, und feuert auf dieses einen Torpedo ab, der mit v = 28,5 sm/std läuft. Ermittle den Winkel, um den das U-Boot vorhalten muß, um das Schiff zu treffen.

Luftbild **20.** In einem Flachgelände (d. h. Gelände mit geringen Höhenunterschieden) wird aus h = 1000 m Höhe mit der Kamera von der Brennweite f = 250 mm eine Senkrechtaufnahme gemacht (Bild 332). a) Bestimme das Verhältnis $\overline{AB} : \overline{A'B'}$. Welchen Maßstab hat demnach das Bild auf der Platte?
b) Wie groß ist die Entfernung zweier Punkte, wenn ihr Abstand auf dem Bilde 3,5 cm beträgt? c) Wieviel Quadratkilometer werden auf einer Platte von den Abmessungen 13 · 18 cm² abgebildet?

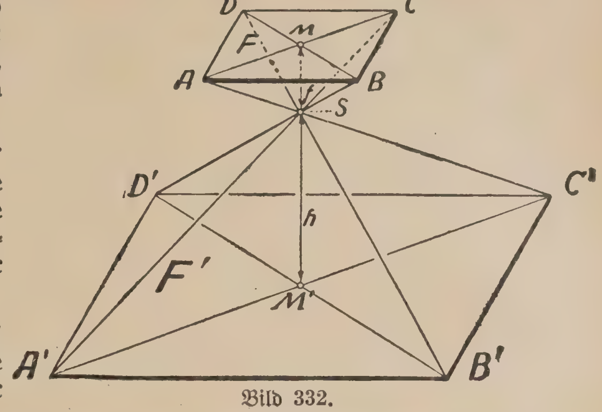


Bild 332.

21. Ermittle den Maßstab eines Flugbildes bei einer Flughöhe von a) 500 m, b) 1500 m, c) 2500 m für die Brennweite f = 200 mm (250 mm).

22. a) bis c) Bestimme für die Flughöhen (Nr. 21) die Größe der aufgenommenen Fläche bei einer Plattengröße von $9 \cdot 12\ \text{cm}^2$ $(13 \cdot 18\ \text{cm}^2)$.

23. Aus welcher Höhe müßte eine Aufnahme bei der Brennweite f = 200 mm gemacht werden, wenn ein Bild im Maßstabe a) einer Grundkarte (1 : 5000), b) eines Meßtischblattes (1 : 25000) angefertigt werden soll?

c) Aus welcher Höhe ist die Luftbildaufnahme II (Anlage) mit dieser Kamera gemacht worden, d) aus welcher Höhe die kleinere Luftbildaufnahme Bild 317? Ermittle zuerst durch Vergleich mit Luftbild II ihren Maßstab.

24. Zum Zwecke der Vereinfachung und Erleichterung im Gebrauch wurden vom Normenausschuß der Deutschen Industrie für die Papierindustrie die DIN-Formate[1] (für Hefte, Briefe, Aktendeckel usw.) eingeführt. Das Format A0 (lies: A Null), die Ausgangsform, ist ein Rechteck von der Fläche 1 qm. Das nächste Format A 1 geht aus ihm durch Hälften hervor, und zwar sind die beiden Rechtecke A 0 und A 1 ähnlich (Bild 333). **DIN-Teilung**

a) Weise nach, daß dann das Seitenverhältnis der Formate $b:a = 1:\sqrt{2}$ sein muß. (Verhältnis der Seite eines Quadrates zu seiner Ecklinie!)

Aus dem Format A 1 wird A 2, aus A 2 das Format A 3 usw. jeweils wieder durch Hälften gewonnen, alle DIN-Formate sind also ähnliche Rechtecke vom Seitenverhältnis $1 : \sqrt{2}$.

Berechne die Seitenlängen der Formate

b) DIN A0, A1, A2,

c) A3, A4 und A5. (Runde ab!)

d) Prüfe, welches DIN-Format dein Rechenheft hat.

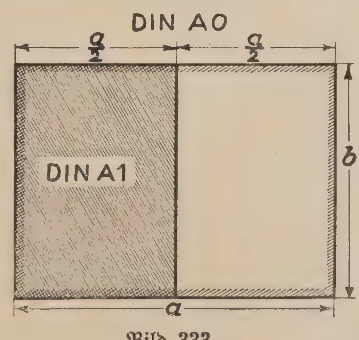


Bild 333.

[1] Früher Abkürzung für Deutsche Industrie Norm, heute für Das Ist Norm.

C. Weitere Übungen am rechtwinkligen Dreieck und Kreis.

25. a) Zeige, daß ein rechtwinkliges Dreieck (Bild 334) durch seine Höhe in zwei Teildreiecke zerlegt wird, die unter sich und zu dem ganzen Dreieck ähnlich sind.

$h^2 = p \cdot q$ (2. Bew.) Beweise b) mit Hilfe der Ähnlichkeit der beiden Teildreiecke noch einmal den Höhensatz

$a^2 = c \cdot q$ (2. Bew.) c) mit Hilfe der Ähnlichkeit eines Teildreiecks zum ganzen Dreieck den Kathetensatz.

26. Vorbem.: Die geometrische Aufgabe, ein Rechteck (Seiten a, b) in ein Quadrat (Seite x) zu verwandeln, führt rechnerisch auf die Gleichung

$$x^2 = a \cdot b. \qquad \text{I}$$

Diese läßt sich auch als Proportion schreiben:

$$a : x = x : b. \qquad \text{II}$$

Bild 334.

Erkl.: **Eine Größe x heißt die mittlere Proportionale (oder das geometrische Mittel) zu zwei Größen a und b, wenn die Gleichung $x^2 = a \cdot b$ oder die Proportion $a : x = x : b$ besteht.**

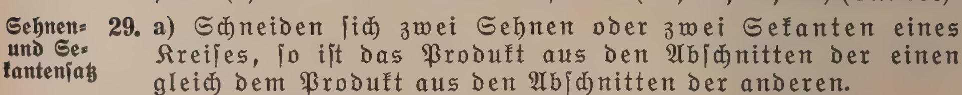
Arithm. und geom. Mittel **27.** a) Welches von den beiden Mitteln zweier Zahlen, das arithmetische oder das geometrische, ist größer? Erst schätze, dann rechne, indem du das arithmetische und das geometrische Mittel aus folgenden Zahlenpaaren bildest.

b) $p = 3$, $q = 27$ c) $p = 6$, $q = 24$ d) $p = 7$, $q = 14$.

e) Welche Strecke im rechtwinkligen Dreieck ist zu den beiden Höhenabschnitten p und q das geometrische Mittel, welche das arithmetische (Satz 8 b, S. 86; Bild 335)? Welches Mittel ist also stets das größere?

Bild 335.

28. Vorbem.: Im folgenden werden unter Sehnen- und Sekantenabschnitten stets die Strecken vom gemeinsamen Schnittpunkt (S) bis an die Kreislinie verstanden (SA, SB, SC, SD) (Bild 336).



Sehnen- und Sekantensatz **29.** a) Schneiden sich zwei Sehnen oder zwei Sekanten eines Kreises, so ist das Produkt aus den Abschnitten der einen gleich dem Produkt aus den Abschnitten der anderen.

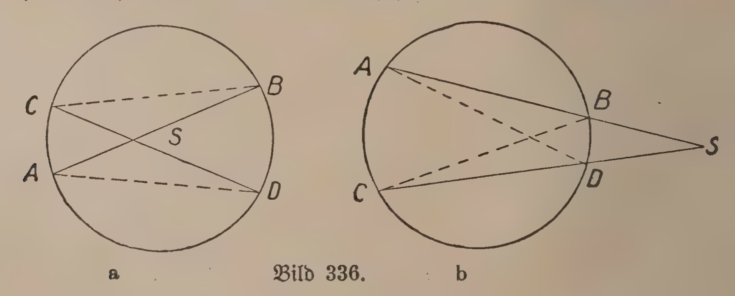


Bild 336.

Beweis: Für beide Fälle gilt: Durch die Verbindungslinien AD und CB entstehen die Dreiecke ASD und CSB. (Bild 336). In ihnen ist

$\sphericalangle SAD = \sphericalangle SCB$ (als Umfangsw. über dems. Bogen Bild a u. b)
$\sphericalangle SDA = \sphericalangle SBC$ (als Nebenw. zu gleichen Umfangsw. Bild b)

$\triangle SAD \sim \triangle SCB$ (w, w)

$$\frac{\overline{SA}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{SC}}{\overline{SB}}$$

oder: $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SC} \cdot \overline{SD}$.

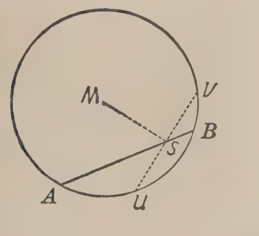
Anm.: Diese Produkte können als Inhalte von Rechtecken gedeutet werden. Forme obigen Satz entsprechend um.

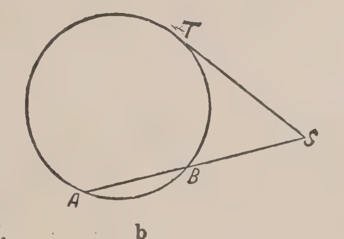
b) Wie zeichnet man durch S (Bild 337a) die Sehne $\overline{UV}$ des Kreises, die in S halbiert wird?

c) Für diesen Fall gilt $\overline{SU} = \overline{SV}$, und es ergibt sich der Halbsehnensatz: **Halbsehnensatz**

$$\overline{SU}^2 \;(= \overline{SV}^2) = \overline{SA} \cdot \overline{SB}.$$

Lehrs.: Wird eine Sehne durch eine zweite halbiert, so ist ihre Hälfte mittlere Proportionale zu den Abschnitten der zweiten.





a Bild 337. b

d) Dreht sich CD (Bild 336b) um S so, daß C und D im Berührungspunkte T der Tangente $\overline{ST}$ zusammenfallen und damit $\overline{SC} = \overline{SD} = \overline{ST}$ wird, so folgt der Sekantentangentensatz: **Sekanten-Tangentensatz**

$$\overline{ST}^2 = \overline{SA} \cdot \overline{SB}.$$

Lehrs.: Wird eine Tangente von einer Sekante geschnitten, so ist die Tangente mittlere Proportionale zu den Abschnitten der Sekante.

e) Man bezeichne $\overline{SA}$ mit a, $\overline{SB}$ mit b, $\overline{SC}$ mit c, $\overline{SD}$ mit d, $\overline{SU}$ mit x, $\overline{ST}$ mit y. Wie groß ist $\overline{AB}$ in Bild 336a, 336b, 337a, 337b? Schreibe die Schlußgleichungen von **a)**, **c)**, **d)** mit diesen Bezeichnungen.

30. Es ist zu drei gegebenen Strecken a, b und c die vierte Proportionale zu zeichnen **a)** mit Hilfe des Sehnensatzes, **b)** mit Hilfe des Sekantensatzes.

Anl.: Gehe jedesmal von einem beliebigen Kreise aus; wie groß ist bei **a)**, wie groß bei **b)** die einzutragende Sehne? Wähle r dementsprechend. Vgl. die Lösung der Aufgabe mit den früheren nach den Strahlensätzen.

31. Es ist zu zwei gegebenen Strecken a und b die mittlere Proportionale zu zeichnen **a)** mit Hilfe des Halbsehnensatzes, **b)** mit Hilfe des Sekantentangentensatzes. α) a = 5,5 cm; b = 2,9 cm. β) a = 7,2 cm; b = 3,5 cm.

32. a) Beachte: Im Halbsehnensatz ist die eine Sehne $(\overline{AB})$ gleich der Summe der beiden Strecken $(\overline{SA}$ und $\overline{SB})$, deren mittlere Proportionale die Halbsehne $(\overline{SU})$ ist, und im Sekantentangentensatz ist die Sehne $(\overline{AB})$ gleich der Differenz der beiden Abschnitte $(\overline{SA}$ und $\overline{SB})$, deren mittlere Proportionale die Tangente $(\overline{ST})$ ist.

b) Übertrage dies auf den Höhensatz (Spannseite gleich Summe p + q, Höhe h die mittlere Proportionale zu p und q) und auf den Kathetensatz (Höhenabschnitt p gleich Differenz c — q, Lotseite b die mittlere Proportionale zu c und q).

c) Zwei Strecken zu zeichnen, wenn ihre Summe und die mittlere Proportionale zu beiden gegeben ist.

Anl.: Höhensatz; Halbsehnensatz.

d) Zwei Strecken zu zeichnen, wenn ihre Differenz und die mittlere Proportionale zu beiden gegeben ist.

Anl.: Sekantentangentensatz; Kathetensatz.

e) Hiernach erscheint der

Höhensatz als ein besonderer Fall des **Kathetensatz**

Halbsehnensatzes. **Sekantentangentensatzes.**

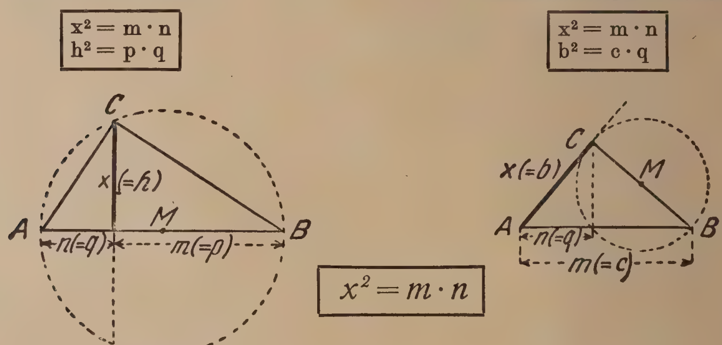


Bild 338.

Aus Bild 338 erkennt man nämlich, daß für den Kreis über der

Spannseite / einen Lotseite

als Durchmesser

die Höhe **Halbsehne** und die Spannseite die **zweite Sehne** ist.	die Spannseite **Sekante** und die andere Lotseite **Tangente** ist.

In beiden Zeichnungen hat m dieselbe Länge, dasselbe gilt von n (und damit von **x**).

33. Gib Art und Anzahl der Lösungen für die Aufgabe an, ein Rechteck (mit den Seiten a und b) in ein Quadrat (Seite x) zu verwandeln.

Sichtweite

34. Ein Flugzeug befindet sich in der Höhe h km (Bild 339). Bestimme die Größe x, die ein Maß dafür ist, wieweit man aus dieser Höhe die Erdoberfläche übersehen kann. **a)** Leite die Formel ab: $x^2 = 2\,Rh + h^2$, wobei $R = 6370$ km sei. Berechne x für **b)** $h = 3000$, **c)** $h = 5000$, **d)** $h = 8000$ m.

Für kleine Höhen kann man h^2 vernachlässigen und erhält die Näherungsformel $x \approx \sqrt{2\,Rh}$.

Bild 339.

e) bis **g)** Berechne danach x für **b)**, **c)**, **d)** wie oben, ferner für **h)** $h = 1000$ m, **i)** $h = 260$ m, **k)** $h = 50$ m (Leuchtturm).

Vgl. die Ergebnisse von **b)** bis **d)** mit denen von **e)** bis **g)**.

35. **a)** Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei Punkte (A und B) geht und die Gerade g berührt.

Anl.: g schneide die Verlängerung von $\overline{AB}$ in S. Benutze zur Bestimmung des gesuchten Berührungspunktes T den Sekantentangentensatz.

Sehwinkel

b) Auf einer Straße s soll ein Punkt aufgesucht werden, von dem aus ein Waldrand unter dem größten Sehwinkel erscheint (Bild 340).

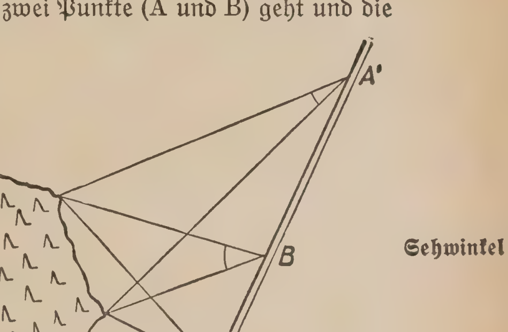


Bild 340.

Anl.: Wo liegen alle Punkte, von denen aus der Waldrand unter einem bestimmten Sehwinkel α erscheint? Wie ändert sich α, wenn man von A über B nach A' wandert? Wie oft treten dabei gleiche Sehwinkel auf? Wodurch sind jedesmal solche Punkte A und A' bestimmt? Wann gibt es nur einen?

D. Schaubilder durch Quadrate und Rechtecke.

Kolonien

36. Vor dem Weltkriege besaß an Kolonien:
Deutschland 3 000 000 qkm,
Frankreich 10 000 000 qkm,
England 34 000 000 qkm.

Im Bild 341 sind die Kolonien Deutschlands durch ein Quadrat

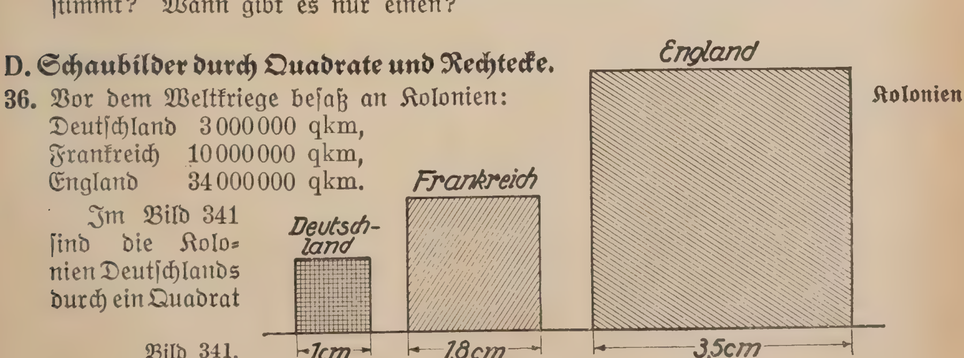


Bild 341.

von der Seitenlänge 1 cm dargestellt. Entsprechend den gegebenen Zahlen wurden die beiden anderen Quadratseiten gefunden. ($a_2^2 : a_1^2 = 10\,000\,000 : 3\,000\,000$.)

Verwandle diese Quadrate in Rechtecke von gleicher Grundlinie.

Beachte, daß allgemein die Darstellung durch Quadrate nur geeignet ist, wenn die Zahlen, die veranschaulicht werden sollen, große Unterschiede aufweisen.

Nutzung deutschen Bodens **37.**

	Gesamtfläche in qkm	Flächennutzung: Äcker, Wiesen und Weiden	Wald	Ödland, Straßen, Wasserfläche und bebaute Fläche
Altreich . .	470 700	64 %	26 %	10 %
Ostmark . .	83 600	50 %	37 %	13 %
Sudetenland	28 200	58 %	30 %	12 %

a) Stelle diese Übersicht für das Altreich zeichnerisch dar, indem du ein Quadrat in drei rechteckige Streifen von gleicher Höhe teilst, deren Grundlinien sich wie 6 : 3 : 1 verhalten. Verwandle jedes der Rechtecke in ein flächengleiches Quadrat. Welche Darstellung ist anschaulicher? **b)** Ebenso für die Ostmark. **c)** Desgl. für das Sudetenland.

Rohstofffreiheit **38.** Zur Sicherung unserer Rohstofffreiheit muß der Anteil der Eigenerzeugung an Öl- und Faserpflanzen gesteigert werden. Es betrug die Anbaufläche (in 1000 ha):

Jahr	1883	1893	1903	1913	1923	1933	1934	1935	1936	1937
α) Raps u. Rübsen	300	160	107	50	30	5	27	47	55	52
β) Hanf u. Flachs	124	69	16	15	14	5	9	26	50	67

Stelle diese Flächen (α) **a)** durch Quadrate **b)** durch Rechtecke dar.

39. Veranschauliche ebenso die Zahlen (β) **a)** durch Quadrate **b)** durch Rechtecke.

Zusammenfassung und Übersicht.

Deckungsgleiche Figuren haben gleiche Gestalt und gleichen Inhalt.
Flächengleiche Figuren haben verschiedene Gestalt und gleichen Inhalt.
Ähnliche Figuren haben gleiche Gestalt und verschiedenen Inhalt.

Außer den Strahlensätzen ist der Ähnlichkeitssatz w, w am wichtigsten.

Die Anwendung dieses Satzes auf

das rechtwinklige Dreieck — **den Kreis**

führt auf den

Kathetensatz ⟷ **Sekantentangentensatz**
und — und
Höhensatz ⟷ **Halbsehnensatz.**

Die Aufgabe der Konstruktion der mittleren Proportionalen ist in neuer Form dieselbe wie die der Verwandlung eines Rechtecks in ein Quadrat.

Die vierte Proportionale, die schon früher durch Rechnung gefunden wurde, kann jetzt auf zeichnerischem Wege ermittelt werden.

Für ähnliche Vielecke gelten die Sätze über

Umfang: $\frac{u}{u'} = \frac{a}{a'}$ und Inhalt: $\frac{F}{F'} = \frac{a^2}{a'^2}$

XIX. Senkrechte Eintafelprojektion.

59. Abschnitt:

Darstellung von Punkt, Strecke und Gerade im Raume.

Stelle mit Wurstspeilern und Korken (für Geraden und Punkte) Modelle entsprechend den Bildern und Aufgaben dieses Abschnittes her.

1. a) Dächer bestehen im allgemeinen aus schräg liegenden Dreiecken, Vierecken usw., d. h. Dächer sind von Ebenen begrenzt, die sich von den Oberkanten der Seitenmauern aus erheben. Diese Kanten heißen Traufkanten, weil an ihnen die Regentraufen entlanglaufen. Wenn alle Seitenmauern bis zu derselben Höhe emporgeführt sind, so liegen alle Traufkanten in einer waagerechten Ebene. **Traufkanten**

b) Die Schnittgerade zweier benachbarter Dachebenen heißt Grat oder Kehle, je nachdem sie von einer ausspringenden oder einspringenden Ecke aufsteigt, alle anderen heißen First. **Grat** **Kehle** **First**

Dachformen

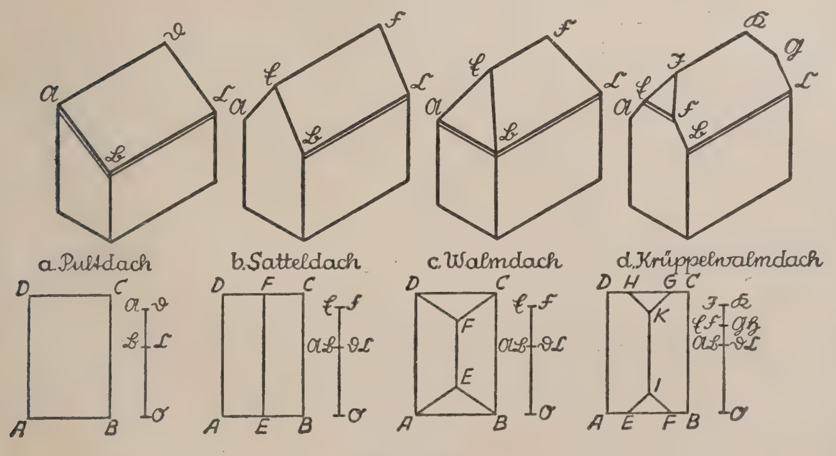


Bild 342.

Bild 342 zeigt die einfachsten Dachformen. Beschreibe sie. Vergleiche auch Bild 161, S. 87 und Bild 347, S. 234.

Dachausmittlung c) Die Aufgabe der Dachausmittlung besteht darin, die Gestalt und Größe der einzelnen Dachflächen über einem gegebenen Traufkantenvieleck zu bestimmen.

2. Körperformen und räumliche Gebilde können wir nicht unmittelbar in der Zeichenebene darstellen, denn diese hat nur **zwei** Ausdehnungen, während die Körper **drei** besitzen. Man muß deshalb besondere Verfahren entwickeln, um räumliche Gebilde durch eine Zeichnung wiederzugeben. Dabei soll es sich aber nicht um eine Abbildung schlechthin handeln, wie sie etwa die Photographie liefert, sondern wir müssen fordern, daß sich aus unserer Zeichnung alle Maße des dargestellten Gegenstandes leicht ersehen lassen. Diese Eigenschaft erst macht es möglich, daß wir über Gestalt **und** Größe des Körpers etwas aussagen können, wenn die Zeichnung vorliegt. Diese Forderung erhebt der Handwerker und Ingenieur, wenn er nach einer Zeichnung etwas „bauen“ soll.

Grundriß 3. Um eine solche technisch brauchbare Zeichnung anzufertigen, stellen wir uns einen **Grundriß** her. Um z. B. das einfache Pultdach (Bild 342 a) auf die waagerecht gedachte Zeichenebene abzubilden, fällt man von den Eckpunkten 𝔄[1]), 𝔅, ℭ, 𝔇 des Daches die Lote auf die Grundebene, wie es Bild 343 a zeigt. Die Fußpunkte A, B, C, D heißen die **Projektionen** der Raumpunkte 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, die Strecken $\overline{\mathfrak{A}A}$, $\overline{\mathfrak{B}B}$, $\overline{\mathfrak{C}C}$, $\overline{\mathfrak{D}D}$ die **projizierenden Lote**. Das Viereck ABCD in der Zeichenebene heißt die **Projektion** des Vierecks 𝔄𝔅ℭ𝔇 im Raume, ebenso die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ... die Projektionen von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ ...

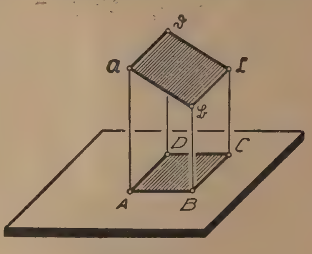


Bild 343 a.

Da die **Projektionsstrahlen** alle **senkrecht** auf der Bildtafel stehen und man bei dieser Abbildungsart nur **eine** Zeichenebene verwendet, wird diese Darstellung **senkrechte Eintafelprojektion** genannt.

Senkrechte Eintafelprojektion

Die Punkte im Raume werden mit deutschen Buchstaben, ihre Projektionsbilder mit den entsprechenden lateinischen Buchstaben bezeichnet.

4. Auf dem Zeichenblatt liegt somit das Bildviereck ABCD vor (Bild 343 b). Aus dieser Zeichnung ist aber noch nicht zu ersehen, **wie hoch** die zugehörigen Raumpunkte über der Zeichenebene liegen. Deshalb wird neben die Projektionsfigur eine senkrechte Gerade, der **Höhenmaßstab**, gelegt, auf dem man die

Höhenmaßstab

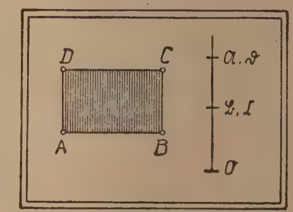


Bild 343 b.

[1]) Gelesen „deutsch 𝔄“.

Höhen der einzelnen Punkte über der Zeichenebene angibt. Von einem Nullpunkt 0 trägt man die Höhen nach oben ab und bezeichnet den so gewonnenen Endpunkt mit dem Buchstaben des Raumpunktes; es ist also in Bild 343 b $\overline{0\mathfrak{A}}$ die Höhe $\overline{A\mathfrak{A}}$ (Bild 343 a) des Raumpunktes $\mathfrak{A}$ über der Zeichentafel. Wie ist die „Höhe" eines unter der Zeichenebene gelegenen Punktes anzugeben?

So läßt sich zu jedem Punkt der Zeichnung mit Hilfe des Höhenmaßstabes der zugehörige Raumpunkt finden: nach der Zeichnung läßt sich der körperliche Gegenstand „bauen".

Entsprechend sind die Grundrisse der Dächer von Bild 342 a, b, c, d entstanden. Beschreibe im einzelnen ihre Entstehung und die gegenseitige Lage der Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ ... im Raume an Hand der Höhenmaßstäbe.

5. Was stellt die Zeichnung Bild 344 dar? Beschreibe die Lage der einzelnen Punkte im Raume.

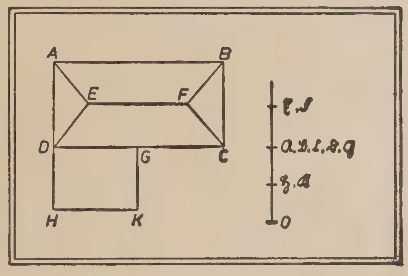


Bild 344.

6. Liegt $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ parallel zur Zeichentafel (Bild 343 a), so ist $\mathfrak{B}\mathfrak{C}CB$ ein Rechteck, also $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = \overline{BC}$. Daraus folgt der

Abbildungssätze

1. Satz: Eine zur Zeichenebene parallele Strecke bildet sich in wahrer Größe ab.

Dagegen zeigen in Bild 343 a die Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und ihre Projektion $\overline{AB}$ den

2. Satz: Jede zur Zeichenebene geneigte Strecke bildet sich verkürzt ab.

Wahre Strecken-Größe

7. Im Bild 130, S. 76 haben wir durch „Umklappen" die Höhe eines Hauses ermittelt. Nach demselben Verfahren können wir aus dem Projektionsbild $\overline{AB}$ und den Höhenangaben von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die wahre Größe $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ der Strecke im Raume gewinnen: es wird das Projektionstrapez $\mathfrak{A}AB\mathfrak{B}$ in die Zeichenebene umgeklappt. Dabei bleiben A und B in Ruhe, während $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich auf Kreisen um A bzw. B mit den Halbmessern $\overline{A\mathfrak{A}}$ und $\overline{B\mathfrak{B}}$ bewegen (Bild 345). $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beschreiben Viertelkreise; die Endlage in der Zeichenebene wird mit $(\mathfrak{A})$[1] und $(\mathfrak{B})$ bezeichnet.

Umklappung

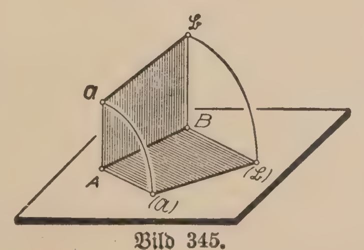


Bild 345.

[1] Lies: $\mathfrak{A}$ umgelegt.

Bild 346 zeigt die Konstruktion in der Zeichenebene selbst. Das umgeklappte Trapez $A(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})B$ ist bei A und B rechtwinklig; die Seiten $\overline{A(\mathfrak{A})} = \overline{0\mathfrak{A}}$ und $\overline{B(\mathfrak{B})} = \overline{0\mathfrak{B}}$ werden aus dem Höhenmaßstab abgegriffen. $\overline{(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})}$ ist die gesuchte wahre Größe der Raumstrecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$.

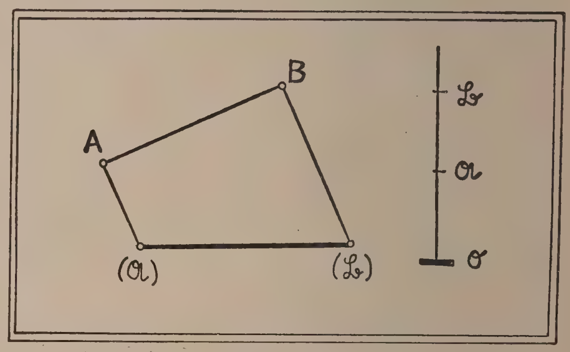


Bild 346.

Prüfe die Genauigkeit deiner Zeichnung durch die Berechnung der Länge der Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ nach (vgl. 44. Abschn.).

Zahlenbeispiel: Gib auf dem Zeichenbrett A die Standgrößen $x_1 = 8\,\text{cm}$, $y_1 = 5\,\text{cm}$ und $\mathfrak{A}$ die Höhe $\overline{\mathfrak{A}A} = z_1 = 3\,\text{cm}$ an, und bestimme ebenso $\mathfrak{B}$ durch $x_2 = 20\,\text{cm}$, $y_2 = 8\,\text{cm}$, $z_2 = 7\,\text{cm}$.

Entfernung

8. Bestimme nach Nr. 7 die Entfernung folgender Punkte:
a) $\mathfrak{C}$ (5, 15, 18); $\mathfrak{D}$ (13, 6, 8) b) $\mathfrak{E}$ (8, 5, 3); $\mathfrak{F}$ (20, 8, −7)
c) $\mathfrak{G}$ (8, 5, −3); $\mathfrak{H}$ (20, 8, −7). d) $\mathfrak{L}$ (2, 3, 0); $\mathfrak{M}$ (0, 2, 3).

9. Zwischen einem Haus und einem Mast wird eine Antenne gespannt (Bild 347). Der eine Endpunkt $\mathfrak{A}$ liegt 3 m, der andere $\mathfrak{B}$ 9 m hoch. Die auf dem Erdboden nachgemessene Länge $\overline{AB}$ beträgt 8 m. Wieviel Meter Draht sind für die Antenne erforderlich? (Zuleitung und Durchhang unberücksichtigt.)

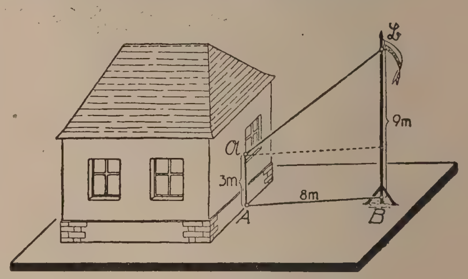


Bild 347.

a) Führe die Zeichnung im Maßstab 1 : 100 aus und bestimme die wahre Größe durch Ausmessung. b) Prüfe das Ergebnis rechnerisch nach.

Spurpunkt

Neigungswinkel

10. Die Projektion einer Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ (Bild 348) ist die Strecke $\overline{AB}$, die der Geraden $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ die Gerade AB; $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ trifft die Zeichentafel im Spurpunkt S; der (spitze) Winkel α, den $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ mit ihrer Projektion AB bildet, heißt Neigungswinkel der Geraden. S ist sein Scheitel.

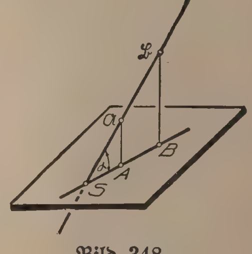


Bild 348.

11. Aufg.: Es ist der Spurpunkt S und der Neigungswinkel α der durch zwei Punkte 𝔄 und 𝔅 bestimmten Geraden zu finden.

Lösung: Man klappe 𝔄𝔅 in die Zeichenebene um (vergl. Nr. 7); Bild 349 veranschaulicht dies. **Gerade durch 2 Punkte**

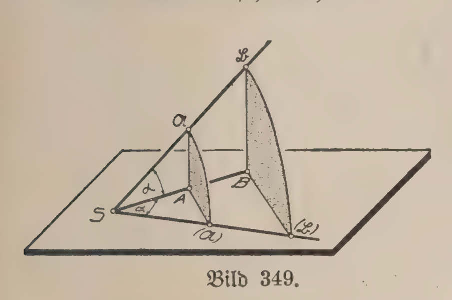


Bild 349.

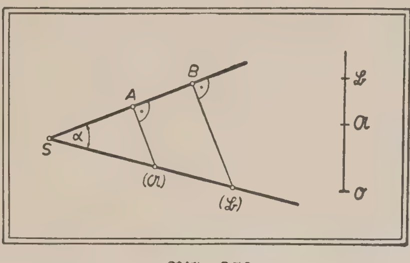


Bild 350.

Bild 350 zeigt die Konstruktion in senkrechter Eintafelprojektion. Es ist $\overline{A(\mathfrak{A})} = \overline{0\mathfrak{A}}$, $\overline{B(\mathfrak{B})} = \overline{0\mathfrak{B}}$, $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90^0$. Der Spurpunkt S ist der Schnittpunkt der beiden Geraden AB und (𝔄)(𝔅). $\sphericalangle AS(\mathfrak{A})$ liefert die wahre Größe des Neigungswinkels α.

Zahlenbeispiel: 𝔄 (4; 5; 6); 𝔅 (12; 7; 9).

12. Bestimme ebenso nach Nr. 11 Spurpunkt S und Neigungswinkel α der Geraden **a)** ℭ𝔇; **b)** 𝔈𝔉; **c)** 𝔊ℌ; **d)** 𝔏𝔐 (s. Nr. 8).

13. Was ist über Spurpunkt, Neigungswinkel und Größe der Projektion **a)** einer zur Tafel senkrechten Geraden, **b)** einer Geraden (bzw. einer Strecke darauf), die zur Tafel parallel läuft, auszusagen? (Bild 351) **c)** Gib solche Geraden in Bild 344 an. **Sonderfälle**

14. Länge der Körperdiagonalen eines Würfels und Neigungswinkel gegen die Grundfläche sind zu bestimmen (Bild 274). Fertige zwei Zeichnungen an mit den Kantenlängen $a_1 = 6$ cm und $a_2 = 10$ cm. Vergleiche in beiden Fällen die Winkel.

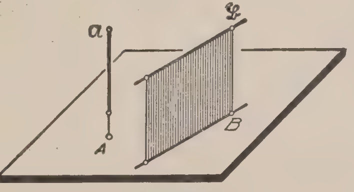


Bild 351.

15. Löse die Aufgabe für einen Quader.

16. Es ist in einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkante a und der Höhe h die Länge der Seitenkanten und ihr Neigungswinkel gegen die Grundfläche zu bestimmen.
a) $a = 6$ cm, $h = 8$ cm; **b)** $a = 5$ cm, $h = 6$ cm.

17. Bestimme die Höhe einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundseite a, wenn ihre Seitenkanten unter dem Neigungswinkel α ansteigen. **a)** $a = 4$ cm, $\alpha = 60^0$, **b)** $a = 5$ cm, $\alpha = 45^0$.
c) Ein aus drei quadratischen Zeltbahnen aufgebautes Dreierzelt (Dreiertipi) hat die Form einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide mit der Grundkante $a = 1{,}30$ m und der Höhe $h = 1{,}20$ m. Bestimme den Neigungswinkel der Seitenkante. **Dreiertipi**

Zwei Geraden **18.** Wie erkennt man in der senkrechten Eintafelprojektion die drei verschiedenen Lagen, die zwei Geraden im Raume zueinander einnehmen können (Bd. I)?

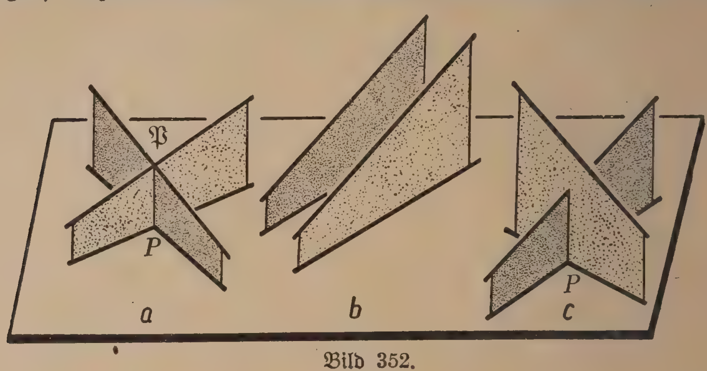


Bild 352.

a) Schneiden sich die beiden Geraden in 𝔓, so schneiden sich auch ihre Projektionen (in P) und es ist $\overline{\mathfrak{P}P}$ die Höhe des Schnittpunktes (Bild 352a).
b) Sind die beiden Geraden parallel, so sind auch die Projektionen parallel, und die Umklappungen ergeben für beide Geraden den g l e i c h e n Neigungswinkel (Bild 352b).
c) Sind die beiden Geraden windschief, so liefern zwar ihre Projektionen einen scheinbaren Schnittpunkt P (Deckstelle); errichtet man jedoch darin die Senkrechte, so liefert diese mit den beiden Geraden zwei Schnittpunkte in verschiedenen Höhen (Bild 352c).

19. Ist die Parallelität der Projektionen allein schon ein Kennzeichen für die Parallelität der Geraden? Vgl. Bild 353.

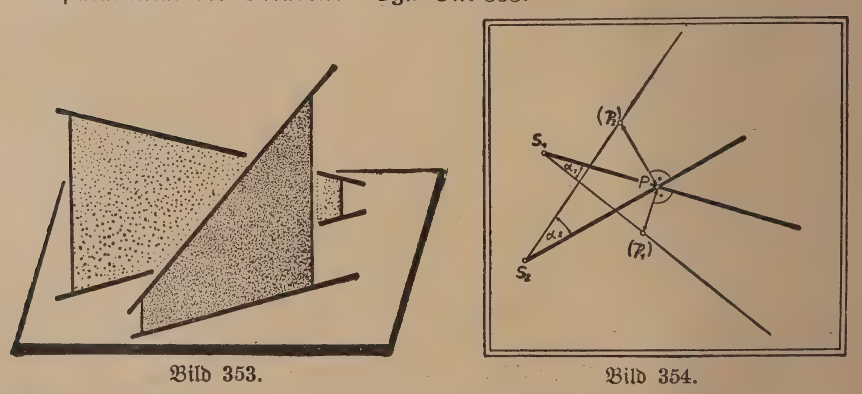


Bild 353. Bild 354.

20. Von zwei Geraden sind gegeben: Projektionen, Spurpunkte und Neigungswinkel. Es soll festgestellt werden, ob sie sich schneiden. — Beschreibe nach Bild 354 den Gang der Untersuchung. Ergebnis?

60. Abschnitt: Darstellung der Ebene.

Spurgerade

1. Eine Ebene kann zum Zeichenblatt parallel oder geneigt sein (S. 47, Nr. 22). Da wir uns die Ebenen unbegrenzt vorstellen, schneidet eine geneigte Ebene das Zeichenblatt stets in einer Geraden. Diese Gerade heißt die Spurgerade s der Ebene (Bild 355).

Auf der Spurgeraden liegen alle Punkte, die sowohl in der Ebene als auch in dem Zeichenblatt liegen, die also die „Höhe Null" haben. Die Spurgerade wird mit s oder mit 0 ··· 0 bezeichnet.

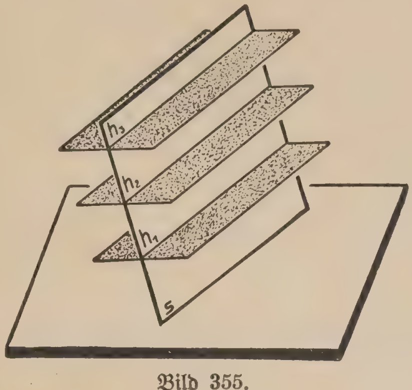
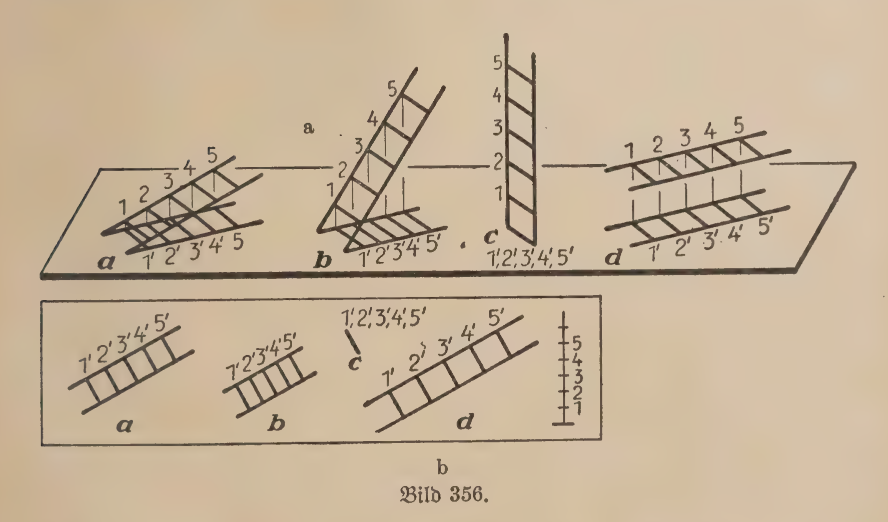


Bild 355.

Höhenlinien

2. Alle Punkte der Ebene, die dieselbe Höhe über dem Zeichenblatte haben, liegen auf einer Parallelen zur Spurgeraden. Eine solche Gerade heißt Höhenlinie der Ebene (Bild 355).

Eine anschauliche Vorstellung einer Ebene mit Höhenlinien gibt die Leiter (Bild 356 a, b). Ihre Sprossen stellen Höhenlinien in gleichen Abständen dar.



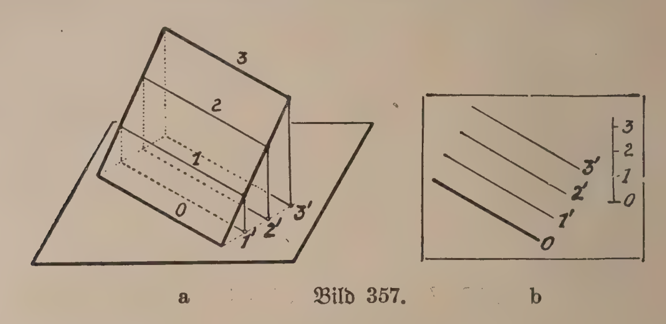
a

b

Bild 356.

3. Was kann man aussagen a) über die Höhenlinienprojektionen bei senkrechter Leiter, b) über die Spurgerade bei waagerechter Leiter?

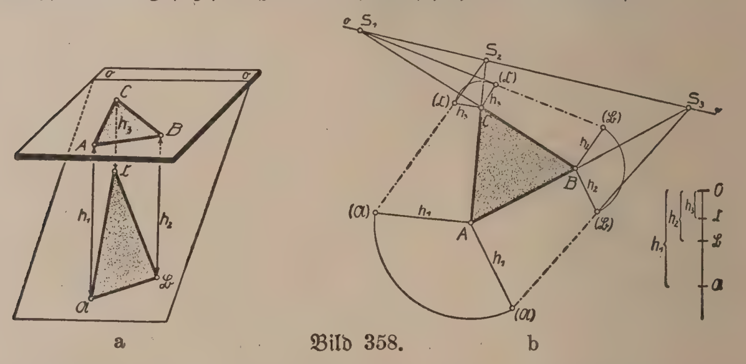
Jede Ebene ist schon durch irgend zwei Höhenlinien festgelegt, doch zeichnet man der größeren Anschaulichkeit halber meistens mehrere Höhenlinien 0, 1, 2, 3 . . . in gleichen Abständen. Ihre Projektionen 0, 1′, 2′, 3′ . . . haben dann ebenfalls gleiche Abstände (Bild 357 a, b).



a Bild 357. b

Bei gleichbleibendem Höhenmaßstab steht eine Ebene um so steiler gegen die Zeichentafel, je enger die Höhenlinienprojektionen 0, 1′, 2′, 3′ . . . zusammenrücken.

Bergbau **4.** Eine erzhaltige Gesteinsschicht ist an drei Stellen A, B, C in den Tiefen h_1, h_2, h_3 erbohrt (Bild 358 a). Die Schichtlinien (Höhenlinien) der Gesteinsschicht sind in den Geländeplan einzuzeichnen. Dabei wird üblicherweise zunächst vorausgesetzt, daß die Gesteinsschicht eben verläuft.

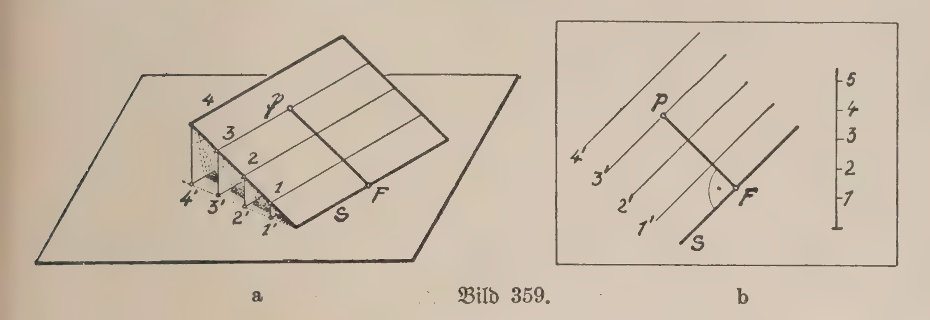


a Bild 358. b

Bild 358 a zeigt die drei Bohrlöcher A, B, C. Sind 𝔄, 𝔅, ℭ die senkrecht darunter in den Tiefen h_1, h_2, h_3 erbohrten Schichtpunkte, so ist die Spur 0 · · · 0 der Ebene 𝔄𝔅ℭ mit der waagerechten Zeichenebene zu ermitteln. Die gesuchten Schichtlinien sind die Parallelen zu dieser Spur.

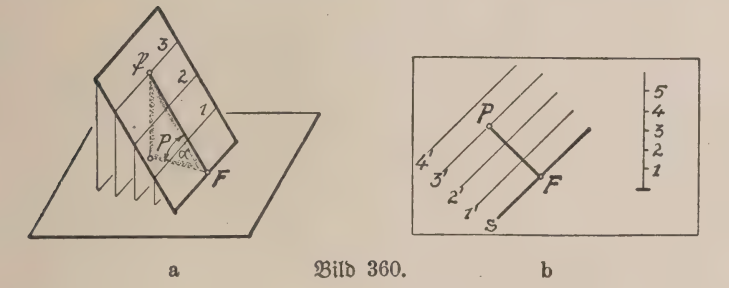
Bild 358 b zeigt die Lösung. Die drei Geraden 𝔄𝔅, 𝔄ℭ, 𝔅ℭ sind umgeklappt (vgl. Bild 345 und 346) und ihre Spurpunkte S_1, S_2, S_3 gefunden. Diese Spurpunkte liegen auf der gesuchten Spur 0 · · · 0. Wieviel sind nötig? — Genauigkeitsprobe der Zeichnung!

5. Eine auf eine geneigte Ebene gelegte Kugel rollt auf ihr längs einer Geraden hinunter, die zu allen Höhenlinien senkrecht läuft. Eine solche Gerade PF heißt daher Fallinie der Ebene (Bild 359a, b). **Fallinie**



a Bild 359. b

6. Das rechtwinklige Dreieck PPF, das die Fallinie $\overline{\mathfrak{P}F}$ zur Hypotenuse (Spannseite) und ihre Projektion $\overline{PF}$ sowie das Projektionslot $\overline{\mathfrak{P}P}$ zu **Stützdreieck**



a Bild 360. b

Katheten (Lotseiten) hat, wird Stützdreieck der Ebene genannt (Bild 360a), denn unter die Ebene geschoben, stützt es diese. Aus Bild 361 folgt:

Alle Stützdreiecke einer Ebene sind ähnlich.

Die Fallinien einer Ebene sind untereinander parallel. Wie verlaufen ihre Projektionen zueinander und wie zu den Projektionen der Höhenlinien?

Die Holme der Leitern in Bild 356 stellen die Fallinien ihrer Ebenen dar.

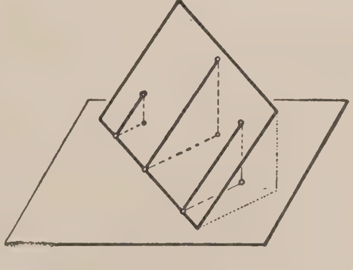


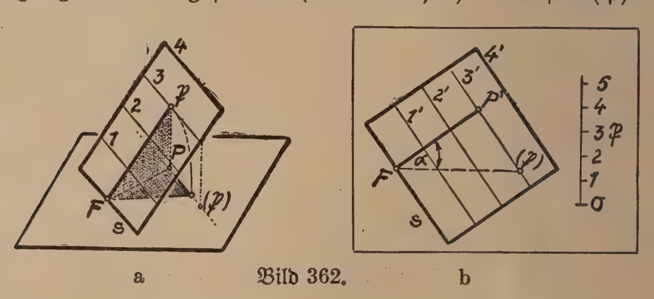
Bild 361.

7. Wo liegen alle Punkte einer Ebene, für die die Stützdreiecke kongruent sind?

Neigungswinkel 8. $\sphericalangle\ \alpha = \sphericalangle$ 𝔓FP im Stützdreieck heißt Neigungswinkel der Ebene gegen die Zeichenebene (Bild 360a), seine beiden Schenkel stehen senkrecht auf s. Vgl. dazu S. 47, Nr. 22.

Der Neigungswinkel einer Ebene ist der Neigungswinkel ihrer Fallinien.

Die Ebene sei durch die Projektionen ihrer Höhenlinien festgelegt. Durch Umklappung irgendeines Stützdreiecks in die Zeichenebene wird der Neigungswinkel α gefunden (Bild 362a, b). Es ist $\overline{P(\mathfrak{P})} = \overline{0\mathfrak{P}}$.



a Bild 362. b

9. Die Cheopspyramide bei Gizeh hat eine quadratische Grundfläche; die vier Seitenebenen bilden den gleichen Neigungswinkel $\alpha = 52^0$ gegen die Grundebene. Wie groß ist der Neigungswinkel der Pyramidenkanten?

10. Ein Quader hat die Grundkanten a und b und die Höhe h. Durch je eine Grundkante und die gegenüberliegende obere Kante sind die Ebenen zu legen und die Neigungswinkel dieser Ebenen zu bestimmen.
a) a = 4 cm, b = 7 cm, h = 8 cm; b) a = 5 cm, b = 6 cm, h = 7 cm.

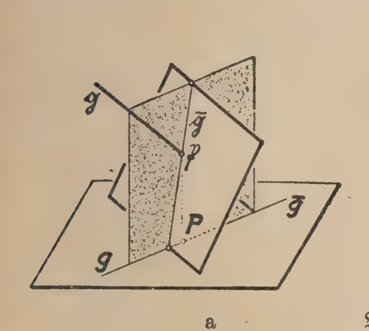
11. Eine gerade quadratische Pyramide hat die Grundkante a und die Höhe h. In die Seitenflächen sind die Projektionen der Höhenlinien in 2 cm, 4 cm, 6 cm, 8 cm Höhe einzuzeichnen. Der Neigungswinkel einer Seitenfläche gegen die Grundfläche ist zu konstruieren.
a) a = 5 cm, h = 10 cm; b) a = 6 cm, h = 10 cm.

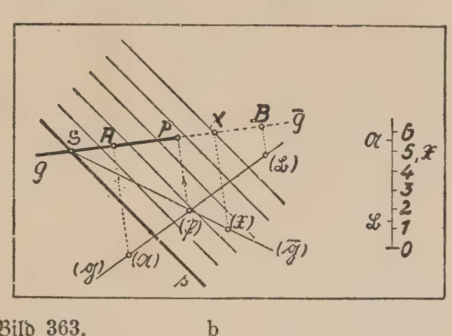
Ebene und Gerade 12. Eine Ebene wird im allgemeinen von einer Geraden in einem Punkte durchstoßen. — Wann nicht?

Die Ebene sei durch ihre Spurgerade s und eine Reihe von Höhenlinien gegeben, die Gerade g sei durch zwei Punkte 𝔄 und 𝔅 festgelegt.

Durchstoßpunkt Zeichne den Durchstoßpunkt (Bild 363a, b). Er muß an der Stelle liegen, wo die Gerade und die Ebene über der Projektion g die gleiche Höhe haben (Bild 363a). Die Umklappung (g) der Geraden wird wie früher konstruiert (vgl. S. 233, Nr. 7). Die lotrechte Ebene durch g schneidet aus der Ebene eine Gerade $\bar{g}$, die ebenfalls umgeklappt wird; die Umklappung ($\bar{g}$) geht durch den Spurpunkt S (Schnittpunkt von g und $\bar{g}$, Bild 363b) und die Umlegung (𝔛) irgend eines Punktes 𝔛 der Ebene, der in Bild 363 b auf der Höhenlinie 5 gewählt ist. Die

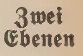
Umlegung (𝔓) des gesuchten Durchstoßpunktes 𝔓 ergibt sich als Schnittpunkt von (g) und ($\bar{g}$); durch Wiederaufrichten der umgelegten Geraden werden 𝔓 und die Höhe $h = \overline{P(𝔓)}$ des Durchstoßpunktes 𝔓 gewonnen.



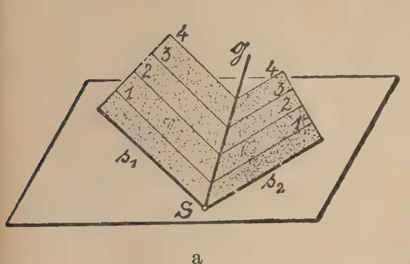


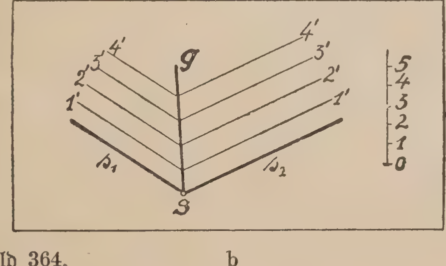
a Bild 363. b

13. Zwei nicht parallele Ebenen schneiden sich in einer Geraden.


Zwei Ebenen

a) In jedem Punkte dieser Schnittgeraden müssen beide Ebenen gleiche Höhe über der Tafel haben; wir erhalten daher Punkte der Schnittgeraden, indem wir die Höhenlinienpaare gleicher Höhe miteinander zum Schnitt bringen (Bild 364 a, b). Alle diese Schnittpunkte müssen auf einer Geraden liegen (Zeichenprobe!). Stets geht die Schnittgerade durch den Schnittpunkt der beiden Spuren.



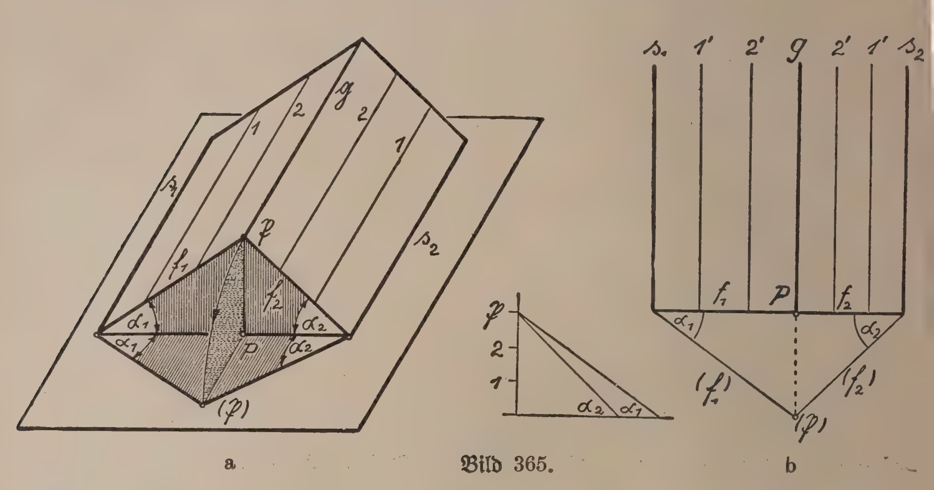


a Bild 364. b

b) Wenn die beiden Ebenen den gleichen Neigungswinkel gegen die Zeichenebene bilden, so erscheinen die Projektionen der Höhenlinien gleicher Höhe in gleichen Abständen, so daß die Schnittgeradenprojektion g die Winkelhalbierende der beiden Spuren s_1 und s_2 ist. In diesem Sonderfalle läßt sich also die Schnittgerade ohne Benutzung der Höhenlinien zeichnen.

c) Sind die Höhenlinien der beiden Ebenen parallel, so kann man zueinandergehörende Höhenlinienpaare nicht mehr miteinander zum Schnitt bringen. Bild 365 a, b zeigt zwei solche Ebenen und die Bestimmung

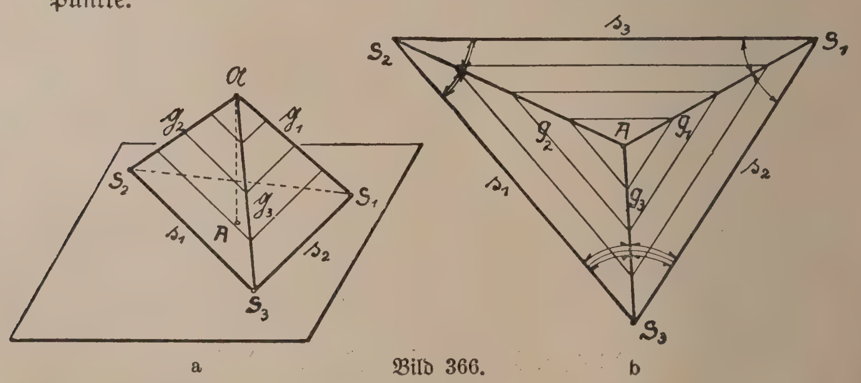
ihrer Schnittgeraden, wenn s_1, s_2, α_1 und α_2 oder die Höhenlinien 1′ und 2′ gegeben sind; zwei in einer Ebene liegende Stützdreiecke der Ebenen sind umgeklappt. Beschreibe die Konstruktion.



a Bild 365. b

Pyramide **14.** Bild 366 a, b zeigt eine dreiseitige Pyramide, deren Seitenflächen gleiche Neigung gegen die Grundfläche haben. Wegen der gleichen Neigung erscheinen die Seitenkanten der Pyramide als Winkelhalbierende der Grundkanten. Die drei Seitenkanten laufen in der Pyramidenspitze 𝔄, ihre Projektionen, die drei Winkelhalbierenden, in A zusammen. Daraus erhalten wir noch einmal den bekannten Satz:

Die drei Winkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.



a Bild 366. b

15. Die Schnittgerade zweier nicht benachbarter Seitenflächen einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide ist zu konstruieren.

61. Abschnitt: Anwendungen.

A. Dachausmittlungen.

1. Die waagerechte Ebene, in der die Traufkanten (vgl. S. 231, Nr. 1 a) liegen, wählen wir als Zeichenebene (Bild 367). In dieser Zeichenebene stellen die Traufkanten die Spuren unserer Dachebenen dar. Wir wenden uns nun der Aufgabe der Dachausmittlung (Nr. 1c, S. 232) zu. **Traufkanten**

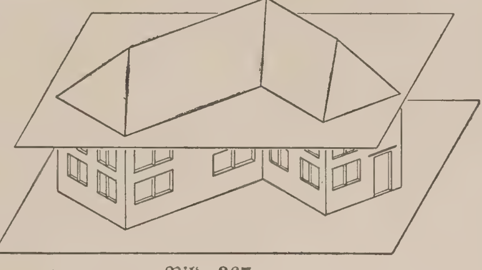


Bild 367.

2. Eine solche Dachausmittlung ist in Bild 368 durchgeführt. Dabei sollen alle Dachflächen den gleichen Neigungswinkel haben; die Schnittgerade je zweier Dachebenen erscheint daher in der Projektion als die Winkelhalbierende ihrer Spuren (vgl. S. 241, Nr. 13 b). In den Eckpunkten A, B, C, D, E, F des Traufkantenvielecks lassen sich also zunächst die Grate bei A, B, D, E, F und die Kehle bei C als Winkelhalbierende zeichnen. Die beiden Grate in A und B treffen sich im Punkte X; die Dachfläche I

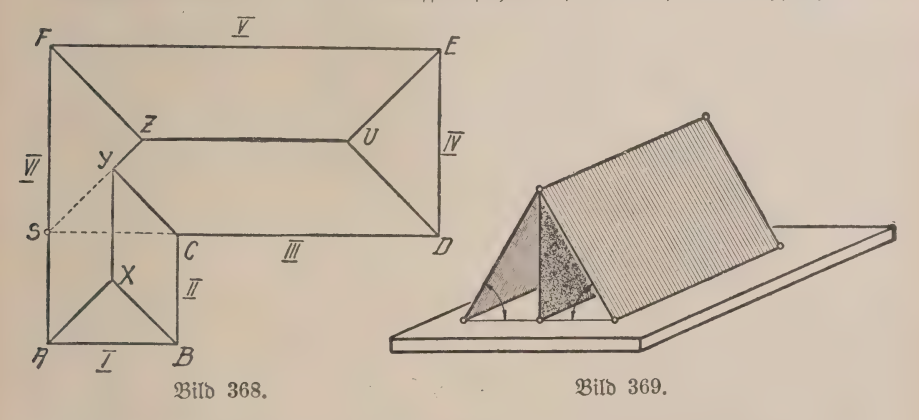


Bild 368.

Bild 369.

ist somit das Dreieck mit der Projektion AXB. Von X aus läuft die Schnittgerade XY der Dachebenen II und VI; da die Spuren BC und AF dieser Ebenen II und VI parallel sind, ist diese Schnittgerade die Mittelparallele zwischen BC und AF. Begründe diesen Sachverhalt aus der symmetrischen Lage nach Bild 369. Von Y aus läuft der First $\overline{YZ}$, in dem sich die Dachebenen III und VI schneiden (Z liegt höher als Y, weil $\overline{DE}$ ($= \overline{SF}$) $> \overline{AB}$ und der Neigungswinkel stets der gleiche ist). Die Gerade YZ geht daher durch den Schnittpunkt S der Spuren CD und

AF dieser Ebenen. Von Z aus läuft schließlich die Schnittgerade der Ebenen III und V als Mittelparallele zu den Spuren CD und EF. Sie trifft in U die beiden von E und D aufsteigenden Grate.

Der gesamte Dachfirst besteht also aus dem Streckenzug XYZU. Die Firste $\overline{XY}$ und $\overline{ZU}$ sind waagerecht, während der First $\overline{YZ}$ von Y nach Z ansteigt (sein Spurpunkt ist S).

3. Über dem in Bild 370 gegebenen Traufkantenvieleck ist ein Dach zu errichten, das überall gleiche Neigung hat. (Für deine Zeichnung: $\overline{AB} = 3$ cm, $\overline{AH} = \overline{GF} = \overline{ED} = 4$ cm, $\overline{GH} = 6$ cm.)

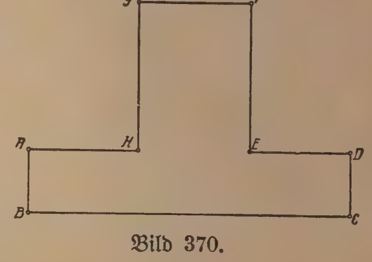


Bild 370.

Verschiedene Dachneigung

4. Haben die Dächer nicht überall gleiche Neigung, so erscheinen die Projektionen der Grate oder Kehlen nicht mehr als Winkelhalbierende. Um dann die Bilder der Grate oder Kehlen zu finden, müssen Höhenlinien gleicher Höhe gezeichnet und miteinander zum Schnitt gebracht werden, vgl. S. 241, Nr. 13a. Nach diesem Verfahren ist in Bild 371 ein Dach über dem Traufenvieleck ABCDEF errichtet, bei dem die Dachebenen I und IV den Neigungswinkel α, die übrigen Ebenen II, III, V, VI den Neigungswinkel β besitzen.

Dazu sind am Höhenmaßstab in der Nebenfigur diejenigen beiden Abstände d_1 und d_2 gezeichnet, die zu den Ebenen mit der Neigung α und β in der Höhe h gehören. Danach sind die Höhenlinien in der Höhe h im Hauptbild bekannt: bei den Ebenen I und IV (Neigungswinkel α) haben sie den Abstand d_1 von den Spuren AB bzw. DE, bei den anderen Ebenen II, III, V, VI den Abstand d_2 von den zugehörigen Spuren. Je zwei Höhenlinien in benachbarten Dachebenen schneiden sich in einem Punkte des Grates bzw. der Kehle.

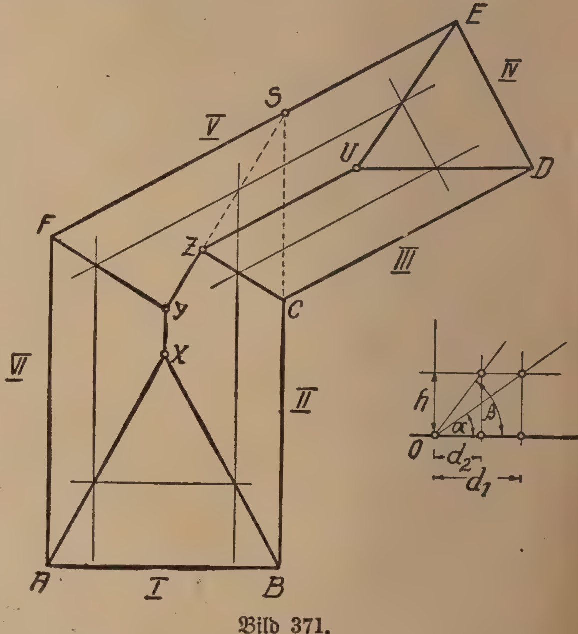


Bild 371.

Nach Einzeichnung der Grate und der Kehle wird die ganze Dachausmittlung wie in Bild 368 gewonnen. Zur Prüfung des Firstes YZ dient sein Spurpunkt S, der als Schnittpunkt der Spuren BC und EF gewonnen wird.

Wähle für die Aufg. Nr. 5···7 einen geeigneten Maßstab.

5. Über dem in Bild 372 gegebenen Traufkantenvieleck ist ein Dach zu zeichnen, a) gleicher Neigung, b) dessen Dachebenen I und V den Neigungswinkel $\alpha = 20^0$, II, IV, VI, VIII den Neigungswinkel $\beta = 32^0$, III und VII den Neigungswinkel $\gamma = 45^0$ besitzen.

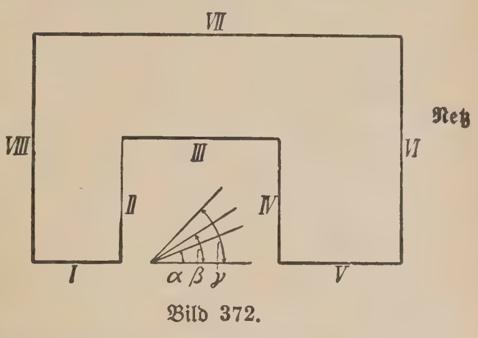


Bild 372.

Netz

6. Alle Dachteile erscheinen in der Projektion verkürzt. Um das Dach aus Pappe ausschneiden und zusammenkleben zu können, muß man das **Netz des Daches** zeichnen, d. h. alle Dachflächen müssen in wahrer Größe konstruiert werden. Dazu wird die Ebene um ihre Spur in die Tafel umgeklappt; beschreibe diesen Vorgang an Bild 373. Bei der Drehung bewegt sich jeder Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene auf einem Kreis, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt F der Fallinie und dessen Halbmesser die Spannseite $\overline{\mathfrak{P}F}$ des Stützdreiecks ist.

Bei der Drehung bleiben alle Punkte auf der Drehachse (Spur) in Ruhe, insbesondere also auch der Spurpunkt S der Geraden $\mathfrak{PQ}$. Nach erfolgter Umlegung müssen sich daher die Geraden PQ und $(\mathfrak{P})(\mathfrak{Q})$ in S schneiden (Bild 374).

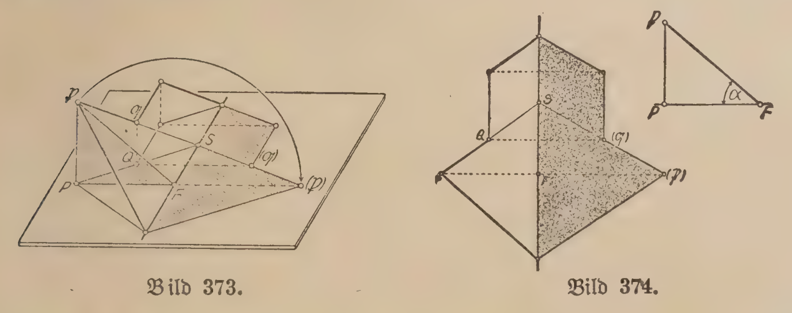


Bild 373. Bild 374.

7. Stelle ein Modell des Daches her **a)** nach Bild 342a, **b)** nach Bild 342b, **c)** nach Bild 342c.

8. Ebenso **a)** nach Bild 344, **b)** nach Bild 370 ($\alpha = 30^0$), **c)** nach Bild 372 (α, β, γ nach Nr. 5).

Die Dachkonstruktion in Bild 368 konnte ohne Höhenmaßstab durchgeführt werden, weil alle Dachebenen gleiche Neigung hatten.

9. Dagegen kann die wahre Größe der Dachflächen ohne Kenntnis des Neigungswinkels nicht bestimmt werden. Warum?

Baue ein Modell des Daches in Bild 368 für den Neigungswinkel 45°.

Dachgröße **10.** Bestimme nach der Tabelle Grate, Kehlen, Firste und die wahre Größe der einzelnen Dachflächen; schneide sie aus und setze sie zum Dach zusammen

a) nach Bild 342a,

b) nach Bild 342b.

	$\overline{AB}$	$\overline{BC}$	$\overline{\mathfrak{A}A}$	$\overline{\mathfrak{B}B}$	$\overline{EF}$	$\overline{\mathfrak{E}E}$
Pultdach	8 m	12 m	3 m	4 m	—	—
Satteldach	8 m	12 m	5 m	5 m	12 m	7 m
Walmdach	8 m	15 m	5 m	5 m	11 m	8 m

c) nach Bild 342c, **d)** nach Bild 341d.

11. Wie groß ist der umbaute Raum eines Hauses **a)** nach Bild 342 a **b)** nach Bild 342b? Maße siehe Nr. 10.

B. Böschungen.

12. Wird von einem Punkt A aus auf eine waagerechte Ebene trockener Sand geschüttet, so bildet sich ein gerader Kreiskegel, der ähnlich wachsend schließlich mit seiner Spitze den Punkt A erreicht. Dieser Kegel heißt Böschungskegel des Punktes A. Bild 375 zeigt:

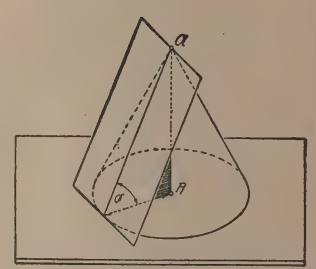
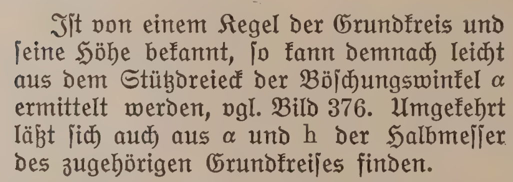


Bild 375.

Das Stützdreieck jeder Berührungsebene ist der halbe Achsenschnitt des Böschungskegels.



Böschungswinkel Ist von einem Kegel der Grundkreis und seine Höhe bekannt, so kann demnach leicht aus dem Stützdreieck der Böschungswinkel α ermittelt werden, vgl. Bild 376. Umgekehrt läßt sich auch aus α und h der Halbmesser des zugehörigen Grundkreises finden.

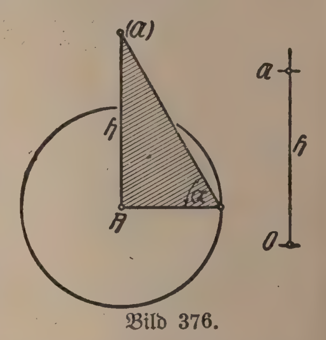


Bild 376.

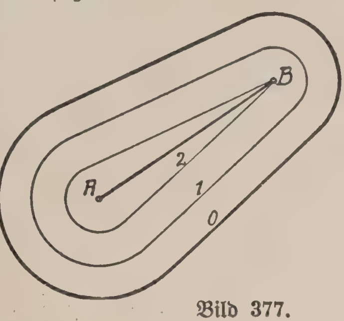
Liegt der abzuböschende Punkt unterhalb der Grundebene, so tritt an die Stelle der Aufschüttung ein kegelförmiger Einschnitttrichter, dessen Abmessungen genau wie im Falle des Auftrags (Aufschüttung) gewonnen werden.

13. Bild 377 zeigt den Böschungskörper, der durch Abböschung einer Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ entsteht, wobei A, B und der Böschungswinkel α gegeben sind.

Diesen Böschungskörper kann man dadurch entstehen lassen, daß man von allen Punkten der Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ so lange Sand herunterrieseln läßt, bis der Haufen überall bis an die Strecke $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ heranreicht. Der so ent-

stehende Böschungskörper läßt sich aus Teilen von zwei Kegelmänteln und zwei Ebenen zusammensetzen.

Um ihn zu zeichnen, sind die beiden gegebenen Punkte A und B abgeböscht, indem ihre Böschungskreise mit Hilfe der am Höhenmaßstab angezeichneten Böschungsdreiecke gezeichnet sind. Die gemeinsamen Kreistangenten sind die Spuren der beiden Ebenen, die zusammen mit den beiden Kegelmänteln den Böschungskörper begrenzen. In Bild 377 sind auch noch die Höhenlinien 1 und 2 eingezeichnet.



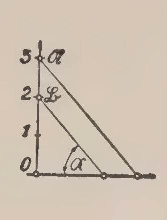


Bild 377.

Der Böschungskörper ist symmetrisch zu der lotrechten Ebene durch die Gerade AB.

14. Wie ändert sich der Böschungskörper, wenn $\overline{AB}$ waagerecht liegt?
Führe die Zeichnung aus. Wieviel Symmetrieebenen hat dieser besondere Böschungskörper?

15. Wie ändert sich der Böschungskörper, wenn der eine Endpunkt der (geneigten) Strecke in der Tafelebene liegt? Zeichne!

16. Warum läßt sich der Böschungskörper einer Strecke nicht konstruieren, wenn ihr Neigungswinkel größer als der Böschungswinkel α ist? (vgl. Nr. 13).
Die Böschungskreise haben keine gemeinsamen Tangenten mehr! Warum?

Bei allen Erdarbeiten, bei Wegführungen durch natürliches Gelände, beim Bau der Reichsautobahnen usw. müssen Böschungen aufgeschüttet oder eingeschnitten werden. Böschungsaufgaben hat der Bauingenieur bei der Planung von Straßen- oder Kanalbauten zu lösen. **Erdarbeiten**

17. Auf einen waagerechten Dammweg der Höhe 3 soll ein rechteckiger Weg ABCD geführt werden (Bild 378). Die Abböschung des Weges (Böschungswinkel α) ist zu konstruieren. Gegeben sind die vier Wegpunkte A, B, C, D.

Anl.: Die Punkte A und B des Weges haben die Höhe Null, die Punkte C und D die Höhe 3. Die beiden von 0 bis 3 ansteigenden Wegkanten $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ sind abzuböschen. Dazu werden die Böschungskreise um C und D gezeichnet; ihr Halbmesser ist aus dem Böschungsdreieck am Höhenmaßstab abzugreifen (vgl. Bild 376). Die von A und B an die Böschungskreise nach außen gezogenen Tangenten sind die Spuren der gesuchten Böschungsebenen. Diese Ebenen müssen nun mit der abfallenden Böschungsebene des Dammes zum Schnitt gebracht werden (vgl. S. 241, Nr. 13). Da die zugehörigen Spuren sich in X und Y schneiden,

sind XC und YD die Bilder der gesuchten Schnittgeraden. Durch Einzeichnung der Höhenlinien 1 und 2 ist die Form des entstandenen Erdkörpers in Bild 378 veranschaulicht.

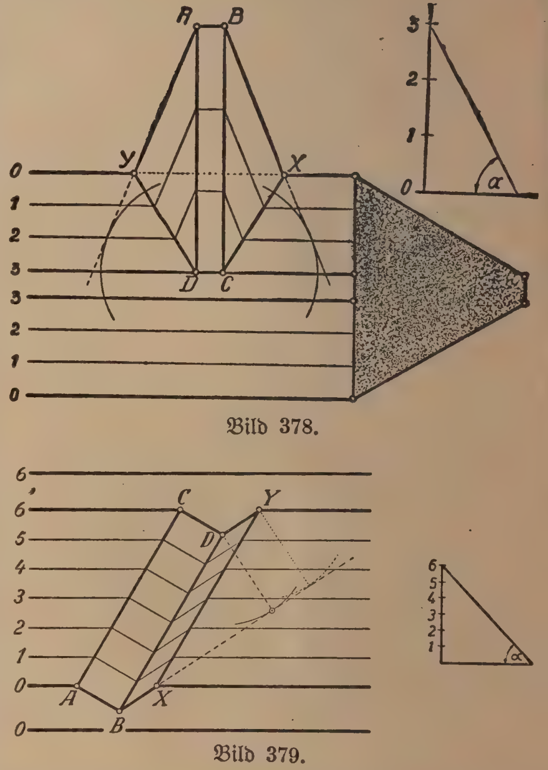


Bild 378.

Bild 379.

18. Auf einen geneigten Abhang der Höhe 6 ist ein Weg geführt, der mit einer Kante $\overline{AC}$ in der Hangebene verläuft (Bild 379). Die Wegpunkte A und B haben die Höhe Null, die Wegpunkte C, D, Y die Höhe 6; längs $\overline{AB}$ und längs $\overline{CD}$ knickt der Weg. In Bild 379 ist die Abböschung (Böschungswinkel α) durchkonstruiert, indem der Streckenzug BDY, wie in Nr. 17, abgeböscht ist. Die Böschungsebene von BD schneidet die Hangebene in der Geraden XY. Alle Konstruktionsangaben sowie der Verlauf der Höhenlinien sind in Bild 379 mit eingezeichnet.

19. In einem eben ansteigenden Gelände soll eine waagerechte rechteckige Plattform in der Höhe 6 eingebaut werden (Bild 380). Die Abböschung unter dem Winkel α ist zu konstruieren. Für deine Zeichnung: $\alpha = 45^0$.

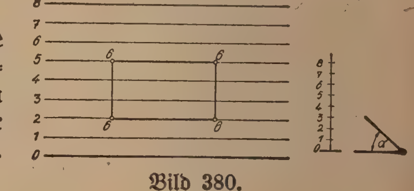


Bild 380.

C. Karten- und Geländekonstruktionen.

20. Ein natürliches Gelände (Terrain, topographische Fläche) weicht mehr oder weniger von der waagerecht vorgestellten Grundebene ab. Um diese krumme Fläche, die wir als Oberfläche des natürlichen Erdreichs vor uns haben, in unserer Zeichenebene zu kennzeichnen, stellen wir sie, wie früher

die Ebenen, durch **Höhenlinien** dar. Wenn weder Höhlenbildungen noch überhängende Wände vorkommen, trifft jede auf der Grundtafel errichtete Senkrechte die Geländefläche nur einmal; die Höhenlinien des Geländes, die im allgemeinen krumm sind, liegen daher so, daß die Projektionen von Höhenlinien verschiedener Höhe einander nicht schneiden. Als Schichthöhen (Abstände der durch die Höhenlinien bestimmten Ebenen) sind von der Landesaufnahme 20; 10; 5; 2,5; 1,25 m festgesetzt worden. Die verschiedenen Schichthöhen werden durch verschiedene Strichtechnik unterschieden (Erläuterung am Rande jedes Meßtischblattes). **Schichthöhe** **Meßtischblatt**

Ein anschauliches Bild von der Entstehung der Schichtlinien gewinnt man, wenn man sich einen Bergkörper als Insel vorstellt und das umgebende Meer von seinem Normalstande Null allmählich auf die Höhen 1, 2, 3 ... ansteigen läßt. Die jeweiligen Uferlinien sind die Schichtlinien der Höhen 1, 2, 3 ...

In Bild 381 a, b, c sind auf diese Weise eine Halbkugel, ein Kegel und ein Spindelkörper dargestellt. (Ein Spindelkörper, wie er bei der **Geschoßspitze** auftritt, entsteht durch Umdrehung eines Kreisbogens um seine Sehne.) **Geschoßspitze**

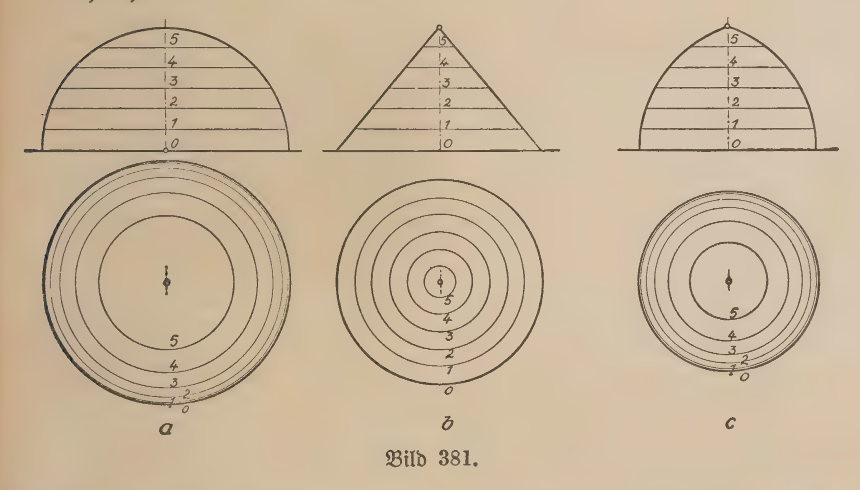
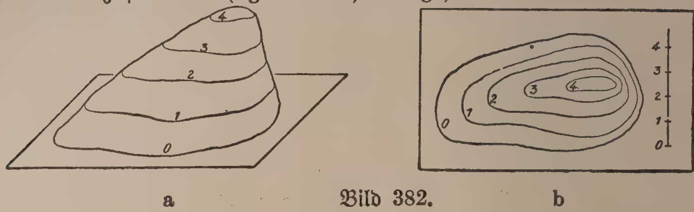


Bild 381.

21. Jedes Gelände läßt sich seiner Höhenausdehnung nach durch Einzeichnen der Höhenlinien kennzeichnen. Dieses Verfahren wird bei Landkarten größeren Maßstabes (Grundkarte 1 : 5000 und Meßtischblatt 1 : 25000) benutzt (vgl. Bd. I). An den Höhenlinien stehen am Rande die Höhenziffern; ein eigentlicher Höhenmaßstab ist daher überflüssig. Die Darstellungsart mit Hilfe von Höhenziffern nennt man „**bezifferten Grundriß**“ oder „**kotierte Projektion**“[1]. Bild 382 a, b zeigt die anschauliche **Kartendarstellung**

[1] Kote = Maßzahl.

Skizze eines Berges mit Höhenlinien und seine Darstellung auf einer Karte. Je steiler der Berg ist, um so enger liegen die Projektionen der Höhenlinien zusammen (vgl. Bild I, Anlage).



a Bild 382. b

Quer-profil **22.** Geländeschnitt (Querprofil). Läßt sich zwischen den Punkten A und B der Karte Bild 383 eine Blinkverbindung herstellen?

Anl.: Man denkt sich durch die Verbindungsgerade AB senkrecht zur Zeichenebene die Hilfsebene gelegt und in die Zeichenebene umgeklappt (Bild 383). In den Schnittpunkten C, D, E, F, G, H, J von AB mit den Höhenlinien werden die Senkrechten errichtet, die entsprechenden Höhen auf den Höhenlinien abgelesen und in einem geeigneten Maßstab (in dem Bild: 2 m ≙ 1 mm) darauf abgetragen und die so erhaltenen umgeklappten Endpunkte (A), (C), (D), (E), (F), (G), (H), (J), (B) durch einen Linienzug verbunden. Dabei fallen (G) und G zusammen, da sie der Höhenlinie 0 angehören. Die geradlinige Verbindung zwischen den um-

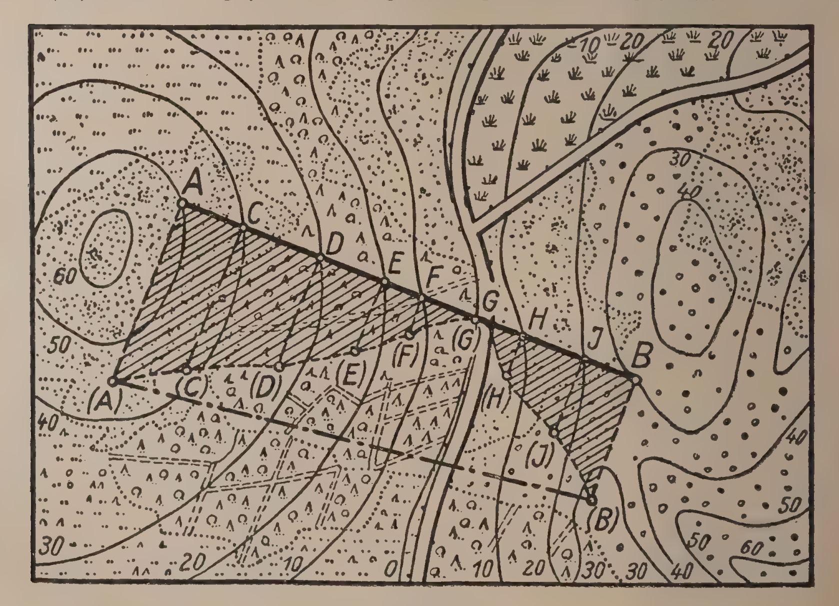


Bild 383.

geklappten Punkten (A) und (B) (im Bild strichpunktiert) zeigt, daß zwischen A und B eine Blinkverbindung hergestellt werden kann, da man von A aus über eine Senke hinweg nach B sieht. (Ändert sich dieses Ergebnis bei anderem Höhenmaßstab?)

Geländeschnitt

Derartige Geländeschnitte werden im Tief- und Bergbau sowie bei militärischen Aufgaben gebraucht. Soll z. B. festgestellt werden, ob ein Ziel hinter einem steilen Hang beschossen werden kann, so wird der Geländeschnitt durch die Gerade Geschütz—Ziel gezeichnet (Bild 384) und mit den in gleichem Maßstab gezeichneten Geschoßbahnen verglichen (schußtoter Raum!).

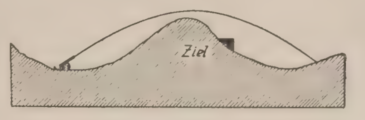


Bild 384.

Schußtoter Raum

23. Längsprofil. Mit Hilfe der Schichtlinien kann das Fallen und Steigen eines Weges ohne Rücksicht auf die Krümmung seiner Linienführung dargestellt werden. Dazu sind in der Kartenskizze Bild 385 hinreichend kleine Stücke I′ II′, II′ III′, III′ IV′ usw. des Weges von A-Dorf nach B-Dorf mit dem Stechzirkel auf eine waagerechte Achse übertragen[1] (zweckmäßig werden die Punkte I′, II′ ... auf Höhenlinien gewählt) und die zugehörigen

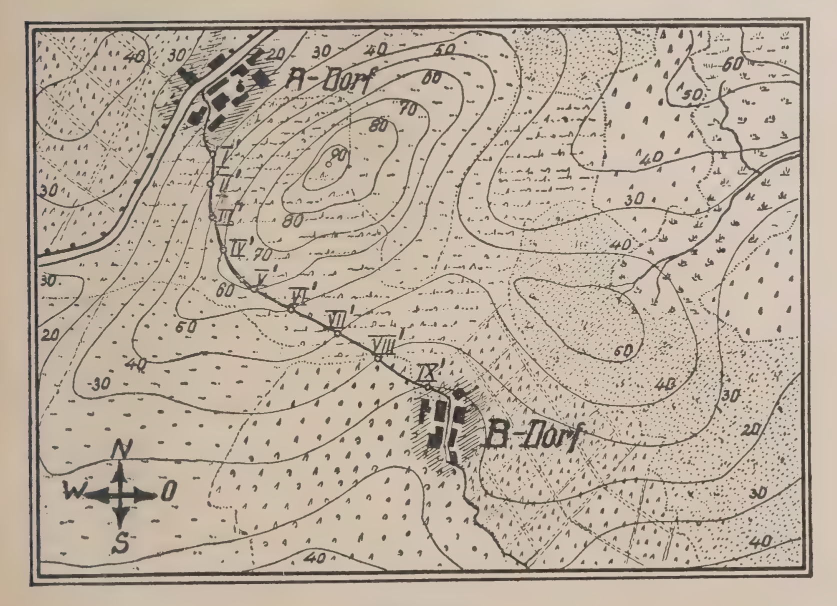


Bild 385.

[1] Diese Konstruktion heißt zeichnerische Rektifikation des Kurvenbogens A ··· B. Man denkt sich diesen Kurvenbogen aus kleinen geradlinigen Stücken zusammengesetzt, die man auf die Achse überträgt. Für das Ausmessen benutzt man Kartenmesser (Bd. I).

Höhen senkrecht aufgetragen. Das gesuchte Längenprofil des Weges A-Dorf ··· B-Dorf wird durch Verbindung der Endpunkte durch einen Kurvenzug gewonnen (Bild 386). (In der Zeichnung sind die Höhen in 10fachem Maßstab aufgetragen; Überhöhung!)

Derartige Längenprofile spielen bei der Planung von Bahn- und Wegebauten eine große Rolle.

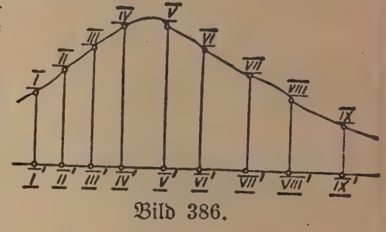


Bild 386.

24. a) Erläutere nach dem Ausschnitt des Meßtischblattes (Anlage) den Verlauf und Anstieg der Zahnradbahn vom Kartenrand bis zum Nationaldenkmal.
b) Miß die Luftlinienentfernung vom Kartenrand bis zum Endpunkt der Bahn und bestimme (durch Zeichnung oder Rechnung) den Anstieg in der Luftlinie.
c) Bestimme die wahre Länge der Bahnstrecke in a) und daraus
d) durch Rechnung den wirklichen und den prozentualen Anstieg und
e) durch Zeichnung den mittleren Anstiegswinkel.

25. Lies auf dem Kartenausschnitt die ungefähren Himmelsrichtungen des stärksten und des geringsten Gefälles des Rochusberges (südostwärts von Bingen) ab.

Geländeprofil

26. a) Lege durch das Gelände auf dem Kartenausschnitt ein Profil vom Hügelgrab über das Nationaldenkmal zum Rhein.
b) Kann vom Nationaldenkmal aus in dieser Richtung die Eisenbahn am rechten Rheinufer eingesehen werden?

XX. Kreisberechnung.

62. Abschnitt: Die Zahl π.

A. Kreisinhalt.

Trapezverfahren

1. a) Jede geradlinig begrenzte Figur kann in ein Quadrat verwandelt werden. (Vgl. S. 177.) Damit ist ihr Inhalt leicht angebbar. Beim Kreis versagt dieses Verfahren der Umwandlung in ein Quadrat. Um seinen Flächeninhalt F zu bestimmen, wenden wir das Trapezverfahren (S. 156) an. Zu diesem Zwecke berechnen wir den Flächeninhalt eines Kreisausschnittes mit dem Mittelpunktswinkel 30° (Bild 387), d. h. von einem Zwölftel des Kreises.

b) Wir zerlegen den schraffierten Teil des Kreises ($O\,B_4\,P_4\,P_0$) in vier Streifen von gleicher Breite und ziehen die zugehörigen Sehnen $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ und in P_1 und P_3 die Tangenten. Die Figur zeigt, daß der schraffierte Teil des Kreises größer ist als die Summe F_i der vier Sehnentrapeze (f_1, f_2, f_3, f_4) aber kleiner als die Summe F_a der beiden

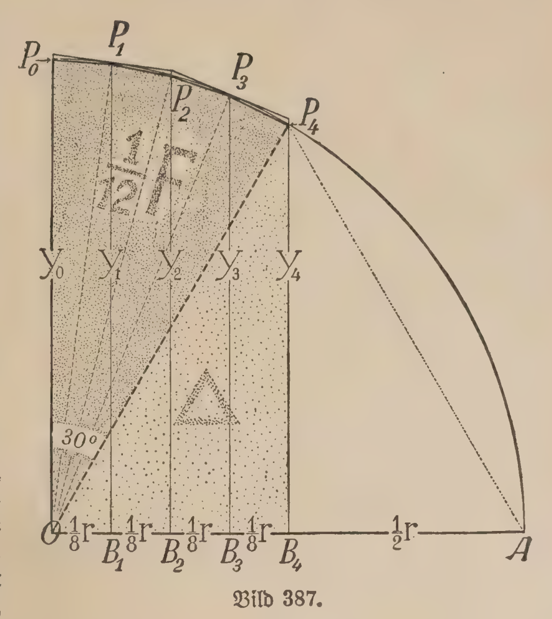


Bild 387.

Tangententrapeze (F_1, F_3). Damit ist dieser Flächeninhalt zwischen zwei Grenzen eingeschlossen (Bild 387 und 388). Ersetzen wir daher in erster Annäherung die schraffierte Fläche durch eine dieser beiden (F_i oder F_a), so ist sicher der Fehler nicht größer als der **Unterschied jener beiden Flächen.** Der Fehler wird um so kleiner, je größer man die Anzahl der (gleichbreiten) Streifen wählt.

2. a) Es ist $\sphericalangle P_0OP_4 = 30^0$, der Kreisausschnitt P_0OP_4 hat also den Flächeninhalt $\frac{1}{12}$ F des Kreises, die Streifenbreite beträgt $\frac{1}{8}$ r. Bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks OB_4P_4 mit $\triangle$, so ergibt sich für $\frac{1}{12}$ F.

1. der zu kleine Näherungswert: Sehnentrapezsumme minus Dreieck

$$F_i - \triangle < \frac{1}{12} F,$$

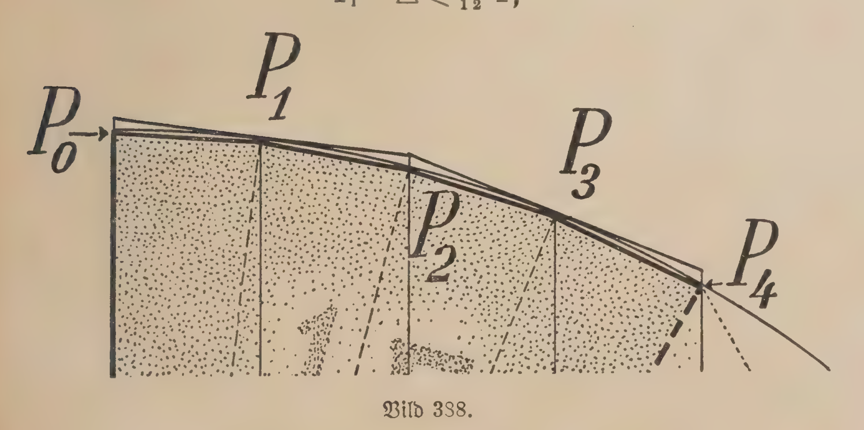


Bild 388.

2. der zu große Näherungswert: Tangententrapezsumme minus Dreieck

$$F_a - \triangle > \frac{1}{12} F.$$

b) Es ist:

$$y_0 = r.$$

Die Werte y_1, y_2, y_3 ergeben sich als Katheten aus rechtwinkligen Dreiecken;

aus $\triangle\, OB_1P_1$ ergibt sich: $y_1 = \sqrt{r^2 - (\frac{1}{8} r)^2} = \frac{r}{8}\sqrt{63}$,

aus $\triangle\, OB_2P_2$ ergibt sich: $y_2 = \sqrt{r^2 - (\frac{2}{8} r)^2} = \frac{r}{8}\sqrt{60}$,

aus $\triangle\, OB_3P_3$ ergibt sich: $y_3 = \sqrt{r^2 - (\frac{3}{8} r)^2} = \frac{r}{8}\sqrt{55}$,

aus $\triangle\, OAP_4$ ergibt sich: $y_4 = \frac{1}{2} r\sqrt{3}$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck).

c) Nach der Formel $F = m \cdot h$ für den Inhalt eines Trapezes folgt:

$$f_1 = \frac{y_0 + y_1}{2} \cdot \frac{r}{8},\quad f_2 = \frac{y_1 + y_2}{2} \cdot \frac{r}{8},\qquad F_1 = y_1 \cdot 2 \cdot \frac{r}{8},$$

$$f_3 = \frac{y_2 + y_3}{2} \cdot \frac{r}{8},\quad f_4 = \frac{y_3 + y_4}{2} \cdot \frac{r}{8},\qquad F_3 = y_3 \cdot 2 \cdot \frac{r}{8};$$

$$F_i = f_1 + f_2 + f_3 + f_4,\qquad F_a = F_1 + F_3,$$

$$F_i = \frac{r}{8}\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + y_3 + \frac{y_4}{2}\right),\qquad F_a = \frac{r}{4}(y_1 + y_3),$$

$$F_i = \frac{r}{8}\left(\frac{r}{2} + \frac{r}{8}\sqrt{63} + \frac{r}{8}\sqrt{60} + \frac{r}{8}\sqrt{55} + \frac{r}{4}\sqrt{3}\right), F_a = \frac{r}{4}\left(\frac{r}{8}\sqrt{63} + \frac{r}{8}\sqrt{55}\right)$$

$$F_i = \frac{r^2}{64}(4 + \sqrt{63} + \sqrt{60} + \sqrt{55} + 2\sqrt{3}).\qquad F_a = \frac{r^2}{32}(\sqrt{63} + \sqrt{55}).$$

Mit Benutzung der Tafel 1 folgt:

$$F_i = \frac{r^2}{64}(4 + 7{,}937 + 7{,}746 + 7{,}416 + 3{,}464),\quad F_a = \frac{r^2}{32}(7{,}937 + 7{,}416),$$

$$F_i = \frac{r^2}{64} \cdot 30{,}563.\qquad F_a = \frac{r^2}{64} \cdot 30{,}706.$$

Dann ist:

$$F_i - \triangle = \frac{r^2}{64} \cdot 30{,}563 - \frac{r^2}{8}\sqrt{3};\qquad F_a - \triangle = \frac{r^2}{64} \cdot 30{,}706 - \frac{r^2}{8}\sqrt{3};$$

Da aber: $F_i - \triangle < \frac{1}{12} F < F_a - \triangle$ (s. S. 253) ist,

so folgt: $\frac{r^2}{64} \cdot 16{,}707 < \frac{1}{12} F < \frac{r^2}{64} \cdot 16{,}850.$

Nach Multiplikation mit 12 ergibt sich

$$\tfrac{3}{16} r^2 \cdot 16{,}707 < F < \tfrac{3}{16} r^2 \cdot 16{,}850.$$

Demnach ist $3{,}133\, r^2 < F < 3{,}159\, r^2$,

d. h. der Flächeninhalt eines Kreises mit dem Halbmesser r liegt zwischen den beiden Werten $3{,}133\, r^2$ und $3{,}159\, r^2$.

d) Wählt man 10 Streifen statt der vier, so ergibt sich die Ungleichheit

$$3{,}140\, r^2 < F < 3{,}143\, r^2.$$

Da diese Zahlen in den beiden ersten Zehnerbruchstellen übereinstimmen, kann man als Näherungswert

$$\boxed{F = 3{,}14 \cdot r^2}$$

setzen, d. h. der Kreisinhalt ist gleich dem Quadrat des Radius multipliziert mit einer Zahl, die etwas größer als 3,14 ist. Allgemein bezeichnet man diese Zahl mit π[1]), so daß gilt:

Die Fläche eines Kreises vom Halbmesser r ist

$$\boxed{F = \pi r^2}$$

3. Genauere Berechnungen haben ergeben: $\pi = 3{,}1415926 \ldots$ Zuweilen wird π Ludolfsche Zahl genannt; Ludolf van Ceulen gelang es um 1600, π auf 35 Stellen genau zu berechnen, während Altertum und Mittelalter sie nur bis auf ein oder zwei Zehnerbruchstellen genau kannten. 1874 hat ein Engländer π auf über 700 Stellen berechnet; diese Genauigkeit hat keinen praktischen Wert. **Ludolfsche Zahl**

Es gibt für π Merkverse[2]), in denen die Anzahl der Buchstaben der einzelnen Worte die betreffende Ziffer angibt; z. B.

Merkvers

3 1 4 1
„Wie o dies π
5 9 2 6 5 3
Macht ernstlich so vielen viele Müh!
5 8 9 7 9
Lernt immerhin Jünglinge (Mägdelein) leichte Verselein,
3 2 3 8 4 6 2 6 4
Wie so zum Beispiel dies dürfte zu merken sein."

B. Kreisumfang.

4. Miß Umfang u und Durchmesser 2r eines Bierfilzes, einer Nudelwalze, der Drehscheibe eines Telefons, eines Rades (z. B. an einem Fahrrad), teile jedesmal die Maßzahl des Umfangs durch diejenige des Durchmessers und trage die Ergebnisse deiner Messungen und Berechnungen in eine Tabelle ein. Bestimme dann das arithmetische Mittel der Rechenergebnisse.

5. a) Bild 389 zeigt ein dem Kreise einbeschriebenes regelmäßiges n-Eck (hier $n = 8$). Das Bestimmungsdreieck A_1A_2M hat zur Grundlinie s_n und als Höhe ϱ_n, sein Flächeninhalt ist $\frac{1}{2} s_n \cdot \varrho_n$, daher der Flächeninhalt des Vielecks $F_n = n \cdot \frac{1}{2} s_n \cdot \varrho_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot s_n \cdot \varrho_n = \frac{1}{2} u_n \cdot \varrho_n$.

b) Verdoppelt man fortgesetzt die Seitenzahl der Vielecke, so nähern sie sich nach Gestalt, Umfang und Inhalt mehr und mehr dem Kreise als Grenze. Die Umfänge u_n nähern sich dem Kreisumfange u, die Flächeninhalte F_n dem Kreisinhalt F, und ϱ_n nähert sich r, so daß sich ergibt: $F = \frac{1}{2} u \cdot r = \pi r^2$.
Daraus folgt $u = 2\pi r$.

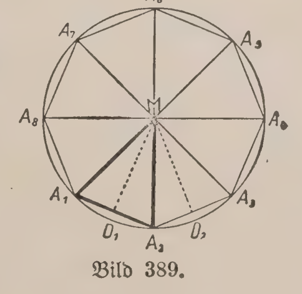


Bild 389.

Der Umfang eines Kreises vom Halbmesser r ist

$$\boxed{u = 2\pi r}$$

[1]) Die Bezeichnung π taucht zum ersten Male um 1700 auf. Euler benutzte sie seit 1736. Durch ihn ist sie endgültig in die Wissenschaft eingeführt worden.

[2]) Der angegebene Merkvers stammt von Weinmeister (1878).

c) Demnach gilt: **Für jeden Kreis ist das Verhältnis des Umfangs zum Durchmesser gleich derselben Zahl: $\frac{u}{d} = \frac{u}{2r} = \pi$.**

6. Der schon von Archimedes gefundene sehr gute Näherungswert von $\pi \approx 3\frac{1}{7}$ gestattet es, den Umfang des Kreises vom Durchmesser d leicht zu zeichnen.

Näherungskonstruktion

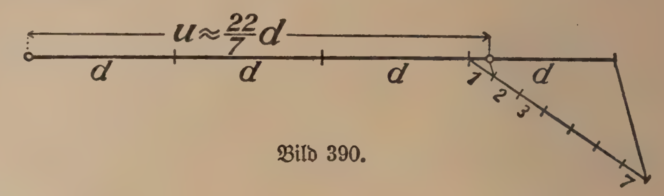


Bild 390.

C. Kreisbogen und Kreisausschnitt.

7. Da der Kreisbogen (b) und der Kreisausschnitt (S_k), die zum Mittelpunktswinkel α gehören, proportional mit α wachsen, ergeben sich folgende Verhältnisgleichungen:

$$\frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360} \quad \text{und} \quad \frac{S_k}{\pi r^2} = \frac{\alpha}{360},$$

daraus folgt:

$$\boxed{\textbf{Kreisbogen } b = \frac{\pi r \cdot \alpha}{180}} \quad \text{und} \quad \boxed{\textbf{Kreisausschnitt } S_k = \frac{\pi r^2 \cdot \alpha}{360}}$$

63. Abschnitt: Übungen und Anwendungen.

Vorbem.: Benutze für die folgenden Kreisaufgaben möglichst die Tafel 1 (Beilage im Buch), sonst Tafel 2.

Beispiele: Es ist Kreisumfang u und -inhalt F zu berechnen für:

a) $r = 23$ cm:
$u = 2\pi \cdot 23$ cm
$u = 144{,}5$ cm
$F = \pi \cdot 23^2$ cm²
$F = 1662$ cm² } (Tafel 1)

b) $r = 0{,}23$ cm:
$u = 2\pi \cdot 0{,}23$ cm
$u = 1{,}445$ cm
$F = \pi \cdot 0{,}23^2$ cm²
$F = 0{,}1662$ cm² } (Tafel 1 u. Überschlag)

c) $r = 57{,}28$ cm:
$u = 2\pi \cdot 57{,}28$ cm
$u = 359{,}9$ cm
$F = \pi \cdot 57{,}28^2$ cm²
$F = \pi \cdot 3281$ cm²
$F = 10310$ cm²
$10 : 11 = 8 : x$, $x \approx 9$ } (Tafel 2)

1. Wie groß sind Umfang und Inhalt eines Kreises, wenn **a)** r = 1 m, **b)** 3 cm, **c)** 4,2 dm, **d)** 5,34 m, **e)** 7,435 km ist?

2. Der Umfang eines Kreises ist **a)** u = 2 m, **b)** 5,5 cm, **c)** 3,14 dm, **d)** 88,76 m. Wie groß sind Halbmesser und Flächeninhalt?

3. Der Inhalt eines Kreises ist **a)** F = 1 qm, **b)** 3,5 qdm, **c)** 85,75 qcm. Wie groß sind Halbmesser und Umfang?

Rechenstab und Kreisberechnung.

4. Noch leichter löst man solche Aufgaben mit Hilfe des Rechenstabes, da sich für π besondere Marken auf den Skalen A, B, C, D befinden. Praktischerweise setzt man $u = \pi \cdot d$ und hat dann nur π mit d zu multiplizieren.

Beispiele: 1. Mit einer Einstellung ergibt sich so, **Umfang**

a) für d = 12 cm, daß u = 37,7 cm b) für d = 18,5 dm, daß u = 58,1 dm
c) für d = 2,64 m, daß u = 8,30 m ist.
Mit Durchschieben:
d) für d = 36,3 km, daß u = 114 km e) für d = 4,6 cm, daß u = 14,45 cm
f) für d = 6,68 mm, daß u = 21,0 mm g) für d = 0,77 m, daß u = 2,42 m
h) für d = 9,23 dm, daß u = 29,0 dm i) für d = 87,5 cm, daß u = 275 cm ist.

2. Auch bei der Inhaltsberechnung benutzt man in der Praxis meistens die Formel mit dem Durchmesser d, also **Inhalt**

$$F = \frac{\pi}{4} d^2.$$

Man hat ein für allemal die feste Zahl $\sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128$ (Probe auf dem Rechenstab!) ausgerechnet und ihr die Marke C auf dem Stabe gegeben. Man braucht dann nur die Marke C auf der Leiter C über die Zahl 1 auf Leiter D einzustellen (Bild 391) und kann dann F unmittelbar auf Leiter A über dem Durchmesser d auf Leiter C mit Hilfe des Läufers ablesen. **Marke C**

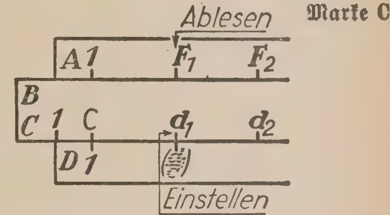


Bild 391.

Für d = 18 cm ergibt sich auf diese Weise F = 254 cm². Zur Begründung des Verfahrens: $\left[F = \frac{\pi}{4} d^2 = d^2 : \frac{4}{\pi} = d^2 : \sqrt{\frac{4}{\pi}}^2 = \left(d : \sqrt{\frac{4}{\pi}}\right)^2 = (d : c)^2\right]$

5. Prüfe auf diese Art die folgenden Ergebnisse der Beispiele 4a) bis i) nach.
F = a) 113,1 cm² b) 269 dm² c) 5,47 m² d) 1035 km²
e) 16,6 cm² f) 35,1 mm² g) 0,466 m² h) 66,9 dm² i) 5950 cm²
Entsprechend läßt sich leicht d (oder r) ermitteln, wenn u oder F gegeben ist. Übe dies an den Beispielen Nr. 4 und Nr. 5 a) bis h).

6. Löse Nr. 2 mit dem Rechenstab. 7. Ebenso Nr. 3.

8. Wie groß ist die Fläche des „Runden Platzes" in Berlin? (r = 100 m).

9. Auf einer Wanderung treffen drei Jungen eine alte dicke Eiche. Um ihren Durchmesser annähernd zu bestimmen, umfassen sie den Stamm mit ausgebreiteten Armen; dabei berühren sich ihre Fingerspitzen. Nur zwischen dem dritten und ersten bleibt eine Lücke von etwa 10 cm. Die Schüler klaftern 1,50; 1,45; 1,55 m.

10. Ein Seil sei fest um den Äquator gelegt. Man denke es sich an einer Stelle aufgeschnitten, um 10 m verlängert und gestrafft konzentrisch zum Äquator um die Erde geführt. Um wieviel würde es jetzt überall vom Äquator abstehen? Erst schätze, dann rechne!

11. a) Wieviel Umdrehungen macht das 1,5 m hohe Rad einer Lokomotive in einer Stunde bei einer Fahrgeschwindigkeit von 120 km/std? Welche Zeit braucht es b) für 1000 Umdrehungen, c) für eine Umdrehung?

12. Wieviel Umdrehungen macht das Vorderrad eines Fahrrades auf einer Strecke von a) 1 km, wenn sein Durchmesser $d = 78$ cm beträgt? b) Beantworte die Frage für dein Fahrrad. c) Wieviel Umdrehungen würde das Rad auf deinem Schulweg machen?

13. Ein Fahrrad legt bei einer Umdrehung der Pedale 4,8 m zurück. Wie oft dreht sich dabei das Hinterrad, wenn sein Durchmesser 77 cm beträgt?

14. Ein Auto fährt um eine Ecke; dabei durchfährt das äußere Hinterrad einen Viertelkreis mit $r = 7$ m. Wie lang ist dabei sein Weg? Wievielmal dreht es sich, wenn sein Durchmesser $d = 60$ cm beträgt? Welchen Weg legt das innere Hinterrad zurück, wenn die Spurweite des Wagens 1,40 m ist? (Maßstäbliche Zeichnung!) Wie oft muß es sich also drehen? (Differentialgetriebe!)

15. Ein Propeller des LZ 129 mißt 6 m. Er macht 5100 Umdrehungen je Minute. Welchen Weg legt seine Spitze in einer Stunde zurück?

16. Ein Sportplatz hat die Gestalt eines Rechtecks mit angesetzten Halbkreisen. Die Innenmaße des Rechtecks betragen 120 m und 81 m.
a) Wie groß ist die Rasenfläche des Sportfeldes? b) Wie groß ist der Unterschied der Laufstrecken am inneren und am äußeren Rande, wenn die Bahn stets 6 m breit ist?

17. Aus einem a) $l = 10$ m langen, glatten Blech soll Wellblech hergestellt werden. Wieviel m Länge hat dieses, wenn die Wellen Halbkreise von $r = 4$ cm sind? b) $l = 3{,}25$ m; $r = 5$ cm.

18. Um ein an einem Ankermast verankertes Luftschiff in jede beliebige Richtung schwenken zu können, werden um diesen Mast im Kreise Schienen gelegt, auf denen ein Wagen läuft, der das Heck schwenkt. Im Luftschiffhafen von Rio de Janeiro liegen zwei solcher Rundgleise mit den mittleren Durchmessern 334,03 m bzw. 409,10 m. Die Spurweite beträgt 1,435 m. Wieviel m Schienen wurden dazu verlegt?

Kreisring 19. Welchen Flächeninhalt hat ein Kreisring von der Breite $b = 2$ cm, wenn der äußere Radius $r = 1$ dm beträgt?

20. Bei einer Zwölferringscheibe hat die „12" den Durchmesser 2 cm, und die Breite eines jeden Ringes ist 1 cm. a) Berechne die Flächen der einzelnen Ringe. b) In welchem Verhältnis steht der Fünferring zum Zehnerring?

21. Es ist eine Kreisfläche durch konzentrische Kreise in n gleiche Teile zu zerlegen. Bestimme die neuen Halbmesser durch Rechnung und Zeichnung für a) $n = 2$, b) $n = 3$, c) $n = 4$.

22. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Umfang a) gleich der Summe, b) gleich der Differenz der Umfänge zweier gegebener Kreise mit den Halbmessern r_1 und r_2 ist? (Rechne und zeichne, vgl. Nr. 10.)

23. Wie groß ist der Halbmesser eines Kreises, dessen Inhalt a) gleich der Summe, b) gleich der Differenz ($r_1 = 5{,}7$; $r_2 = 4{,}3$) zweier gegebener Kreise ist? Löse die Aufgabe rechnerisch und zeichnerisch.

24. Übungssätze. Fertige zu **a)** und **b)** Zeichnungen an.
a) Errichtet man über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks als Durchmesser Halbkreise, so ist die Summe der Kathetenhalbkreise gleich dem Halbkreis über der Spannseite.
Anl.: Multipliziere $a^2 + b^2 = c^2$ mit $\frac{1}{8}\pi$.
b) Errichtet man diese Halbkreise nach derselben Seite, so ist der Inhalt des Dreiecks gleich der Summe der beiden halbmondförmigen Flächenstücke zwischen den Halbkreisen. (lunulae[1] Hippokratis, um 440 v. Zw., Athen). **Kreismöndchen**

25. Drei gleichgroße Kreise berühren sich. Wie groß ist das Flächenstück zwischen ihnen?
Anl.: Gehe von dem Mittelpunktsdreieck aus.

26. Die Windschutzscheibe eines Kraftwagens hat eine Breite von 110 cm und eine Höhe von 30 cm. Die beiden 25 cm langen Scheibenwischer drehen sich um je 60^0 nach links und rechts; ihre Drehpunkte sind 40 cm voneinander entfernt. Zeichne die Scheibe mit den Scheibenwischern und deute den klarsichtigen Teil durch besonderes Schraffieren an! Berechne die von einem Wischer bestrichene Fläche.

27. Welche Länge hat der Bogen auf der Erdoberfläche, der einem Mittelpunktswinkel von **a)** 1^0, **b)** $1'$ (Achtung: sm) entspricht? (Erdradius 6370 km). **Seemeile**

28. **a)** Wie groß ist der Mittelpunktswinkel eines Kreisausschnittes, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist?
b) Begründe mit Hilfe der Formeln für b und S_k (S. 256) die neue: **$S_k = \frac{1}{2}$ br**

$$S_k = \tfrac{1}{2}\, b \cdot r.$$

29. Der Umfang eines Kreises mit dem Halbmesser 1000 m beträgt $u = 2\pi \cdot 1000\text{ m} = 6283\text{ m}$. Auf 1^{-}, d. h. auf den 6400. Teil des Vollkreises kommt demnach ein Kreisbogen von der Länge $\frac{6283}{6400}$ m $= 0{,}982\text{ m} \approx 1\text{ m}$. **Teilstrich**

Es gilt für 1000 m Entfernung: $\mathbf{1^{-} \mathrel{\widehat{=}} 1}$ **m Zielbreite**
$\boldsymbol{\alpha^{-} \mathrel{\widehat{=}} \alpha}$ **m** „

Vergleiche hierzu S. 208.

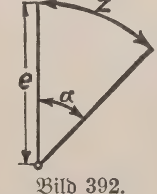


Bild 392.

30. Wieviel Prozent beträgt der Fehler bei der Regel: „1^{-} bedeutet 1 m Zielbreite in 1000 m Entfernung"?

31. **a)** Welche Zielbreite kommt auf einen Teilstrich in der Entfernung α) 2000 m, β) 3500 m, γ) 800 m, δ) 500 m?
b) Desgl. auf $\alpha = 3^{-}$?

32. **a)** Welche Verhältnisgleichung läßt sich zwischen der Entfernung e m, der Zielbreite z m, und dem Beobachtungswinkel α^{-} aufstellen? (s. Bild 392).
b) Fülle die Tabelle aus:

α^{-}	a) 3	b) 4	c) 2	d) 3	e) 2,5	f) 2
e m	2000	1200	750			
z m				9	12	5

[1] lat. lunulae = Möndchen.

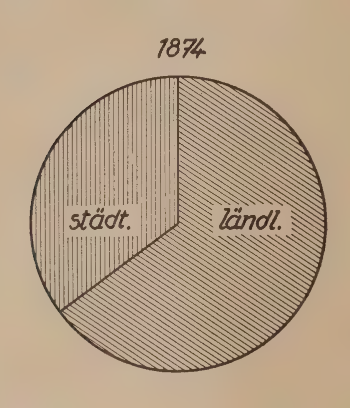
Schaubilder durch Kreise und Kreisausschnitte.

Während bisher bei der Veranschaulichung von Zahlen durch Kreisausschnitte **nur ein** Kreis zugrunde gelegt wurde (Bd. I), können wir jetzt auch mehrere Kreise benutzen.

Verstädterung

33. Verteilung der deutschen Bevölkerung auf Stadt und Land.

1874	42 Millionen		1925	63 Millionen	
davon	65%	ländl. Bevölkerung	davon	35%	ländl. Bevölkerung
und	35%	städt. "	und	65%	städt. "



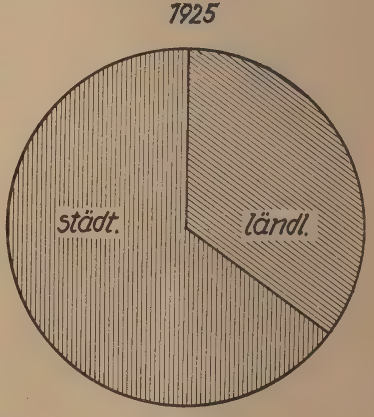


Bild 393.

a) Die Flächeninhalte der Kreise entsprechen den Bevölkerungszahlen.

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{42 \text{ Mill.}}{63 \text{ Mill.}} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \quad \text{also: } \frac{42}{63} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad \text{oder: } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{r_1}{r_2}$$

Daraus kann r_2 als vierte Proportionale durch Zeichnung oder Rechnung gefunden werden, wenn r_1 beliebig gewählt wird. Die Größe der Kreisausschnitte gibt die Verteilung auf Stadt und Land wieder.

b) Vergleiche diese Art der Darstellung mit der durch Rechtecke oder Quadrate. Welche ist anschaulicher? Durch verschiedene Schraffur kann die Anschaulichkeit noch erhöht werden. Farbige Darstellung!

c) Veranschauliche entsprechend Anh. II, 2.

34. a) Stelle nach Anh. II, 4a die Aufteilung des deutschen Kolonialbesitzes durch Kreisausschnitte dar.

b) Vergleiche nach Tabelle 4b jedesmal das Mutterland mit seinem Kolonialbesitz durch konzentrische Kreise.

35. Veranschauliche durch Zeichnung von Kreisen (Münzen) das Anwachsen der Sparkasseneinlagen von 2 zu 2 Jahren (Anh. II, 6).

36. bis 43. Benutze zu weiteren Darstellungen mit Kreisen und Kreisausschnitten auch die Tabellen Anhang II, 5, 7, 9, 10, 12, 17, 19, 20.

XXI. Das Zweitafelverfahren. – Das Schrägbild.

64. Abschnitt: Zweitafeldarstellung.

A. Grund- und Aufriß.

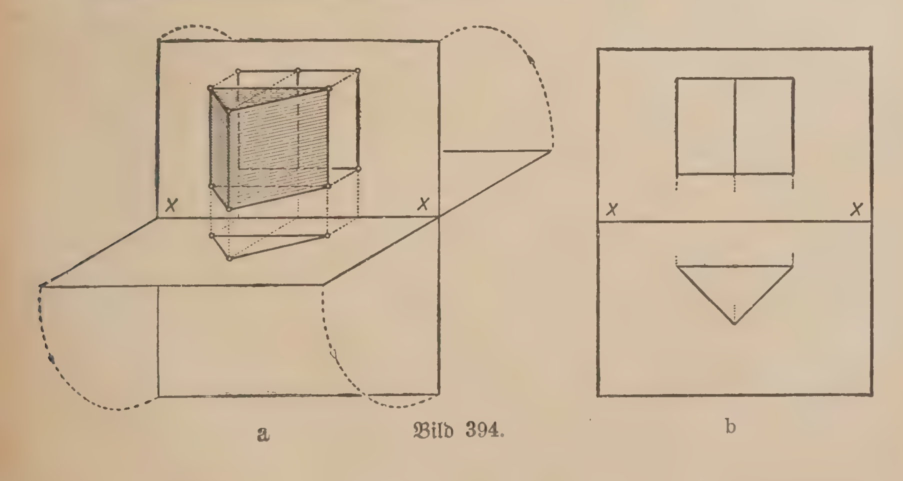
1. Während sich die Eintafelprojektion für Pläne und Geländedarstellungen gut eignet, ist sie für Zeichnungen von Körperformen, wie sie das Handwerk, die Technik, die Baukunst brauchen, weniger zweckmäßig. Die Angabe der Höhen allein durch die Höhenzahlen (Höhenlinien) oder durch den neben die Zeichnung gesetzten Höhenmaßstab ist zu wenig anschaulich. Man vermeidet diesen Nachteil, indem man **zwei** Bilder des Körpers entwirft. **Zweitafelverfahren**

2. Man erhält den **Grundriß**, wenn man den Körper auf eine waagerechte Zeichenebene (Grundrißtafel), den **Aufriß**, indem man den Körper auf eine lotrechte Zeichenebene (Aufrißtafel) projiziert. **Grundriß Aufriß**

Beide Bilder entstehen also durch senkrechte Parallelprojektion: beim Grundriß verlaufen die Projektionsstrahlen lotrecht, beim Aufriß waagerecht. Für den Aufriß gelten sinngemäß die früher für den Grundriß gefundenen Gesetze (S. 233, Nr. 6).

Der Grundriß eines Gegenstandes gibt sein Bild bei lotrechter, der Aufriß sein Bild bei waagerechter Blickrichtung angenähert wieder.

Aus der Betrachtung von Grund- und Aufriß kann man eine anschauliche Vorstellung von Lage und Gestalt des Gegenstandes im Raume gewinnen. Bei dem Grundriß-Aufriß-Verfahren handelt es sich um die Verknüpfung zweier senkrechter Eintafelprojektionen.



a Bild 394. b

Bildachse **3.** Für die zeichnerische Darstellung denkt man sich die Grundrißtafel nach vorn in die Aufrißebene heruntergeklappt. Drehachse ist die Schnittgerade x · · · x von Grund- und Aufrißebene; sie heißt Bildachse oder Projektionsachse.

In Bild 394a ist eine dreiseitige gerade Säule über der Grundriß- und vor der Aufrißtafel gezeichnet. Bild 394b zeigt die beiden Risse nach dem Herunterklappen der Grundrißtafel.

Würfel **4.** Bild 395a zeigt einen auf der Grundrißtafel in Grundstellung stehenden Würfel. Wo liegen die Grund- und Aufrißbilder seiner acht Ecken?

In dieser Stellung treten die Seitenflächen des Würfels nicht in Erscheinung.

5. Wiederhole die Zeichnung für den Fall, daß eine Grundkante mit der Bildachse einen Winkel von a) 30⁰, b) 20⁰, c) 45⁰ bildet (Bild 395 b).

Unsichtbare Kanten sind wie üblich gestrichelt gezeichnet.

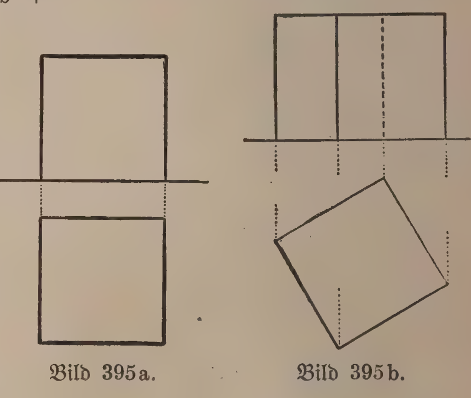
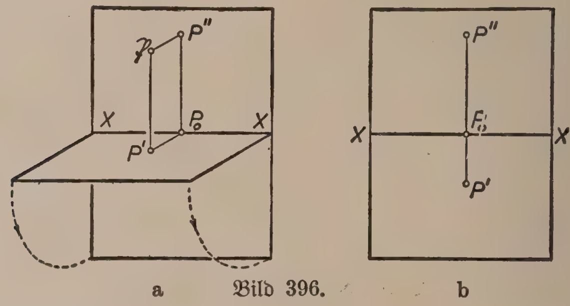


Bild 395a. Bild 395b.

Im folgenden bezeichnet P′ den Grundriß des Punktes 𝔓 und P″ seinen Aufriß.

Ordnungslinie **6.** Die von den Bildpunkten P′ und P″ auf die Bildachse gefällten Lote $P'P_0$ und $P''P_0$ fallen bei der Umklappung der Grundrißtafel um die Bildachse in eine Gerade (Bild 396a, b).



a Bild 396. b

Daraus folgt der

Satz: Grund- und Aufriß eines Punktes liegen stets auf einer Senkrechten zur Bildachse.

Solche Geraden werden Ordnungslinien genannt. In Bild 394b und 395b sind sie gestrichelt angedeutet. Aus Bild 396a liest man ab (Begründg?): $\overline{\mathfrak{P}P'} = \overline{P''P_0}$ und $\overline{\mathfrak{P}P''} = \overline{P'P_0}$, d. h.

7. Die Höhe eines Punktes über der Grundrißtafel ist durch die Entfernung seines Aufrisses von der Bildachse, sein Abstand von der Aufrißtafel durch die Entfernung seines Grundrisses von der Bildachse gegeben. **Höhe Abstand**

B. Anwendungen.

8. Entwirf Grund- und Aufriß a) einer regelmäßigen sechsseitigen Säule in verschiedenen Stellungen, b) einer geraden quadratischen Pyramide, c) eines Turmes mit quadratischer Grundfläche und pyramidenförmigem Dach.

9. Ein auf der Grundrißtafel stehender gerader Kegel (Grundkreishalbmesser r, Höhe h) ist zu zeichnen. Ferner ist ein waagerechter Querschnitt in dem Abstand h′ von der Spitze und ein Achsenschnitt zu zeichnen, dessen Grundrißspur mit der Bildachse den Winkel α bildet.
   a) $r = 3$ cm, $h = 6$ cm, $h' = 4$ cm, $\alpha = 30^0$.
   b) $r = 4$ cm, $h = 5{,}5$ cm, $h' = 3{,}5$ cm, $\alpha = 45^0$.
   c) $r = 5$ cm, $h = 7$ cm, $h' = 5$ cm, $\alpha = 60^0$.

10. Eine Kugel mit dem Halbmesser $r = 3$ cm ist in Grund- und Aufriß zu zeichnen. Diese Kugel wird durch eine Ebene parallel a) zur Aufrißebene, b) zur Grundrißebene geschnitten. Die Ebenen haben 2 cm Abstand vom Kugelmittelpunkt. Zeichne die Schnitte in Grund- und Aufriß.

11. Wie bildet sich die nördliche Erdhalbkugel mit ihren Breiten- und Längenkreisen im Grundriß (auf die Äquatorebene) ab? Zeichne! **Erdkugel**

12. Beim Gelände- und Wehrsport werden Grundriß- und Ansichtsskizzen angefertigt. Der Aufriß, der der Sicht „von vorn“ nahe kommt, gibt einen anschaulicheren Eindruck vom Gelände als der Grundriß. In Bild 397 sind Grund- und Aufriß eines Geländes dargestellt. Lote von den Endpunkten der Höhenlinien in der Ansichtsskizze auf den Grundriß herunter und beachte, wo diese Ordnungslinien die Grundrisse der Höhenlinien treffen. Umgekehrt läßt sich mit Hilfe des Höhenmaßstabes aus dem Grundriß (senkrechte Eintafelprojektion) eine solche Ansichtsskizze unmittelbar zeichnen. Entwirf als Ansichtsskizze vom Süden nach Norden den Aufriß a) des Berges von Bild 144 in Bd. I, S. 175; b) von Bild 383, S. 250. **Geländedarstellung**

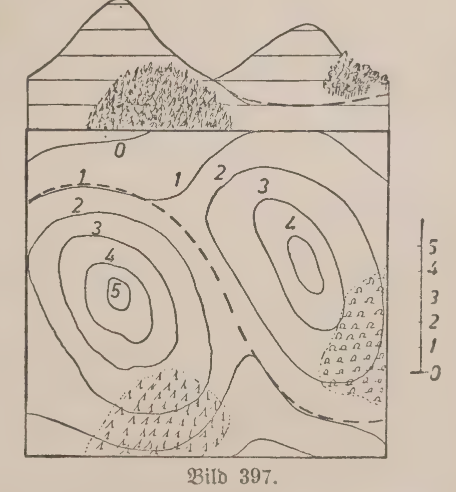


Bild 397.

Seitenriß **13.** Häufig wird außer Grund- und Aufriß noch die Projektion auf eine dritte, zu den beiden ersten senkrechte Tafel benutzt. Dieses dritte Bild heißt **Seitenriß**, da es eine seitliche Ansicht des Körpers wiedergibt. In Bild 398a ist ein Haus mit Grund-, Auf- und Seitenriß gezeichnet.

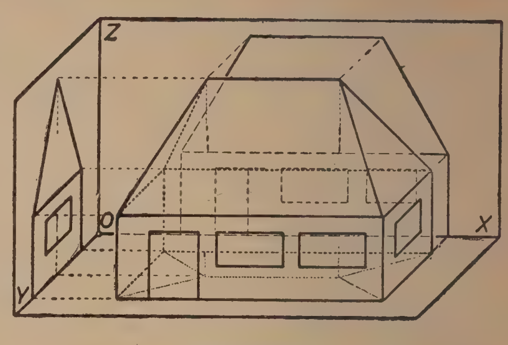


Bild 398a.

Um diese drei Projektionen in *einer* Zeichenebene darstellen zu können, denkt man sich die Grundrißebene um OX (Bild 398b) und die Seitenrißebene um OZ in die Aufrißtafel geklappt (S. 262, Nr. 3).

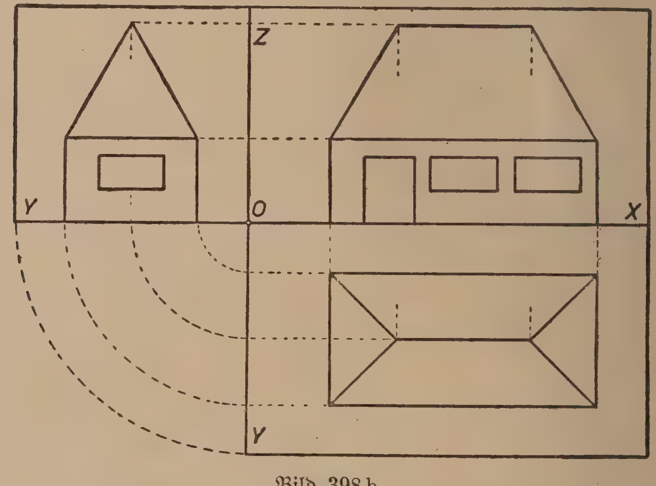


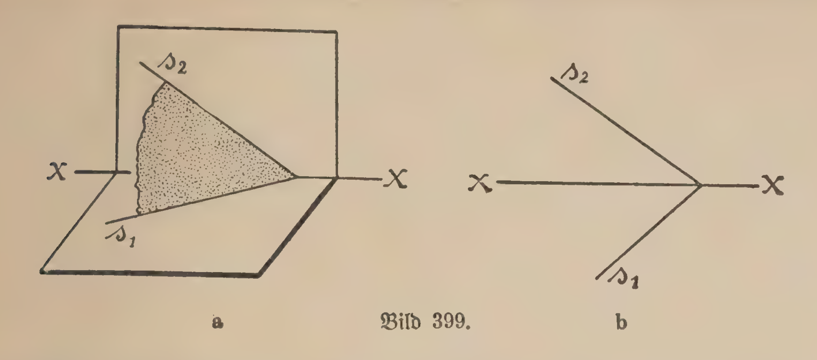
Bild 398b.

14. Zeichne den Seitenriß **a)** zu Aufg. 4, **b)** zu Aufg. 5.

15. Zeichne den Seitenriß **a)** zu Aufg. 8a), **b)** zu Aufg. 8b), **c)** zu Aufg. 8c).

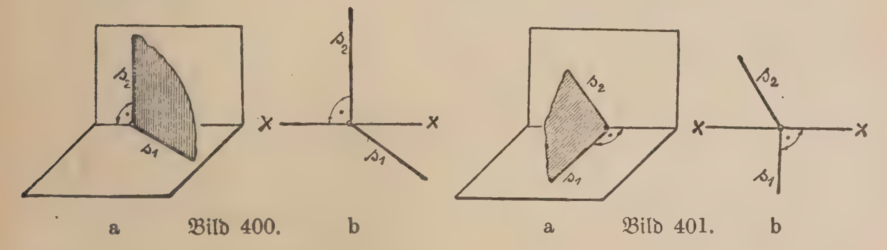
16. Zeichne den Seitenriß **a)** zu Aufg. 9a), **b)** zu Aufg. 9b), **c)** zu Aufg. 9c).

Ebene Spuren **17.** Eine Ebene ist ihrer räumlichen Lage nach durch ihre Schnittgeraden mit den beiden Bildtafeln festgelegt. Diese Schnittgeraden heißen **Spuren**; sie schneiden sich auf der Bildachse. Die Grundrißspur wird mit s_1, die Aufrißspur mit s_2 bezeichnet (Bild 399a, b).



a Bild 399. b

18. Welche besonderen Lagen einer Ebene sind in Bild 400 und Bild 401 dargestellt? **Sonderlagen**



a Bild 400. b a Bild 401. b

19. Wie bei der Eintafelprojektion wird die wahre Größe einer ebenen Figur durch Umklappen ihrer Ebene in die Zeichentafel gewonnen (S. 245, Nr. 6). Besonders einfach wird die Bestimmung der wahren Größe, wenn die Figur in einer zur Bildtafel senkrechten Ebene liegt. In Bild 402 ist die wahre Größe des Viereckes durch Umklappung seiner Ebene um die Spur s in die Grundrißebene bestimmt. Zur Prüfung der Zeichnung wird benutzt, daß A′B′ und (A)(B) sich in einem Punkte x, ebenso B′C′ und (B)(C) in y usw. auf s schneiden müssen. Begründe dies. **Wahre Größe einer ebenen Figur**

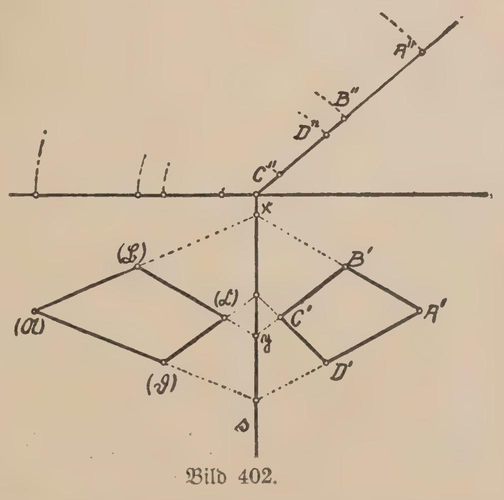


Bild 402.

20. Ein regelmäßiges Sechseck mit der Seite 3 cm liegt in einer zur Aufrißtafel senkrechten Ebene, die den Neigungswinkel 30° mit der Grundrißtafel bildet. Zeichne den Grundriß des Sechsecks.

21. Eine quadratische Säule wird von einer unter 45° aufsteigenden Dachebene schief abgeschnitten.

a) Zeichne die Säule in Grund- und Aufriß.

b) Bestimme die wahre Gestalt der Schnittfigur.

c) Zeichne den Mantel des Restkörpers.

Stromlinienform **22.** a) Die in Bild 402 gezeigte Umlegung der Ebene führt auch dann zum Ziel, wenn die Schnittfigur nicht geradlinig begrenzt ist. Bild 403 zeigt in Grund- und Aufriß den Stromlinien-Schornstein eines Schiffes. Der Schornstein durchdringt die geneigte Dachebene des Deckaufbaus. Die Zeichnung zeigt die wahre Größe des Durchstoßloches; erkläre sie. Diese wahre Größe muß der Schiffbauer kennen, damit das geneigte Dach gut an den Schornstein anschließt.

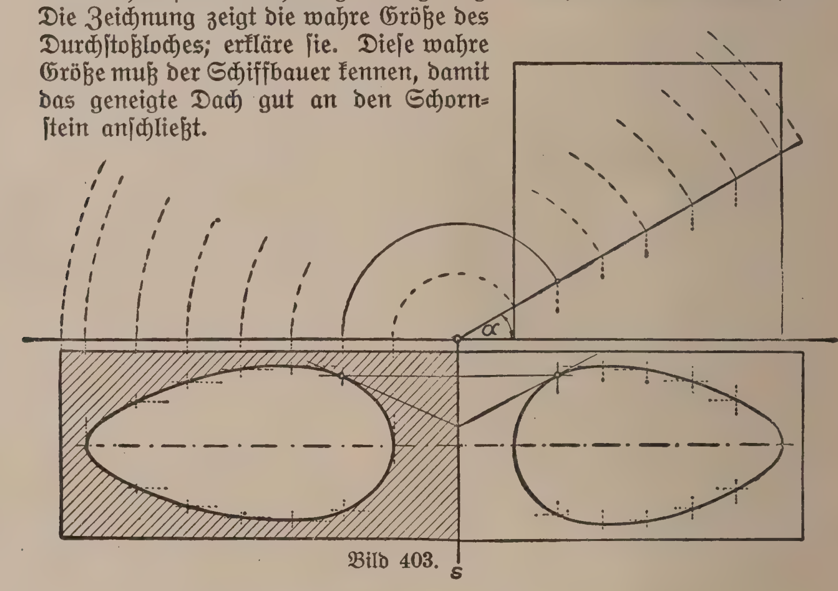


Bild 403.

b) Bestimme ebenso die wahre Größe der Schnittfigur, die eine Ebene aus einer Walze ausschneidet.

Ellipse Diese Kurve ist eine Ellipse.

23. Ein Quader mit den Kanten a, b, c soll in Grund- und Aufriß gezeichnet werden; die wahre Größe der Raumdiagonalen ist zu bestimmen. Rechne nach.

a) $a = 5$ cm, $b = 4$ cm, $c = 6$ cm. b) $a = 12$ cm, $b = 4$ cm, $c = 3$ cm.

Pyramidenstumpf **24.** Eine regelmäßige sechsseitige Pyramide (Grundkante a, Höhe h) steht auf der Grundrißebene und ist im Abstande h′ von der Spitze parallel zur Grundebene abgeschnitten. Zeichne den Pyramidenstumpf, Grund- und Aufriß und sein Netz.

a) $a = 3$ cm, $h = 6$ cm, $h' = 2$ cm. b) $a = 5$ cm, $h = 7$ cm, $h' = 3$ cm.

65. Abschnitt: Das Schrägbild der einfachen Körper.

A. Einführung.

1. Bei der senkrechten Parallelprojektion (vgl. S. 232) treffen die Projektionsstrahlen unter einem rechten Winkel auf die Bildtafel (Bild 404); bei der schiefen oder schrägen Parallelprojektion ist dieser Einfallswinkel φ kein Rechter (Bild 405). **Projektionswinkel**

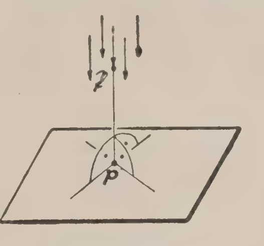


Bild 404.

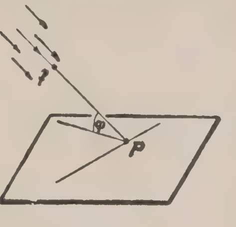


Bild 405.

2. Im allgemeinen begegnen wir dieser Abbildungsart, wenn die parallelen Sonnenstrahlen ein Schattenbild von einem Gegenstand erzeugen. Beobachte solche Schatten von Lattenzäunen, Anschlagsäulen, Rädern usw. und erzeuge im Sonnenlicht von verschiedenen Gegenständen ihre Schatten. Je nach der Größe des Einfallswinkels φ der Sonnenstrahlen nimmt das Schattenbild verschiedene Formen an. (Bild 406, 407.) **Schattenbild**

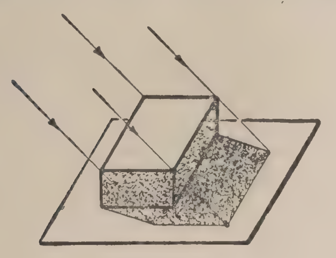


Bild 406.

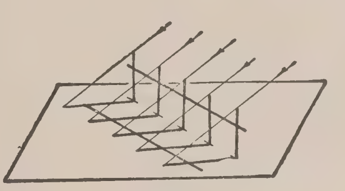


Bild 407.

3. Das Bild eines Körpers in schräger Parallelprojektion ist zeichnerisch nicht so einfach wie das in senkrechter Projektion, gibt aber einen anschaulicheren Eindruck des räumlichen Gegenstandes. Die schräge Parallelprojektion wird daher vor allem für anschauliche Bilder und Skizzen benutzt, dagegen nicht für maßstäbliche und technische Zeichnungen. **Anwendungsgebiet**

B. Kavalierperspektive[1].

4. Ein zeichentechnisch bequemer und anschaulicher Sonderfall der schrägen Parallelprojektion ist die Kavalierperspektive. Um ihre Gesetze zu ent-

[1] Die Kavalierperspektive ist sowohl durch die Richtung der parallelprojizierenden Strahlen gegen die (lotrecht vorgestellte) Tafel als auch durch die Stellung des abzubildenden Gegenstandes zu dieser Tafel gekennzeichnet.

wickeln, konstruieren wir das Schattenbild eines Würfels bei Parallelbeleuchtung. Der Würfel mit den acht Ecken 1 bis 8 ist im Grundriß und Aufriß in Bild 408 gezeichnet; dabei ist die Stellung des Würfels zu den Tafeln so günstig wie möglich gewählt: Grund- und Aufriß des Würfels sind Quadrate. Die Richtung der parallelen Lichtstrahlen ist durch den Pfeil l (Grundriß l', Aufriß l'') festgelegt; das Licht fällt demnach von links oben ein. Die schattenauffangende Ebene sei die Aufrißtafel. Das Schattenbild jedes Würfeleckpunktes ist der Durchstoßpunkt des durch ihn gelegten Lichtstrahles mit der Aufrißtafel. Die beiden Quadrate 1 2 6 5 und 4 3 7 8 bilden sich als deckungsgleiche Quadrate ab, da sie zu unserer Bildebene (Aufrißtafel) parallel sind; die Kanten 1 4, 2 3, 6 7, 5 8 sind im Bilde wie in Wirklichkeit parallel, sie erscheinen unter einem Winkel α gegen die Horizontale nach hinten fliehend und alle in demselben Verhältnis q verkürzt. α und q hängen von der Wahl der Lichtrichtung l ab.

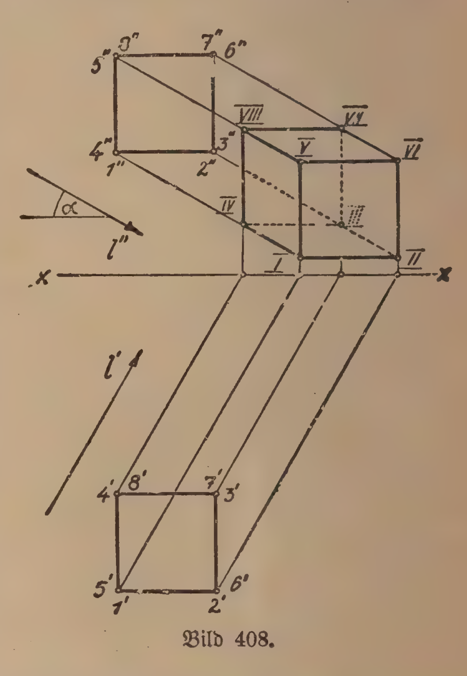


Bild 408.

Abbildungszahlen

Die Größen q und α nennt man die Abbildungszahlen. Man kann für sie beliebige Werte wählen. Der Zweckmäßigkeit wegen bevorzugt man die Abbildungszahlen $q = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$ und $\alpha = 30^0, 45^0, 60^0, 90^0$. Die gebräuchlichsten Werte sind $q = \frac{1}{2}$ und $\alpha = 45^0$. Mit ihnen sind die folgenden Bilder entworfen.

5. Werden die drei zueinander senkrechten Kantenrichtungen x, y, z des Würfels als Tiefe, Breite, Höhe bezeichnet, so gilt demnach bei der Kavalierperspektive für das Zeichnen die Regel:

Alle Breiten und Höhen werden in wahrer Größe, alle Tiefen unter 45⁰ nach hinten fliehend um die Hälfte verkürzt gezeichnet (Bild 409).

Die Kavalierperspektive wird wegen ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit überall beim

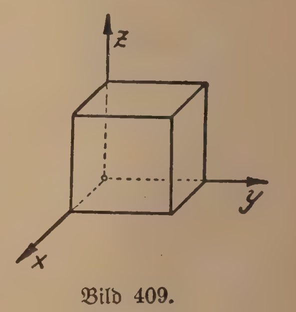


Bild 409.

freihändigen Skizzieren benutzt. Der größte Teil der Abbildungen räumlicher Gebilde in diesem Buche ist in Kavalierperspektive gezeichnet.

6. Zeichne einen Ziegelstein (Kantenlänge 6 cm, 12 cm, 25 cm) und zwar in den drei möglichen Lagen so, daß jede Kantenrichtung einmal Tiefenlinie ist. Wähle einen geeigneten Maßstab. Beurteile die drei Bilder nach ihrer Anschaulichkeit.

7. Zeichne eine liegende Walze (die Achse ist Tiefenlinie) mit dem Durchmesser 6 cm und der Tiefe 10 cm.

8. Bild 410 zeigt eine Straßenwalze in Kavalierperspektive. Zeichne ebenso ein Rad mit sechs Speichen.

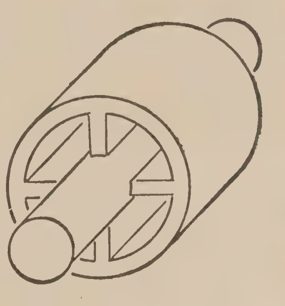


Bild 410.

Ansichtsskizze

9. Für Meldungen im Geländedienst werden Ansichtsskizzen angefertigt. Um den Entwurf einer anschaulichen Ansicht aus der Grundrißzeichnung herstellen zu können, wird ein x-y-z-System benutzt und das quadratische Gitter der x-y-Ebene in Kavalierperspektive gezeichnet (Bild 411). Ein durch vier Höhenlinien gekennzeichneter Berg soll anschaulich dargestellt werden. Jede im Grundriß gezeichnete Höhenlinie läßt sich durch Übertragung einiger Punkte leicht in der Kavalierperspektive entwerfen; die Höhe der betreffenden Punkte wird parallel zur z-Achse aufgetragen. In Bild 411 sind die Höhenlinien 0 und 2 eingezeichnet. Der Umriß des Berges entsteht als Einhüllende aller Höhenlinien.

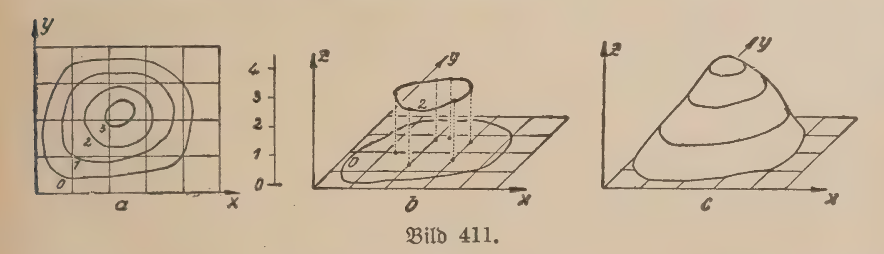


Bild 411.

10. Zeichne ebenso eine Ansichtsskizze des in Bild 383, S. 250 gegebenen Geländes.

11. Bild 412a zeigt die kleinste Einheit eines Flugverbandes, die aus drei Flugzeugen bestehende Kette von oben, von vorn und von der Seite (in Grundriß, Aufriß, Seitenriß). Bild 412b zeigt die in Kavalierperspektive entworfene Ansicht der Kette.

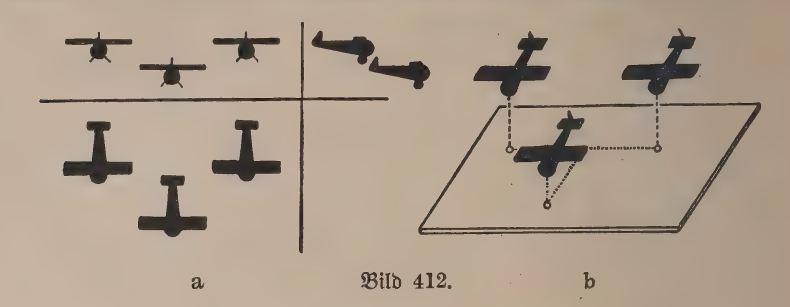


Bild 412.

Entwirf ein anschauliches Bild vom Staffelkeil (Bild 413). Drei Ketten bilden eine Staffel. Bei jeder Flugordnung liegt das führende Flugzeug am tiefsten, während sich die übrigen nach der Höhe staffeln.

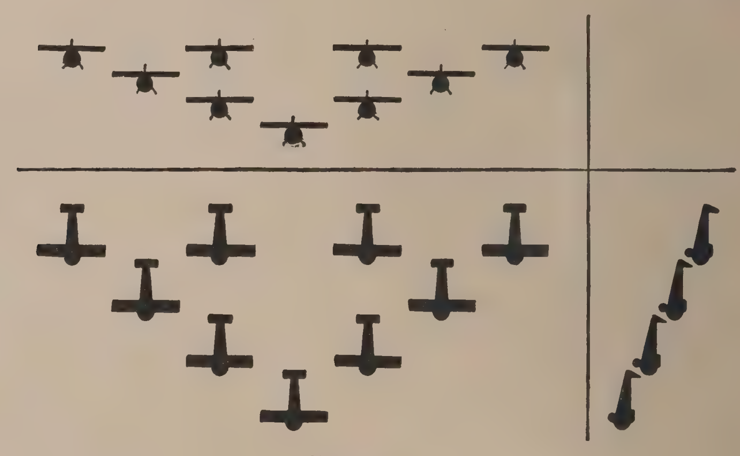


Bild 413.

Schaubilder

12. Zu den zahlreichen Hilfsmitteln der graphischen Darstellung tritt auch die schiefe Parallelprojektion, die es gestattet, Zahlenreihen und Zahlentafeln durch Körperformen zu vergleichen. Sie wird besonders für solche Aufgaben benutzt, denen räumliche Verhältnisse zugrunde liegen.

Aluminiumerzeugung

Aluminium, das deutsche Leichtmetall, wie man es genannt hat, erobert sich immer weitere Verwendungsgebiete. Besonders trifft dies aus bekannten Gründen auf Deutschland zu. Unsere Aluminiumerzeugung betrug

im Jahre	1933	1935	1937
in 1000 t	18,3	70,8	120,0

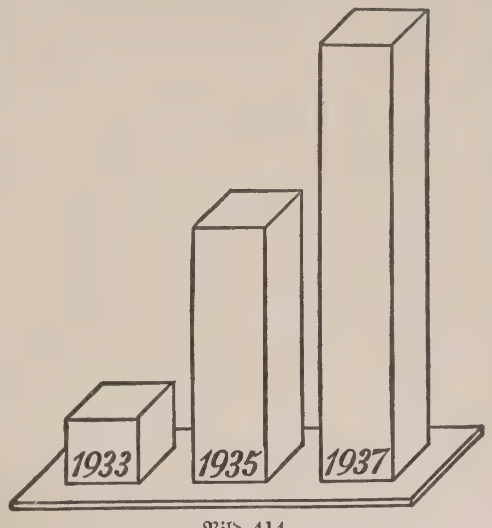


Bild 414.

a) Bild 414 veranschaulicht in Kavalierperspektive die gegebenen Zahlen durch quadratische Säulen gleicher Grundfläche. Der Rauminhalt der dargestellten Körper entspricht der deutschen Aluminiumerzeugung.

Miß die Höhen und vergleiche sie mit den obenstehenden Zahlen. Der Maßstab für die Höhen ist: 2000 t $\triangleq$ 1 mm.

Beachte: $V_1 : V_2 : V_3$
$= G \cdot h_1 : G \cdot h_2 : G \cdot h_3$
$= h_1 : h_2 : h_3 = 18 : 71 : 120$
(abgerundet).

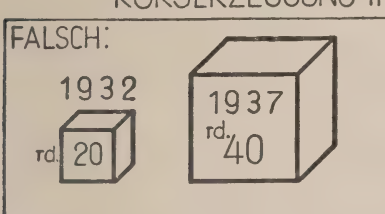
b) Veranschauliche die gegebenen Zahlen durch quadratische Säulen gleicher Höhe.

Anl.: $V_1 : V_2 : V_3 = (G_1 \cdot h) : (G_2 \cdot h) : (G_3 \cdot h)$
$= G_1 : G_2 : G_3 = a_1^2 : a_2^2 : a_3^2 = 18 : 71 : 120$
$a_1 : a_2 : a_3 = \sqrt{18} : \sqrt{71} : \sqrt{120} \approx 4{,}2 : 8{,}2 : 11.$

Vergleiche die Bilder und beachte auch bei den folgenden Aufgaben, wie durch die Art der Darstellung ein gewünschter Eindruck hervorgerufen werden kann. (Der Unterschied ist darauf zurückzuführen, daß die Rauminhalte sich bei gleicher Grundfläche wie die Höhen, bei gleicher Höhe dagegen wie die Quadrate der Grundseiten verhalten.)

KOKSERZEUGUNG IN MILLIONEN TONNEN

Falsches und richtiges Schaubild



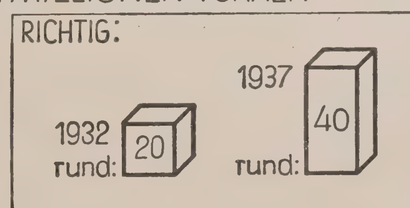


Bild 415.

13. Warum ist das linke Schaubild in Bild 415 falsch?

14. Gesamtgewicht der mit der deutschen Luftpost beförderten Sendungen.

Jahr	1926	1929	1932	1935	1937
kg	200	333,3	466 6	1 310,2	3 346,3

a) Bei den beschränkten Raumverhältnissen im Flugzeug ist zu beachten, daß 1 t Luftpost etwa einen Raum von 1,5 cbm einnimmt. Berechne danach, welchen Rauminhalt die Sendungen der obenstehenden Tabelle einnehmen.

b) Stelle die Ergebnisse von a) durch Quader mit gleicher quadratischer Grundfläche von der Größe 4 qcm dar. (Wähle für die erste Höhe 3 cm.)

c) Stelle die Ergebnisse von a) durch Quader gleicher Höhe von der Größe 3 cm und quadratischer Grundfläche dar. (Wähle als erste Grundkante 2 cm.)

Welche Darstellung ist anschaulicher?

15. Der Güterverkehr betrug in Millionen Tonnen bei der Reichsbahn

1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938
325,6	280,4	308,1	348,4	408,0	452,4	499,0	520,0

Veranschauliche diese Zahlen a) durch Quader gleicher Höhe, b) durch Quader gleicher Grundfläche.

C. Militärperspektive.

Würfelbild **16.** Wird als schattenauffangende Ebene die Grundrißtafel benutzt, so bilden sich die zu dieser Tafel parallelen Ausdehnungen, also Breite und Tiefe, in wahrer Größe ab, während die Höhen sich in einem von der Lichtrichtung abhängigen Verhältnis q verkürzen. Ist insbesondere der Winkel der Lichtstrahlen gegen die Tafel 45°, so ist $q = 1$. Begründe diese Tatsache aus Bild 416, $\mathfrak{AB} = \overline{AB}$.

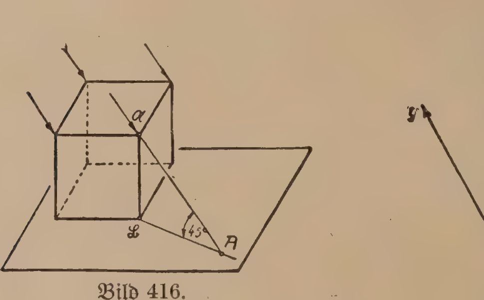


Bild 416.

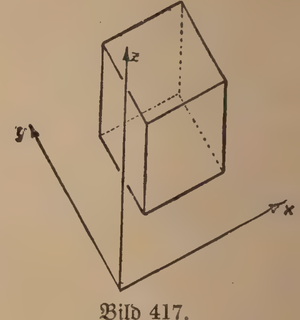


Bild 417.

Die so entstandene schiefe Parallelprojektion wird als Militärperspektive bezeichnet. Bild 417 zeigt einen Würfel, Bild 418 ein Haus in Militärperspektive.

Es gilt demnach bei der Militärperspektive für das Zeichnen die Regel:

Der Grundriß wird in wahrer Größe gezeichnet, die Höhen werden lotrecht in wahrer Größe aufgetragen. **Zeichenregel**

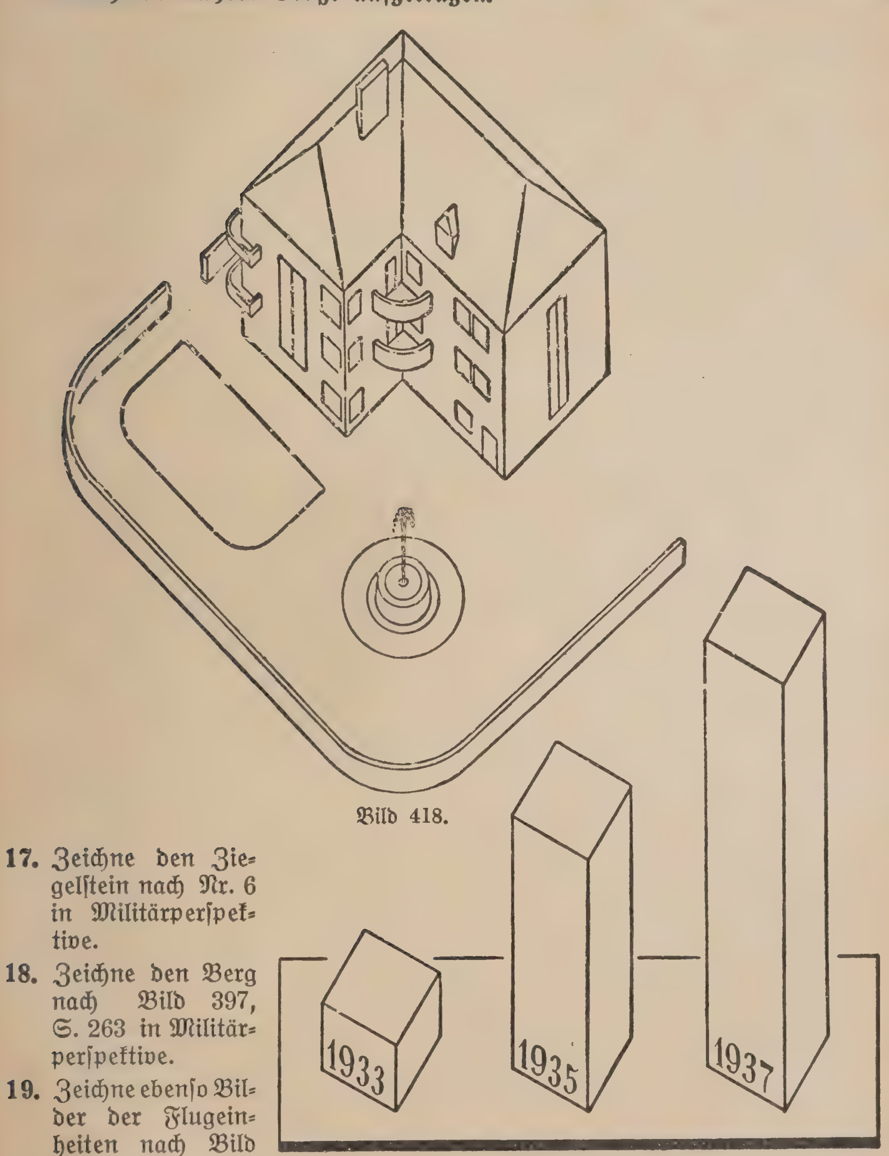


Bild 418.

Bild 419.

17. Zeichne den Ziegelstein nach Nr. 6 in Militärperspektive.

18. Zeichne den Berg nach Bild 397, S. 263 in Militärperspektive.

19. Zeichne ebenso Bilder der Flugeinheiten nach Bild 412 und 413.

Schaubilder

20. Bild 419 zeigt die Veranschaulichung der Zahlen der Aufg. 12a in Militärperspektive. Vgl. Bild 414 und Bild 419. Benutze für Aufg. 12b die Militärperspektive.

21. Veranschauliche die Zahlen von Aufg. Nr. 14a durch Quader mit a) gleicher Grundfläche, b) gleicher Höhe in Militärperspektive.

22. Desgleichen den wachsenden Eisenbahngüterverkehr nach Nr. 15.

Bem.: Die Militärperspektive hat den Vorzug, daß in ihr der oft wesentliche Grundriß in wahrer Größe enthalten ist und sich außerdem noch alle Höhen in wahrer Größe abgreifen lassen.

Achte auf Darstellungen in Kavalier- und Militärperspektive bei Reklamezeichnungen und Plakaten!

D. Kreis, Walze und Kegel im Schrägbild.

Schrägbild des Sechsecks

23. Ein regelmäßiges Sechseck 1 2 3 4 5 6 ist in Kavalierperspektive zu zeichnen (Bild 420). Beschreibe die Konstruktion. ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$.)

Schrägbild des Kreises

24. Das Schrägbild einer Kurve erhält man dadurch, daß man auf ihr eine hinreichend große Anzahl von Punkten wählt, diese in Kavalierperspektive abbildet und die aufeinanderfolgenden Bildpunkte durch einen stetigen Kurvenzug verbindet.

Bild 421 zeigt das Schrägbild eines Kreises in Kavalierperspektive. Beschreibe die Konstruktion.

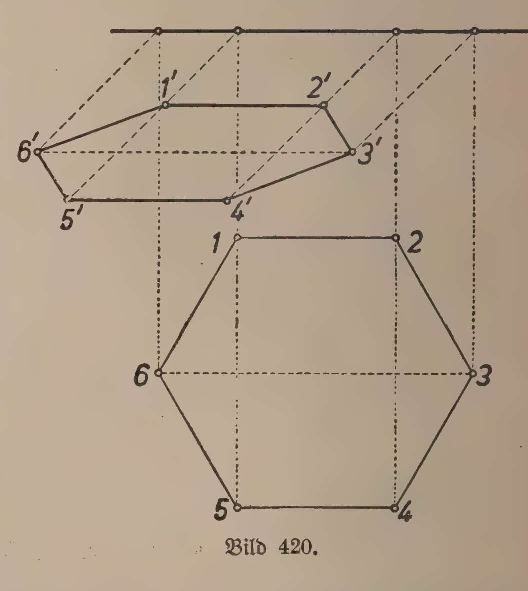


Bild 420.

Ellipse

Das Schrägbild des Kreises ist eine Ellipse (vgl. S. 139 und 266). Der Schatten eines Kreises bei Sonnenlicht ist im allgemeinen eine Ellipse.

Die Kreispunkte A und B fallen mit ihren Bildpunkten A′ und B′ zusammen. Der zu $\overline{AB}$ senkrechte Kreisdurchmesser $\overline{CD}$ ergibt einen Ellipsendurchmesser $\overline{C'D'}$, der zu $\overline{A'B'}$ konjugiert (zugeordnet) heißt. M ist der Mittelpunkt der Ellipse.

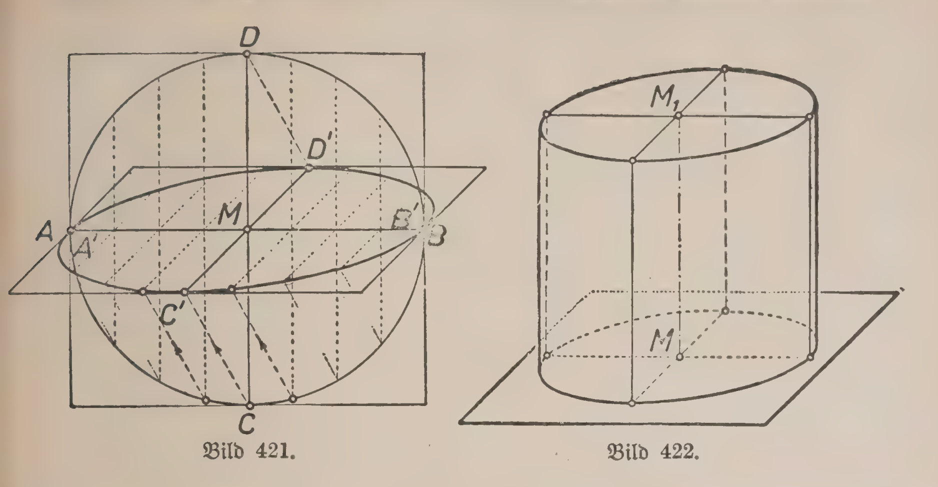


Bild 421. Bild 422.

25. Bild 422 zeigt eine Walze mit lotrechter Achse MM_1 in Kavalierperspektive. Beschreibe die Konstruktion. Welche Winkel der Zeichnung sind in Wirklichkeit rechte Winkel? Die gemeinsamen Tangenten der elliptischen Bilder von Grund- und Deckkreis bilden für den Mantel die Sichtbarkeitsgrenze. **Schrägbild der Walze**

26. Zeichne das Bild einer stehenden Walze (Grundkreishalbmesser r, Höhe h) in Kavalierperspektive ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$).
a) r = 5 cm, h = 5 cm. b) r = 4 cm, h = 12 cm.
c) r = 6 cm, h = 8 cm.

27. Zeichne die Walze nach Nr. 26 liegend in Kavalierperspektive. Die Achse ist Tiefenlinie.

28. Zeichne die Walze nach Aufg. 27 in Militärperspektive. Vgl. Bild 423.

29. Zeichne die Walze nach Nr. 8 stehend (mit lotrechter Achse) in Militärperspektive.

30. Zeichne das Bild eines Kegels (Grundkreishalbmesser r, Höhe h) in Kavalierperspektive ($q = \frac{1}{2}$, $\alpha = 45^0$).
a) r = 5 cm, h = 5 cm. b) r = 4 cm, h = 12 cm.
c) r = 6 cm, h = 8 cm.

Bild 423.

31. Zeichne den Kegel nach Nr. 30 mit waagerechter Achse (Tiefenlinie) in Kavalierperspektive.

32. Ebenso den Kegel nach Aufg. 28. Vgl. Nr. 23.

Anwendungen in Schaubildern s. S. 279.

XXII. Körperberechnung (2. Teil).

66. Abschnitt: Die Walze.

A. Einführung.

1. Die Walze entsteht aus der geraden Säule, wenn deren Seitenzahl mehr und mehr wächst (Bd. I und Bd. II, S. 255, Nr. 5). Es bedeuten r den Grundkreishalbmesser und h die Höhe.

Raum-inhalt Mantel Ober-fläche

2. In den Formeln der geraden Säule:

	a) Rauminhalt	b) Mantel	c) Oberfläche
	$V = G \cdot h$	$M = u \cdot h$	$O = M + 2\,G$
setzt man:	$G = \pi r^2$	$u = 2\pi r$	$M = 2\pi r h;\ G = \pi r^2$.
Es folgt:	$\boxed{V = \pi r^2 h}$	$\boxed{M = 2\pi r h}$	$\boxed{O = 2\pi r(r + h)}$

B. Übungen und Anwendungen.

3. Vorbem.: Die folgenden Zahlenrechnungen vereinfachen sich sehr bei Benutzung der Tafeln 1 und 2 oder des Rechenstabes. Wieder empfiehlt es sich im letzten Falle die Formeln zu benutzen (vgl. S. 257, Nr. 4):

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h \quad \text{und} \quad M = \pi d h$$

Beispiele: a) Welchen Rauminhalt hat ein walzenförmiger Holzstamm von $d = 54$ cm ($= 0{,}54$ m) Durchmesser und $h = 3{,}25$ m Länge? Nach S. 257, Nr. 4 ergibt sich $G = \frac{\pi}{4} d^2 = 0{,}229\ \text{m}^2$ auf Skala A als Querschnitt. Zweckmäßig multipliziert man sofort mit h (auf B) und liest über 3,25 (auf B) den gesuchten Rauminhalt (auf A) $V = 0{,}744\ \text{m}^3$ ab.

Leicht läßt sich auch noch das Gewicht bestimmen (Artgewicht $s = 0{,}8$); $P = V \cdot s = 0{,}744 \cdot 0{,}8 = 0{,}595$ t.

Marke C_1

b) Ist d ziemlich weit rechts auf dem Stabe einzustellen, so benutzt man am besten die zweite Marke C (mit C_1 bezeichnet), weil dann beim Weitermultiplizieren auf A oder B kein Durchschieben nötig ist[1]).

Wie groß ist V und P, wenn $d = 68$ cm, $h = 7{,}4$ m, $s = 0{,}9$ ist? Zwischenergebnis: $G = 0{,}364\ \text{m}^2$; $V = 2{,}68\ \text{m}^3$; $P = 2{,}42$ t.

4. Wie groß sind Rauminhalt, Mantel und Oberfläche einer Walze mit dem Durchmesser d und der Höhe h? a) $d = 8$ cm, $h = 19{,}7$ cm. b) $d = 1{,}45$ m, $h = 0{,}3$ m. c) $d = 1{,}2$ dm, $h = 14{,}2$ dm.

5. Bestimme das Gewicht einer Walze aus a) Holz, b) Eisen, c) Aluminium, d) einem der neuen deutschen Werkstoffe, wenn die Artgewichte der Reihe nach 0,6; 7,8; 2,7; 1,4[2]) betragen und $d = 29$ cm; $h = 1{,}85$ m ist.

6. Der größte in der Papierindustrie verwendete Glättzylinder hat einen Durchmesser von 5 m und eine Länge von 4,5 m. Berechne sein Gewicht

---

[1]) $C_1 = \sqrt{\frac{4}{\pi}} \cdot 10$.

[2]) Mittelwert (Bd. I, S. 77).

unter der Voraussetzung, daß er massiv aus Eisen ($s = 7,8$) hergestellt wäre. (In Wirklichkeit ist er hohl und wiegt „nur“ 67 t).

7. Eine Konservenbüchse soll 850 ccm fassen. Wie hoch muß sie sein, wenn der Halbmesser des Grundkreises 5 cm beträgt?

8. Eine Rolle Kupferdraht wiegt 6,3 kg. Wie lang ist der Draht, wenn er 3 mm dick ist ($s = 8,8$)?

9. Wie groß ist das Gewicht einer Stahlwelle von dem Durchmesser d, der Länge l und dem Artgewicht s?
a) $d = 0,3$ m, $l = 2,3$ m, $s = 7,8$; b) $d = 0,2$ m, $l = 1,8$ m, $s = 7,7$.

10. Eine hölzerne Walze (Artgewicht s_1), an deren unterer Grundfläche sich eine zylindrische Platte aus Metall (Artgewicht s_2) von gleichem Durchmesser befindet, taucht in eine Flüssigkeit vom Artgewicht s_3 ein. Bestimme die Eintauchtiefe, wenn der Halbmesser der beiden Walzen r, ihre Höhen h_1 und h_2 sind.
a) Holz $s_1 = 0,5$; Stahl $s_2 = 7,8$; Wasser $s_3 = 1$; $h_1 = 9,5$ cm; $h_2 = 0,4$ cm; $r = 3$ cm. b) Holz $s_1 = 0,8$; Messing $s_2 = 7,8$ cm; Wasser $s_3 = 1$; $h_1 = 4,9$ cm; $h_2 = 2,7$ cm; $r = 4$ cm. c) Kork $s_1 = 0,24$; Blei $s_2 = 11,4$; Öl $s_3 = 0,92$; $h_1 = 8,2$ cm; $h_2 = 0,5$ cm; $r = 1,2$ cm. d) Führe die Lösung mit allgemeinen Bezeichnungen durch. e) Wie hoch muß die Korkscheibe der Aufgabe c) gemacht werden, wenn der Körper nach den Angaben von c) bis zur Hälfte in Öl $s_3 = 0,9$ einsinken soll?

11. Aus Bohrung (innerer Durchmesser), Hub (Kolbenweg) und Zylinderzahl kann man den Gesamthubraum eines Motors bestimmen. Jede Autowerkstatt hat für die verschiedenen Typen solche Zusammenstellungen. **Motor**

Motortyp	Zylinder Zahl	Bohrung (mm)	Hub (mm)	Gesamt-Hubraum (*l*)
a) Adler Trumpf Junior	4	65	75	1,00
b) BMW. 2 *l*	6	65	96	1,9182
c) Hanomag 1,1 *l* Kurier .	4	63	88	1,095
d) Horch	8	78	118	4,52
e) Maybach	8	90	90	4,58
f) Bramo 322 B	9	154	160	26,82
g) Bramo SH 14	7	108	120	7,7
h) Argus AS 410 . . .	12	105	115	12,00

Prüfe nach!

12. Der Rauminhalt eines Luftschiffes soll nach einer Näherungsformel $\frac{9}{16}$ vom Rauminhalt einer Walze derselben Ausmaße sein. Prüfe die Angabe. **Luftschiff**

Luftschiff	Länge	Durchmesser	Rauminhalt
a) LZ 127	236,6 m	(größter) 30,5 m	105 000 cbm
b) LZ 129	298 m	(größter) 41,2 m	210 000 cbm

13. Auf einem Meßzylinder sollen für je 5 ccm die Teilstriche 0,5 cm auseinanderstehen. Wie groß muß der innere Durchmesser sein?

14. Eine walzenförmige Messinghülse soll bei einer Wandstärke von 1 mm 50 mm lang sein und 18 mm äußeren Durchmesser haben. Wie schwer ist sie (s = 8,5)?

Drehkörper **15.** Ein Rechteck mit den Seiten a = 4 cm und b = 2,4 cm dreht sich **a)** um die Seite a, **b)** um die Seite b, **c)** um eine Achse, die im Abstand d = 1 cm außerhalb des Rechtecks parallel zu b verläuft. Berechne in allen drei Fällen Rauminhalt und Oberfläche der entstehenden Umdrehungskörper.

Luftschutz **16.** Beim behelfsmäßigen Bau eines Luftschutzraumes werden 24 Rundhölzer von der Länge 3,5 m und dem Durchmesser 21 cm und 32 Kanthölzer von der Länge 4 m und dem Querschnitt 15 cm × 19,5 cm[1]) gebraucht. **a)** Wieviel Kubikmeter Holz werden verbaut? **b)** Zeichne ein Rundholz und ein Kantholz liegend in Kavalierperspektive (S. 268). **c)** Ebenso stehend in Militärperspektive (S. 273).

17. Ein Kellergang von 10,5 m Länge und 2,8 m Breite ist an der Außenwand 1,9 m hoch; die Decke hat halbkreisförmigen Querschnitt. Wieviel Menschen können in ihm als Luftschutzraum 3 Stunden lang untergebracht werden, wenn ein Mensch in ruhiger Haltung etwa 1 cbm Luft je Stunde zur Atmung braucht?

18. Ein vorhandenes Tonnengewölbe (Bild 424) in einer Fabrik wird als Luftschutzraum für die Belegschaft ausgebaut.
a) Wieviel Personen können darin 3 Stunden lang untergebracht werden (beachte Nr. 17), wenn der Rauminhalt der Stützpfeiler vernachlässigt wird und die Länge des Gewölbes 8 m beträgt? **b)** Zeichne in Kavalierperspektive.

1 m
3 m
2 m

Bild 424.

19. **a)** Aus Rundhölzern von a = 30 cm Durchmesser und l = 2 m Länge sollen Kanthölzer geschnitten werden, deren Seiten sich wie 5 : 7 (= λ) verhalten. Wieviel v. H. geht dabei als Abfall verloren? **b)** Führe die Aufgabe a) allgemein durch. (Das Ergebnis ist nur von λ abhängig.)

20. An Tagen, an denen kein Grünfutter zur Verfügung steht, werden bei zweimaliger Fütterung am Tag je Mahlzeit und Kuh im Durchschnitt 10 kg Sauerfutter gegeben.
a) Wie groß muß der Gärfutterbehälter bei einer bestimmten Anzahl von Kühen (n) sein, wenn im Jahr an 200 Tagen Gärfutter in diesen Mengen gereicht wird und 1 cbm Gärfutter durchschnittlich 750 kg wiegt?
b) Welchen lichten Durchmesser muß ein zylindrischer Behälter von V = 12 cbm Fassungsraum bei einer lichten Höhe von h = 3 m haben?
c) Wieviel Kubikmeter Eisenbeton sind für den Behältermantel bei einer gleichmäßigen Wandstärke von 12 cm notwendig?

---

[1]) S. Fußnote S. 158.

21.–24. Stelle in Militärperspektive durch Walzen **a)** gleicher Grundflächen **b)** gleicher Höhen dar (in geeignetem Maßstab) die Luftpost nach Aufg. 14, S. 271; den zunehmenden Eisenbahngüterverkehr nach Aufg. 15, S. 272; die Spareinlagen nach Anh. II, 6; die Zahlen des Wiederaufbaus nach Anh. II, 5a···h. **Schaubilder**

67. Abschnitt: Die Pyramide.

A. Einführung.

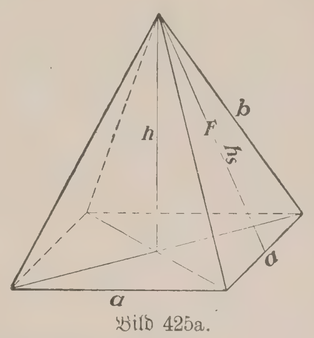


Bild 425a.

1. Bezeichnet man die Höhe der geraden regelmäßigen n-seitigen Pyramide mit h, ihre Grundkante mit a, ihre Seitenkante mit b, die Seitenhöhe mit h_s, den Flächeninhalt eines Manteldreiecks mit F, so gilt:

$M = n \cdot F \quad F = \frac{1}{2} a \cdot h_s \quad M = \frac{1}{2} n \cdot a \cdot h_s$

Mantel der Pyramide $M = \frac{1}{2} u \cdot h_s$

2. Zur Berechnung des Rauminhalts sind noch zwei Hilfssätze nötig.

1. Hilfssatz: Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen haben in gleichen Höhen gleiche Querschnitte.

Nach S. 221, Bild 328a gilt für einen zur Grundfläche parallelen Schnitt in der Höhe h′ (von der Spitze aus gemessen)

für die 1. Pyramide: $\frac{f_1}{G_1} = \frac{h'^2}{h_1^2}$ und für die 2. Pyramide: $\frac{f_2}{G_2} = \frac{h'^2}{h_2^2}$.

Da nun aber $G_1 = G_2$ und $h_1 = h_2$ sein soll, folgt: $f_1 = f_2$.

Der 2. Hilfssatz ist das Cavalierische Prinzip (Anh. I, S. 294). Es besagt:

Körper mit flächengleichen Querschnitten in gleicher Höhe haben gleichen Rauminhalt. **Satz von Cavalieri**

Den Inhalt dieses Satzes machen wir uns an zwei Pyramiden klar. Er gilt allgemein für beliebig gestaltete Körper.

Es seien A_1, B_1, C_1, S_1 und A_2, B_2, C_2, S_2 zwei beliebige Pyramiden P_1 und P_2 mit gleicher Grundfläche G und gleicher Höhe h. Schneidet man von einer Pyramide durch einen zur Grundfläche parallelen Schnitt die Spitze ab, so ist der Restkörper ein Pyramidenstumpf. Nach dem 1. Hilfssatz schneiden zu den Grundflächen parallele Ebenen, die in gleicher Höhe verlaufen, in beiden Pyramiden inhaltsgleiche Schnittfiguren aus; z. B. ist $\triangle D_1E_1F_1 = \triangle D_2E_2F_2$ (Bild 425). Man legt durch beide Pyramiden in gleichen Abständen n solcher Schnitte (im Bild ist n = 5), die jede in n + 1 (hier 6) Schichten zerlegen; davon ist die oberste eine kleine Pyramide, die anderen sind Pyramidenstümpfe; von diesen denkt man sich jeden zwischen zwei prismatische Platten eingeschachtelt, von denen die äußere

mit dem Pyramidenstumpf die untere, die innere mit dieser die obere Grundfläche gemein hat. Jede Pyramidenplatte ist dabei ihrem Volumen nach kleiner als die zugehörige äußere Prismenplatte, aber größer als die zugehörige innere.

So entstehen je zwei treppenförmige Körper, zwischen denen die Pyramiden eingeschlossen sind. Der Rauminhalt jeder der beiden Pyramiden P_1 und P_2 ist also kleiner als der des zugehörigen äußeren Treppenkörpers (Ta_1 und Ta_2), aber größer als der des entsprechenden inneren, (Ti_1 und Ti_2) d. h.

$$Ta_1 > P_1 > Ti_1 \text{ und } Ta_2 > P_2 > Ti_2.$$

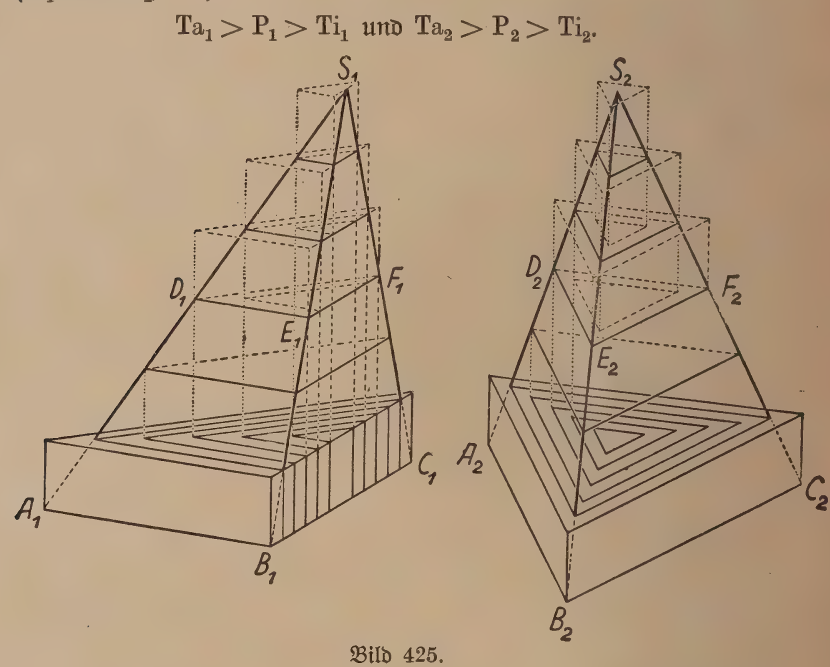


Bild 425.

Nach Voraussetzung haben die Prismenplatten derselben Schicht in beiden Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Sie sind also inhaltsgleich. Damit ist auch $Ta_2 = Ta_1$ und $Ti_2 = Ti_1$. Die Rauminhalte beider Pyramiden liegen also zwischen denselben Grenzen Ta_1 und Ti_1. Der Unterschied dieser beiden Grenzwerte wird dargestellt durch das Volumen der untersten Platte des äußeren Treppenkörpers, wie das Bild ohne weiteres zeigt. Es ist nämlich der Unterschied zwischen je einer äußeren und inneren Prismenplatte dargestellt durch einen prismatischen Ringkörper (Röhre), wobei der nächsthöhere immer gerade in den nächsttieferen genau hineinpaßt. Schiebt man diese teleskopartig ineinander, so erhält man die unterste Platte. Lassen wir nun die Anzahl der Schich-

ten n über alle Grenzen hinauswachsen, so wird die Höhe dieser untersten Schicht und damit ihr Rauminhalt zu Null. Damit wird also $Ta_1 - Ti_1 = 0$, d. h. $Ti_1 = Ta_1$. Nun lag sowohl P_1 als auch P_2 stets zwischen diesen Werten. Es muß also auch $P_1 = P_2$ sein.

Das Cavalierische Prinzip kann man auch so aussprechen: Zwei Körper haben gleichen Rauminhalt, wenn sie **drei** Bedingungen erfüllen: sie müssen gleiche Grundflächen, gleiche Höhen und in gleichen Höhen gleiche Querschnitte haben.

Für Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen ist nach dem 1. Hilfssatz die 3. Bedingung des Cavalierischen Prinzips ohne weiteres erfüllt, daher gilt für sie der

Satz: Pyramiden mit gleichen Grundflächen und Höhen haben gleichen Rauminhalt.

Folgerung: Danach kann der Rauminhalt jeder beliebigen Pyramide angegeben werden, wenn es gelingt, den Rauminhalt einer bestimmten Pyramide zu berechnen.

3. Dies leistet der

Lehrs.: Ein dreiseitiges Prisma läßt sich durch zwei ebene Schnitte in drei inhaltsgleiche Pyramiden zerlegen.

Bew.: Man lege (Bild 426) eine Ebene durch die drei Ecken A, B, C′, eine zweite durch A′, B, C′; dann ist

1.) Pyramide ACC′B (I) = C′A′AB (II); denn sie haben die **gleichen** Grundflächen ACC′ und C′A′A und auch **gleiche** Höhen, weil ihre Grundflächen in **einer** Ebene liegen und ihre Spitzen in B zusammenfallen. Ferner ist

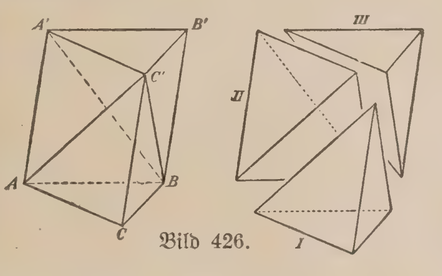


Bild 426.

2.) Pyramide ABCC′ (I) = A′B′C′B (III); denn sie haben die **gleichen** Grundflächen ABC und A′B′C′ und als Höhe den Abstand beider.

Hieraus folgt, daß alle **drei Teilpyramiden gleichen Inhalt haben.**

Folgerung: Jede dreiseitige Pyramide kann als ein Drittel einer dreiseitigen Säule mit derselben Grundfläche und derselben Höhe aufgefaßt werden.

4. a) Daraus ergibt sich für das Volumen einer dreiseitigen Pyramide:

Pyramideninhalt: $V = \frac{1}{3}\,G\,h$

Nach dem Satz von Cavalieri gilt diese Beziehung für beliebige n-seitige Pyramiden mit gleichgroßer Grundfläche und Höhe.

b) **Schiefe Prismen** mit gleicher Grundfläche und Höhe haben auf Grund dieses Satzes gleiche Rauminhalte, daher gilt für sie allgemein: **Schiefes Prisma**

$$V = G \cdot h.$$

B. Aufgaben und Anwendungen.

Vorbem.: Zeichne alle in den folgenden Aufgaben vorkommenden Körper im Schrägbild.

Pyramide **5.** Eine gerade quadratische Pyramide habe die Grundkante a, die Höhe h, die Seitenkante s und die Höhe h_1 in der Seitenfläche. Berechne die fehlenden Stücke, ferner Rauminhalt und Oberfläche, wenn gegeben ist:
a) $a = 5{,}3$ cm, $h = 11{,}7$ cm **b)** $a = 4{,}9$ m, $h_1 = 3{,}7$ m
c) $h_1 = 13$ dm, $h = 12$ dm

Tetraeder **6.** Eine Pyramide wird von vier gleichen gleichseitigen Dreiecken begrenzt (regelmäßiges Vierflach oder Tetraeder, Bild 427). Berechne **a)** ihre Oberfläche **b)** ihre Höhe, **c)** ihren Rauminhalt (Kante $a = 6{,}2$ cm). Stelle ein Modell des Vierflachs her.

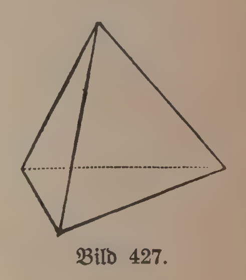


Bild 427.

7. Ein Lampenschirm besteht aus einer sechsseitigen Säule (Grundkante $a = 25$ cm, Höhe $h = 15$ cm), die oben durch eine Pyramide (Höhe $h' = 10$ cm) abgeschlossen ist. Wieviel Stoff ist für eine Bespannung nötig?

8. a) Die Cheopspyramide hatte als Grundfläche ein Quadrat von 230 m Seitenlänge und war 146 m hoch. Berechne ihren ursprünglichen Rauminhalt.
b) Heute hat die Pyramide nur noch eine Höhe von 137 m. Wie groß ist die entstandene Plattform? Wie groß ist der heutige Rauminhalt?

9. Ein regelmäßig ausgebildeter Bergkristall besteht aus einer sechsseitigen Säule, auf deren Grundflächen sechsseitige Pyramiden stehen. Wie schwer ist das Stück, wenn der säulenförmige Teil 3,2 cm hoch ist, eine Grundkante von 0,4 cm hat und die Seitenkanten der aufgesetzten Pyramide die Länge 1,3 cm haben ($s = 2{,}65$)?

Oktaeder **10.** Setzt man zwei quadratische Pyramiden, in denen die Seitenkanten gleich den Grundkanten sind, mit den quadratischen Grundflächen zusammen, so entsteht eine Doppelpyramide mit lauter gleichen Kanten (regelmäßiges Achtflach oder Oktaeder, Bild 428). Berechne **a)** Rauminhalt und **b)** Oberfläche ($a = 5{,}9$ cm). **c)** Stelle ein Modell des Körpers her und bestimme die Zahl seiner Symmetrieebenen und seiner Symmetrieachsen.

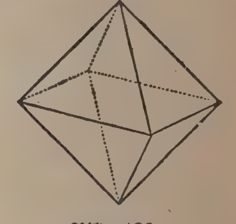


Bild 428.

11. Ein Haus mit rechteckigem Grundriß ($a = 9{,}7$ m; $b = 8{,}3$ m) ist bis zum Dach 5 m hoch. Das Dach besteht aus vier gleichschenkligen Dreiecken und hat eine Höhe von 3,8 m. **a)** Wieviel Dachziegel sind zum Decken des Daches nötig, wenn je qm 35 Stück gerechnet werden? **b)** Was kostet das Abputzen des Hauses bis zum Dach, wenn 17 v. H. der Fläche

auf Fenster, Türen usw. entfallen und der Verputz für 1 qm mit 3,50 ℛℳ berechnet wird?

12. Eine Turmspitze hat die Form einer regelmäßigen achtseitigen Pyramide ($a = 1{,}2\,m$; $h = 12{,}5\,m$). Wie groß ist a) ihr Rauminhalt, b) ihre Oberfläche?

13. Vorbem.: Den Inhalt eines (quadratischen) Pyramidenstumpfes (mit der unteren Grundkante a_1 und der oberen a_2) kann man als Differenz zweier Pyramiden bestimmen. Man braucht dazu die Höhe h' der „Ergänzungspyramide", sie ergibt sich nach dem Strahlensatz (Bild 429) aus $h' : (h + h') = a_2 : a_1$, $h' = ?$

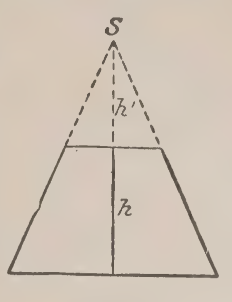
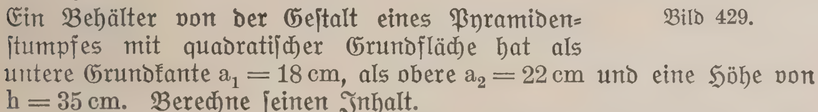


Bild 429.


Ein Behälter von der Gestalt eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche hat als untere Grundkante $a_1 = 18\,cm$, als obere $a_2 = 22\,cm$ und eine Höhe von $h = 35\,cm$. Berechne seinen Inhalt.

14. Ein Gärfutterbehälter von $V = 12$ cbm Fassungsraum, quadratischer Grundfläche und innen senkrechten Wänden von der lichten Höhe $h = 3\,m$ hat am Fundament eine Wandstärke von $d_1 = 35\,cm$, oben eine solche von $d_2 = 15\,cm$. Wieviel Kubikmeter Eisenbeton sind notwendig?

68. Abschnitt: Der Kegel.

1. Der Kegel entsteht aus der regelmäßigen Pyramide, wenn deren Seitenzahl mehr und mehr wächst, d. h. die Grundfläche zum Kreis wird. (Bd. I und S. 255, Nr. 5). Wird daher in der Pyramidenformel **Rauminhalt**

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

für die Grundfläche der Kreisinhalt

$$G = \pi r^2$$

gesetzt, so folgt für den Rauminhalt des Kegels

Kegelinhalt $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

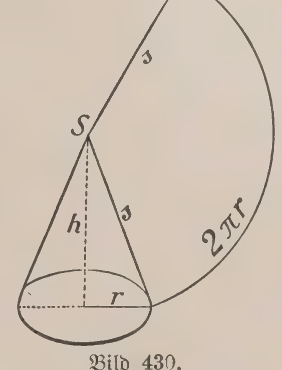


Bild 430.

2. Zur Bestimmung der Mantelfläche wird der Kegel längs einer Seitenlinie s aufgeschnitten und in die Ebene abgewickelt. Der entstehende Kreisausschnitt hat den Halbmesser s und den Bogen $2\pi r$, also ist der Mantel des Kegels $M = S_k = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot s$, da nach S. 259, Nr. 28 der Kreisausschnitt $S_k = \frac{1}{2} b \cdot r$ ist. **Mantel**

Kegelmantel $M = \pi r s$

Bem.: Für die Abwicklung des Kegelmantels ebenso wie für das Kleben eines Kegelmodells ist der Mittelpunktswinkel α des Kreisausschnittes des abgewickelten Mantels nötig. Für ihn gilt:

$$\frac{2\pi r}{2\pi s} = \frac{\alpha}{360} \quad \text{(Grund?)}; \quad \alpha = ?$$

Wie groß ist α, wenn a) $r = 5$ cm, $s = 10$ cm; b) $r = 4$ cm, $s = 12$ cm; c) $r = 3$ cm, $s = 15$ cm; d) $r = \frac{1}{10}\,s$ ist?

Oberfläche

3. Mantel und Grundkreis zusammen ergeben die **Oberfläche des Kegels**

$$O = \pi r^2 + \pi r s$$

Kegeloberfläche $O = \pi r (r + s)$

4. Drücke die Mantellinie s durch r und h aus.

5. Berechne V, M und O eines Kegels für a) $r = 3{,}5$ cm, $h = 12$ cm; b) $r = 8{,}4$ cm, $s = 25{,}9$ cm; c) $h = 69$ cm, $s = 87{,}2$ cm.

Drehkörper

6. Ein rechtwinkliges Dreieck mit $a = 8{,}1$ cm und $b = 10{,}8$ cm dreht sich a) um die kleinere, b) um die größere Lotseite. Berechne V und M des Umdrehungskörpers (Bd. I).

7. Welchen Rauminhalt hat der Doppelkegel, der entsteht, wenn sich das rechtwinklige Dreieck mit den Lotseiten $a = 3$ cm und $b = 4$ cm um die Hypotenuse dreht?

8. Die nebenstehende Tabelle gibt die Abmessungen der durch Minenbomben erzeugten Sprengtrichter wieder: Wie groß ist der Rauminhalt der so entstandenen Sprengtrichter a) bis e), wenn sie als gerade Kreiskegel angesehen werden?

	Bombengewicht in kg	Trichtertiefe in m	Trichterdurchmesser in m
a)	50	1,50	4,70
b)	100	2,20	6,20
c)	300	3,00	10,50
d)	1000	3,80	12,50
e)	1800	6,00	17,00

9. Ein Silo hat die Form einer Walze mit unten angesetztem Kegel. Die Gesamthöhe beträgt 4 m, die Walzenhöhe 3,20 m, der innere Durchmesser 3,50 m. a) Wieviel cbm faßt er? b) Wieviel qm Stahlblech sind mindestens zu seiner Herstellung nötig?

10. Eine Boje hat die Form eines Doppelkegels mit den Höhen $h_1 = 10$ cm und $h_2 = 1{,}35$ m. Der Halbmesser des gemeinsamen Grundkreises sei $r = 52$ cm. Beantworte die Fragen wie in Aufg. Nr. 9a, b.

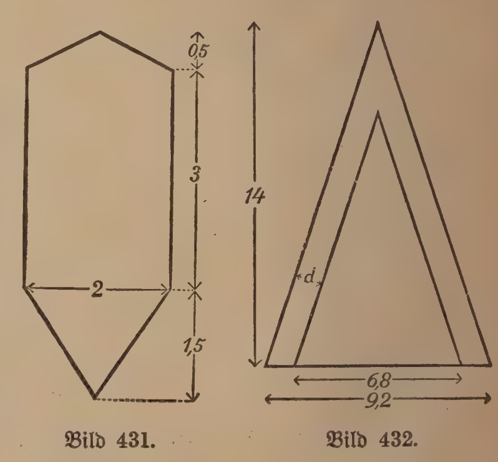


Bild 431. Bild 432.

11. Der Messingkörper eines Senklotes besteht aus einer Walze und zwei aufgesetzten Kegeln (Bild 431, Maße in cm). Wie schwer ist er? ($s = 8{,}8$).

12. Ein Hohlkegel hat den obenstehenden Achsenschnitt (Bild 432, Maße in cm). **a)** Wie groß ist die innere Höhe? (Ähnliche Dreiecke.) **b)** Wie schwer ist der Hohlkegel aus Aluminium ($s = 2{,}7$)? **c)** Wie groß ist die Wandstärke des Hohlkegels? **Hohlkegel**

Bem.: Bei der Berechnung der Kegelstümpfe in den folgenden Aufgaben verfährt man wie bei den Pyramidenstümpfen S. 283, Nr. 13. **Kegelstumpf**

13. Ein Eimer hat oben 26 cm, unten 19 cm inneren Durchmesser. Seine innere Höhe beträgt 27 cm. Wieviel *l* Wasser faßt er höchstens?

14. Ein neuzeitliches Küchenmaß hat die Gestalt eines Kegelstumpfes (Bild 433) mit den lichten Weiten $d_1 = 10$ cm und $d_2 = 3$ cm. Die innere Seitenlänge s beträgt 13 cm.

a) Wieviel Liter Wasser faßt das Maß?

b) $s_1 = 9{,}8$ cm Seitenlänge vom Boden des Gefäßes entfernt befindet sich die Angabe, daß das Gefäß bis dahin $\frac{1}{4}$ *l* faßt; prüfe diese Angabe nach.

c) $s_2 = 9{,}5$ cm Seitenlänge vom Boden des Gefäßes entfernt befindet sich die Angabe, daß das Gefäß bis dahin 250 g Zucker aufnimmt; prüfe die Angabe nach. (Artgewicht des Zuckers 1,59.)

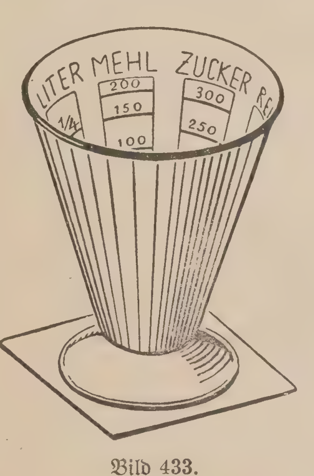


Bild 433.

Meßbecher

15. a) Ein Baumstamm hat unten 42 cm, oben 30 cm Durchmesser; seine Länge beträgt 14,4 m. Wieviel fm Holz liefert der Stamm, wenn er als Kegelstumpf angesehen wird?

b) Wieviel fm würden sich bei der Rechnung ergeben, wenn man den Baum als Walze ansieht und als Grundkreishalbmesser den Mittelwert der beiden angegebenen wählt?[1]

c) Um wieviel v. H. weicht dieser Wert von dem in **a)** ab? Welcher Wert ist genauer?

16. Ein Faß habe innen folgende Abmessungen: Durchmesser des Grundkreises 30 cm, Durchmesser des größten Mittelkreises 38 cm, Höhe 56 cm. Berechne annähernd sein Fassungsvermögen, indem du das Faß als Doppelkegelstumpf ansiehst.

---

[1] In der Forstwirtschaft wird in dieser Weise vereinfacht gerechnet.

69. Abschnitt: Die Kugel.

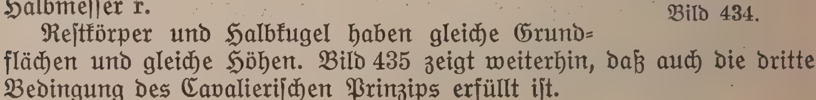
Raum-inhalt

1. Wir vergleichen die Kugel mit einem Restkörper, mit dem sie nach dem Cavalierischen Prinzip (S. 279) gleichen Rauminhalt hat, und bestimmen den Rauminhalt des Restkörpers (Methode des Archimedes, s. Anhang I).

Das Quadrat ABCH (Bild 434 und 435) erzeugt bei der Umdrehung um die Seite $\overline{BC} = r$ eine Walze, das rechtwinklige Dreieck ABC erzeugt dabei einen Kegel mit der Spitze in C. Nimmt man den Kegel aus der Walze unten heraus, so bleibt der „Restkörper" übrig.

Der von B ausgehende Viertelkreis in Bild 434 beschreibt bei der Umdrehung um BC eine Halbkugel vom Halbmesser r.

Bild 434.



Restkörper und Halbkugel haben gleiche Grundflächen und gleiche Höhen. Bild 435 zeigt weiterhin, daß auch die dritte Bedingung des Cavalierischen Prinzips erfüllt ist.

Die Höhenebene durch den beliebigen Punkt E schneidet die Halbkugel im Kreis mit dem Halbmesser EG, den Restkörper im Kreisring zwischen D und F. Es ist $\overline{BA} = \overline{BC}$ und damit $\overline{ED} = \overline{EC}$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck GEC folgt

$$\overline{EG}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{EC}^2.$$

Nun ist

$$\overline{CG} = \overline{CB} = \overline{BA} = \overline{EF}$$

und

$$\overline{EC} = \overline{ED}$$

daher

$$\overline{EG}^2 = \overline{EF}^2 - \overline{ED}^2$$

oder

$$\pi\overline{EG}^2 = \pi\overline{EF}^2 - \pi\overline{ED}^2,$$

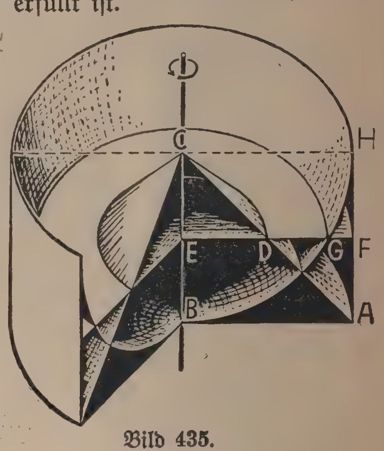


Bild 435.

d. h.

Kugelkreis = Walzenkreis minus Kegelkreis
= Kreisring
= Restkörperquerschnitt.

Das gilt für **jeden** Parallelschnitt zu den Grundflächen, also ist auch die dritte Forderung des Satzes von Cavalieri erfüllt. Daher haben Halbkugel und Restkörper gleichen Rauminhalt.

Bedeutet V den **Rauminhalt der Kugel**, V_w den der Walze und V_k den des Kegels, so ist

$$\tfrac{1}{2}V = V_w - V_k = \pi r^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \tfrac{2}{3}\pi r^3,$$

Kugelinhalt $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

2. Die Kugel sei annähernd aus sehr vielen dreiseitigen pyramidenartigen Körpern zusammengesetzt, die sämtlich ihre Spitzen im Kugelmittelpunkt haben (Bild 436). Die drei Ecken jeder der krummen Grundflächen $G_1, G_2, G_3 \ldots$ liegen auf der Kugeloberfläche, sämtliche Körper haben die Höhe r. Der Rauminhalt des Gesamtkörpers ist **Oberfläche**

$$V = \tfrac{1}{3}G_1 r + \tfrac{1}{3}G_2 r + \tfrac{1}{3}G_3 r + \ldots$$
$$= \tfrac{1}{3}r\,(G_1 + G_2 + G_3 + \ldots)$$
$$V = \tfrac{1}{3}r \cdot G,$$

Bild 436.

wenn G die Summe aller Grundflächen bedeutet. Wird die Anzahl der Teilkörper immer größer und werden *alle* Grundflächen kleiner und kleiner, so stimmt im Grenzfall ihre Summe mit der *Kugeloberfläche* O überein. Es wird also

$$V = \tfrac{1}{3}r \cdot O$$
$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 = \tfrac{1}{3}r \cdot O$$

Kugeloberfläche $O = 4\pi r^2$

Anmerkung: Weitere Formeln zur Kugelberechnung sind:
$F = 2\pi rh$ für die Fläche einer *Kugelhaube* oder *Kugelzone* mit der Höhe h
$V_1 = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ für den Rauminhalt eines *Kugelabschnitts* mit der Höhe h
$V_2 = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ für den Rauminhalt des zugehörigen *Kugelausschnitts*.

Vorbemerkung: Benutze für r^3 Tafel 1, für r^2 Tafel 1 oder 2, soweit möglich; es ist $\frac{4}{3}\pi = 4{,}189$ (s. Tafel 3), Rechenstab!

3. Berechne V und O der Kugel mit **a)** dem Halbmesser 6; 2,5; 0,8 cm, **b)** dem Durchmesser 1; $\frac{3}{4}$; 4,2 m

4. Wie groß ist der Rauminhalt und die Oberfläche der Erdkugel (R = 6370 km)? **Anwendungen**

5. Der größte Hochdruckkugelgasbehälter der Welt wurde in Stettin im Jahre 1938 in Betrieb genommen. Der Durchmesser der Kugel beträgt nach einer Zeitungsnotiz 21,3 m und der Nutzinhalt 25 000 cbm. Rechne nach!

6. Polen hatte 1938 einen Stratosphärenballon gebaut, der 1 120 000 cbm faßte. **a)** Wie groß war sein Durchmesser? **b)** Wieviel Gummi zur Imprägnierung war nötig, wenn man je qm 35 g brauchte? (Er verbrannte beim 1. Start im Okt. 1938.) **c)** Der Sieger im Gordon-Bennet-Rennen 1938 war der belgische Ballon „Belgia", der nur 2200 m³ faßte. Berechne seinen Durchmesser und vgl. mit a). **d)** Wievielmal so groß war der polnische Ballon im Vergleich zu dem belgischen?

7. Für einen bombensicheren Großschutzraum ist die Form einer hohlen Halbkugel vorgeschlagen worden (Innenhalbmesser r = 6 m; Wandstärke d = 1 m). **a)** Wie groß ist der Innenraum? **b)** Wieviel m³ Beton braucht man zum Bau des Raumes? **c)** Ein Würfel, dessen Rauminhalt gleich diesem inneren Hohlraum ist, hat rund 7,7 m Kantenlänge. Prüfe diese Angabe nach. **d)** Wieviel Beton braucht man für einen Großschutzraum, dessen Innenraum ein Würfel von 7,7 m Kantenlänge ist, und der ebenfalls 1 m Wandstärke besitzt?

8. a) Berechne Rauminhalt und Oberfläche einer Kugel von 1 cm Halbmesser. b) Ebenso V und O von 1000 Kugeln von 0,1 cm Halbmesser. Vergleiche die Ergebnisse mit denen von a) (Zerstäuberwirkung bei Flüssigkeiten).

9. Der Rachenreizstoff Clark I (Artgew. 1,6) macht sich in vernebeltem Zustand (Teilchendurchmesser sei $\frac{2}{10^5}$ cm) schon bemerkbar, wenn 0,1 mg in 1 cbm Luft vorhanden ist. Wieviele solcher Teilchen befinden sich dann in 1 cbm, wenn die Teilchen als kleine Kugeln angenommen werden?

10. Eine Brandbombe besteht aus einer Halbkugel (r = 5 cm) und einem aufgesetzten Kegel (r = 5 cm; h = 12 cm). Das Artgewicht des benutzten Elektrons sei $s_1 = 2{,}3$. Wie schwer ist die Bombe, wenn die Thermitfüllung die Form einer Walze (r = 2 cm; h = 10 cm) hat? (Artgew. $s_2 \approx 6$).

11. In einem Fliegerhorst ist eine Flugzeughalle von der Form einer liegenden Viertelwalze erbaut worden, an deren beiden Enden je eine Achtelkugel angesetzt ist.

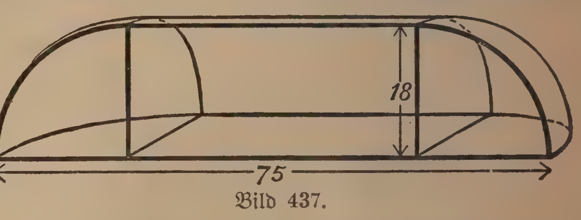
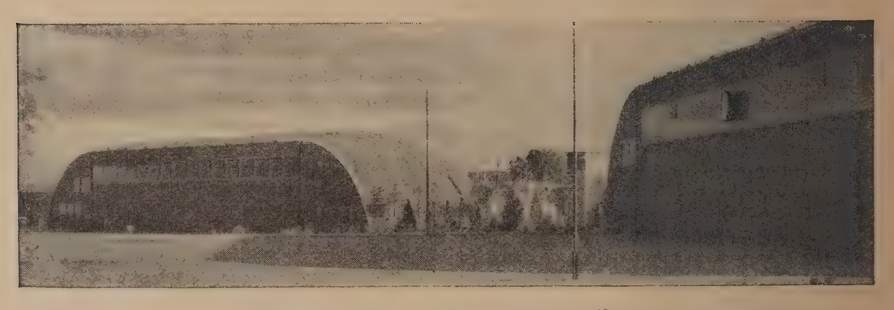


Bild 437.

Wieviel qm Wellblech waren zu ihrem Bau mindestens nötig einschließlich der Vorderwand, wenn die Halle 75 m lang und 18 m hoch ist? (Bild 437). (Vgl. Band I, Bild Seite 176.)


Bild 438. Flugzeughallen in der Mark.

Zusammenfassung und Übersicht.

1. Bei der senkrechten Parallelprojektion werden von den Raumpunkten die Lote auf die Zeichenebene gefällt; die Fußpunkte sind die Bildpunkte. **Eintafelverfahren**
2. Die Höhe des Raumpunktes über der Zeichenebene wird an einem Höhenmaßstab festgelegt.
3. Jede zur Zeichenebene parallele Figur bildet sich in wahrer Größe ab.
4. Jede zur Zeichenebene geneigte Strecke bildet sich verkürzt ab. Ihre wahre Größe wird durch Umklappung in die Zeichenebene gewonnen.
5. Der (spitze) Winkel zwischen einer Geraden und ihrer Projektion heißt Neigungswinkel der Geraden.
6. Alle Punkte einer Ebene, die die gleiche Höhe über der Tafel haben, bilden eine Höhenlinie (Höhengerade) der Ebene.
7. Die Höhenlinie der Höhe Null ist die Spurgerade der Ebene. Alle Höhenlinien einer Ebene sind parallel.
8. Diejenigen Geraden einer Ebene, die zu allen Höhenlinien senkrecht verlaufen, heißen Fallinien.
9. Die Schnittgerade zweier Ebenen wird gefunden, indem die Höhenlinien gleicher Höhe zum Schnitt gebracht werden.
10. Bei einem Plan oder Meßtischblatt wird das Gelände durch Einzeichnung der Höhenlinien gekennzeichnet. Die Höhenlinien sind im allgemeinen krummlinig (Schichtkurven). Der Höhenmaßstab wird dadurch ersetzt, daß die Höhenzahl an die Höhenlinie geschrieben wird.

---

11. Bei dem Zweitafelverfahren werden zwei senkrechte Eintafelprojektionen zusammengesetzt: die beiden Zeichenebenen heißen Grundrißtafel und Aufrißtafel. Sie stehen aufeinander senkrecht und schneiden sich in der Bildachse. Ein Höhenmaßstab ist überflüssig. **Zweitafelverfahren**
12. Die Grundrißtafel denkt man sich um die Bildachse in die Aufrißtafel geklappt, um eine Zeichenebene zu erhalten.
13. Grund- und Aufriß eines Punktes liegen immer auf einer Senkrechten zur Bildachse (Ordnungslinie).

---

14. Bei der schrägen (schiefen) Parallelprojektion stehen die Projektionsstrahlen nicht mehr senkrecht auf der Zeichenebene. **Schrägbild**
15. Die wichtigsten Sonderfälle des Schrägbildes sind:
    A. Kavalierperspektive (Zeichenregel S. 268).
    B. Militärperspektive (Zeichenregel S. 273).
16. Das Schrägbild des Kreises ist eine Ellipse.

Parallel-projektion

17. Für jede Parallelprojektion (ſenkrechte und ſchräge) gelten folgende vier Grundſätze:

I. Jede zur Tafel parallele Strecke hat ein paralleles und gleichlanges Bild, $\overline{\mathfrak{AB}} = \overline{AB}$ (Bild 439).

II. Jede zur Tafel parallele ebene Figur hat ein kongruentes Bild, $\triangle \mathfrak{ABC} \cong \triangle ABC$ (Bild 440).

III. Parallele Geraden haben parallele Bilder, und die Strecken auf ihnen bilden ſich in demſelben Längenverhältnis ab, $g_1 \parallel g_2$; $\mathfrak{g}_1 \parallel \mathfrak{g}_2$ (Bild 441).

IV. Die Teilverhältniſſe von Strecken bleiben erhalten, $\overline{\mathfrak{AX}} : \overline{\mathfrak{XB}} = \overline{AX} : \overline{XB}$ (Bild 442).

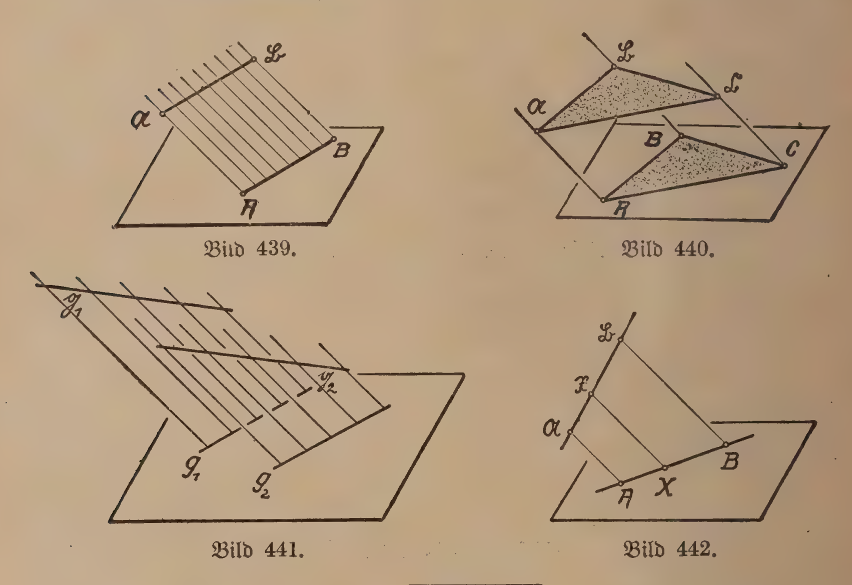


Bild 439. Bild 440.

Bild 441. Bild 442.

Körper-berech-nung

18. **Formeln zur Körperberechnung.**

Für Quader, Würfel und Säule vgl. S. 178. Ferner gilt für:

Walze	$M = 2\pi rh$	$O = 2\pi r(r+h)$	$V = \pi r^2 h$
Pyramide	$M = \frac{1}{2} u \cdot h_s$	$O = M + G$	$V = \frac{1}{3} G \cdot h$
Kegel	$M = \pi rs$	$O = \pi r(r+s)$	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
Kugel	—	$O = 4\pi r^2$	$V = \frac{4}{3} \pi r^3$

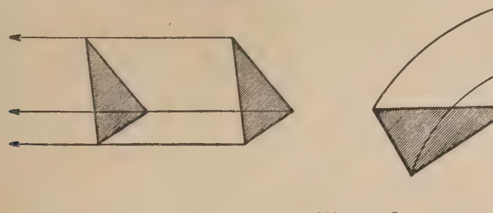
Über den Aufbau der Geometrie.

Die Fülle aller geometrischen Tatsachen läßt sich in gleicher Weise wie der Aufbau des Zahlenreiches nach einem Ordnungsgrundsatz übersehen. Wie wir bei den Zahlen der Reihe nach durch die Einführung negativer, gebrochener und irrationaler Zahlen aufgestiegen sind und dadurch den Zahlenbereich mehr und mehr erweitert haben (vgl. S. 177), ist uns auch in der Geometrie eine große Anzahl einzelner Sätze begegnet, die z. T. enger oder loser miteinander verknüpft sind und die im folgenden noch einmal nach einem höheren Ordnungsgrundsatz überblickt werden sollen.

Im Mittelpunkt unseres ersten geometrischen Teiles stand die Deckungsgleichheit. **Kongruenzgeometrie**

Bei allen Untersuchungen und Zeichnungen kam es nicht auf die Lage in der Ebene oder im Raum an. Ob ein Dreieck, Viereck, Kreis oder sonst irgendeine Figur auf dem Zeichenblatt in der linken oberen oder in der rechten unteren Ecke gezeichnet wurde, spielte für die Eigenschaften der Figur, für die Größe ihrer Winkel oder die Länge ihrer Strecken keine Rolle. Der Begriff der Deckungsgleichheit oder Kongruenz erlaubt uns nämlich, in Gedanken die Figur auszuschneiden und so auf die andere zu legen, daß alle entsprechenden Stücke sich decken.

Bei den deckungsgleichen Figuren der Ebene unterscheiden wir gleichsinnig deckungsgleiche und ungleichsinnig deckungsgleiche. Zwei gleichsinnig deckungsgleiche Figuren können durch eine Bewegung (Bild 443) zur Deckung gebracht werden, zwei ungleichsinnig deckungsgleiche gehen durch die Spiegelung (vgl. Bild 153) an einer Geraden auseinander hervor. Jede Bewegung läßt sich aus Schiebung und Drehung zusammensetzen. **Bewegung** **Spiegelung** **Umlegung**



a Bild 443. b

Die Zusammensetzung einer Bewegung und einer Spiegelung ergibt eine Umlegung der Figur; alle Figuren, die durch Umlegung auseinander hervorgehen, sind ungleichsinnig deckungsgleich.

Bei allen Bewegungen und Umlegungen ändern sich weder die Größen der Winkel noch die Längen der Strecken, d. h. also: „kongruent bleibt kongruent“. Daher bezeichnen wir diesen Abschnitt der Elementargeometrie, bei dem alle Sätze richtig bleiben, wenn man die Figuren irgendwie bewegt oder umlegt, als „Kongruenzgeometrie“ (Geometrie der Deckungsgleichheit) oder auch „Gruppe der Kongruenz“. Für sie erhalten wir also folgende Übersicht:

Gruppe der Kongruenz

Bewegungen	**Umlegungen**
Gleichsinnig deckungsgleiche Figuren können durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden.	Ungleichsinnig deckungsgleiche Figuren können durch eine Umlegung ineinander übergeführt werden.

Damit ist der Gesichtspunkt gewonnen, von dem aus wir rückschauend und ordnend alle behandelten Eigenschaften und Sätze dieses ersten Teiles überblicken können: Alle diese Sätze bleiben richtig, wenn wir die Figuren irgendwie bewegen oder umlegen. Winkelgrößen und Streckenlängen sind unveränderlich (invariant) bei der Kongruenzgruppe.

Ähnlichkeitsgeometrie Wird zu der Bewegung und der Umlegung einer Figur noch eine Maßstabsänderung hinzugefügt, so erhalten wir nicht mehr eine deckungsgleiche, sondern eine ähnliche Figur. Ähnliche Figuren haben gleiche Gestalt, aber verschiedene Größe, sie stimmen noch in den entsprechenden Winkeln, nicht mehr aber in den entsprechenden Seiten überein. Je nachdem wir eine Bewegung oder eine Umlegung mit der Maßstabsänderung zusammensetzen, erhalten wir aus der ursprünglichen Figur eine gleichsinnig oder eine ungleichsinnig ähnliche Figur und kommen so zu folgender Übersicht über die

Gruppe der Ähnlichkeit

Bewegung und Maßstabänderung.	**Umlegung und Maßstabänderung.**
(Erzeugung gleichsinnig ähnlicher Figuren)	(Erzeugung ungleichsinnig ähnlicher Figuren)

Wir erkennen, daß die Gruppe der Ähnlichkeit der Gruppe der Kongruenz übergeordnet ist, denn die erste entsteht aus der zweiten durch Hinzufügung einer Maßstabsänderung.

Affinität Schließlich haben wir Figuren und ihre Bilder betrachtet, die durch Parallelprojektion entstanden. Diese Bilder waren im allgemeinen der Ausgangsfigur weder kongruent noch ähnlich; wir nennen diese Beziehung zwischen der Figur und ihrem Bild eine Parallelverwandtschaft oder Affinität. Die vier Haupteigenschaften dieser Parallelverwandtschaft sind auf S. 290 zusammengestellt; hier heben wir noch einmal hervor:

Das Teilverhältnis und die Parallelität bleiben bei einer Parallelverwandtschaft ungeändert.

Als Sonderfall ist in der „Gruppe der Affinität" die „Gruppe der Kongruenz" enthalten, denn wenn die abzubildende Figur zur Zeichentafel parallel liegt, dann hat sie ein kongruentes Bild (vgl. S. 290).

So sind wir in der Tat bei unseren geometrischen Untersuchungen nach einem Ordnungsgrundsatz aufgestiegen und können nun von Beziehungen zwischen deckungsgleichen, zwischen ähnlichen und zwischen parallelverwandten Gebilden sprechen.

Anhang I: Geschichtliches[1].

Die Anfänge der Geometrie gehen ähnlich wie die des Rechnens (Bd. I) bis in die graue Vorzeit zurück. Tongefäße und Knochengeräte der jüngeren Steinzeit zeigen oft schon Schmuckfiguren in geometrischer Form. Die uns erhaltenen Gebäudegrundrisse, mehr noch die Palast- und Tempelbauten bei den Kulturvölkern der alten und neuen Welt (Ägypter, Babylonier, Chinesen, Inder, Indianer Mittelamerikas) und die astronomischen Berechnungen dieser Völker, insbesondere aber auch der Germanen (Externsteine, Steinsetzungen in Pommern und Westpreußen, Stonehenge in England) zeugen von weitgehenden geometrischen Kenntnissen.

Diese waren zunächst rein aus der Anschauung nach den Forderungen des täglichen Lebens gewonnen, wie es uns z. B. Näherungsformeln bei der Flächenberechnung zeigen. Den Griechen war es vorbehalten, die einzelnen geometrischen Sätze und Erkenntnisse zu einem wissenschaftlichen System aufzubauen, das sich lückenlos aus wenigen Voraussetzungen, Grundsätzen und Erklärungen (Definitionen) ergibt. Damit wurde die Geometrie schon frühzeitig des Zufälligen einer reinen Erfahrungswissenschaft entkleidet und ihre Allgemeingültigkeit festgelegt. Von den ältesten griechischen Mathematikern seien genannt: Thales von Milet (einer der 7 Weisen Griechenlands, um 600 v. Zw.) (Satz des Thales), Pythagoras (um 550 v. Zw.) und seine Schüler (pythagoreischer Lehrsatz, Kenntnis des Vielflachs), sowie Plato (429 bis 348 v. Zw.), der zur Lösung geometrischer Aufgaben nur Zirkel und Lineal zuließ. Plato kleidete die Lösung geometrischer Aufgaben in eine feste Form: Plan, Zeichnung (Konstruktion) und Beweis.

Der in Alexandrien wirkende griechische Mathematiker Euklid (um 300 v. Zw.) faßte die Ergebnisse seiner eigenen Forschungen und die gesamten mathematischen Kenntnisse seiner Zeit in seinem berühmten Lehrbuch, den „Elementen", zusammen. Dieses Werk umfaßt 13 Bücher und enthält ungefähr den Teil der ebenen und räumlichen Geometrie, der heute in den Schulen gelehrt wird. Die Bedeutung liegt in dem klaren, lückenlosen Aufbau, der einwandfreien Beweisführung und der Eindeutigkeit der Bezeichnungen. Die Geometrie hat dadurch fast 2000 Jahre früher als die Arithmetik und Algebra ihre Allgemeingültigkeit und wissenschaftliche Formelsprache erhalten. Die „Elemente" sind im Laufe der Jahrhunderte in die Sprachen aller zivilisierten Völker übersetzt worden und bildeten bis in die Neuzeit hinein, in England sogar bis zum Ende des 19. Jahrhunderts, das in den höheren Schulen gebräuchlichste Lehrbuch.

Eine Erweiterung der geometrischen Wissenschaft des Altertums schuf Archimedes (um 287 bis 212 v. Zw.), der neben physikalisch-mathematischen Entdeckungen (archimedisches Prinzip, Hebelgesetze) zur Berechnung von Flächen und Körpern (z. B. Kreis, Kugel, Parabel) ein Verfahren fand, das dem von Leibniz (s. unten) entdeckten und benutzten verwandt ist.

---

[1]) Diesen Abschnitt hat Herr Oberstud.-Direktor Dr. Tropfke einer Durchsicht unterzogen.

Das bisher noch häufig übliche Verfahren zur Berechnung der Zahl π geht auf ihn zurück. Er fand, daß π zwischen $3\frac{10}{71}$ und $3\frac{10}{70}$ liegen müsse (s. S. 256, Nr. 6).

Der Grundgedanke seines Berechnungsverfahrens besteht im folgenden: Man kommt zu einer ersten rohen Abschätzung des Umfangs u eines Kreises, wenn man ihn mit den Umfängen u_6 und U_6 des ein- und des umbeschriebenen 6-Ecks vergleicht, die man berechnen kann.

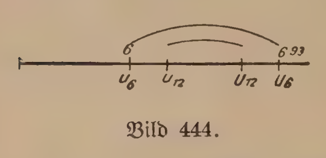


Bild 444.

Die Abschätzung wird genauer, wenn wir u mit u_{12} und U_{12}, den Umfängen des ein- und des umbeschriebenen 12-Ecks vergleichen. Denn es ist $u_{12} > u_6$, aber $U_{12} < U_6$ und da u wieder zwischen u_{12} und U_{12} liegt, ist der Bereich für U kleiner geworden (Bild 444).

Setzen wir dieses Verfahren fort, indem wir u_{24}, U_{24}; u_{48}, U_{48} usw. berechnen, so können wir immer genauere Näherungswerte für u und damit auch für $\frac{u}{2r} = \pi$ angeben.

Ein anderes Verfahren stammt in seinen Grundgedanken von dem Deutschen **Nikolaus von Cusa** (1401 bis 1464). Auf S. 255, Nr. 3 wurde bereits auf die ausführlichen Berechnungen von π (**Ludolf van Ceulen** u. a.) hingewiesen. Man glaubte, auf diese Weise vielleicht eine Gesetzmäßigkeit im Aufbau dieser Zahl (Periode) finden zu können. **Lambert** (um 1750), Mathematiker, Architekt, Festungsbaumeister Friedrichs d. Gr. hat gezeigt, daß π nicht in der Form $\frac{p}{q}$ (vgl. S. 178,) darstellbar ist. — Aber **erst** durch die Arbeiten des deutschen Mathematikers **Lindemann** wurde 1882 der Nachweis erbracht, daß π nicht Wurzel einer (algebraischen) Gleichung mit ganzen Vorzahlen sein kann. Damit ist das über 2000 Jahre alte Problem der **Quadratur des Kreises** (vgl. S. 252, Nr. 1) als unlösbar (mit Zirkel und Lineal) nachgewiesen und abgeschlossen worden.

Die Grundvorstellungen des Grundriß-Aufriß-Verfahrens finden sich bereits im Altertum; Aufschluß gibt das einzige über diesen Gegenstand erhaltene Buch „De Architectura" des römischen Baumeisters **Vitruvius Pollio** (um 15 v. Zw.). Die Regeln der Zeichenkunst wurden in der Praxis von Geschlecht zu Geschlecht vererbt; in den Bauhütten des Mittelalters kamen sie zu hoher Blüte. Das erste eigentliche Lehrbuch der Darstellenden Geometrie stammt von **Albrecht Dürer** (1471 bis 1528): „Underweysung der Messung mit dem Zirckel und richtscheydt", Nürnberg 1525. Überhaupt erhielt die Beschäftigung mit der Mathematik, besonders mit der Geometrie, im 15. Jahrhundert (Renaissance) durch das Bekanntwerden und die Verbreitung der griechischen Schriften neuen Auftrieb. Künstler und Gelehrte befaßten sich in der Folgezeit damit (**Leonardo da Vinci** 1452 bis 1519, **Michelangelo Buonarotti** 1475 bis 1564); **Cavalieri** (1598 bis 1647) spricht im Jahre 1629 den nach ihm benannten Satz aus.

Die Zeit nach dem 30-jährigen Kriege (1618 bis 1648) ist durch das Aufkommen einer neuen Betrachtungsweise in der Geometrie gekennzeichnet.

Einerseits entstand die „Analytische Geometrie", wie man die Koordinatengeometrie bezeichnete, hervorgerufen durch das Werk des französischen Mathematikers und Philosophen Descartes (lat. Cartesius, daher auch Cartesische Koordinaten) (1596 bis 1650), fortgeführt durch Leibniz (1646 bis 1716) und voll ausgebaut im 19. Jahrhundert, andererseits wurde die Lehre von den Proportionen und der Ähnlichkeit ausgeweitet. Euler (1707 bis 1783) führte den Begriff der ähnlichen Lage ein, französische und deutsche Mathematiker (diese besonders im 19. Jahrhundert) bauten diesen Zweig der Geometrie aus.

Mit den wissenschaftlichen Errungenschaften dieser Zeit gehen die praktischen Verwendungsmöglichkeiten Hand in Hand. Um 1550 konstruierte der Deutsche Hommel den ersten Maßstab, um technische und künstlerische Zeichnungen genau ausführen zu können, um 1635 folgte Scheiner mit dem noch heute gebräuchlichen Storchschnabel. Die Erfindung der praktischen Landmessung verdanken wir dem Niederländer Snellius (1580 bis 1626), doch erst C. F. Gauß (1777 bis 1855) hat die dabei gebräuchlichen Verfahren vervollkommnet.

Den im Schlußabschnitt „Aufbau der Geometrie" erwähnten geometrischen Gruppenbegriff hat der deutsche Mathematiker Felix Klein im „Erlanger Programm" (1872) ausgesprochen.

Arithmetik und Algebra zeichnen sich unter allen Wissenschaften durch ihre kurze und klare Formelsprache aus. Sie sind zugleich Musterbeispiele dafür, wie der menschliche Geist einfache Begriffe allmählich erweitert und die für die gegenständlichen (konkreten) Größen geltenden Gesetze auf nichtgegenständliche (abstrakte) allgemeingültig überträgt.

Die Entwicklung der Zeichensprache vollzog sich in verschiedenen Stufen; sie hat ihren Abschluß und ihre heutige Gestalt erst durch den großen Mathematiker Leonhard Euler (1707 bis 1783) erhalten. Bei ihm taucht die Bezeichnung π zum ersten Male auf (vgl. S. 255, Fußnote).

Schon die Babylonier kannten algebraisches Rechnen; im 3. Jahrtausend v. Zw. lösten sie ziemlich verwickelte Gleichungen 2. Grades. Die babylonische Mathematik wurde von den Griechen übernommen, aber der geometrische Zweig stärker entwickelt; in ihm konnten sie die Schwierigkeiten bei der Behandlung irrationaler Größen meistern (vgl. S. 178, Bild 276). In der Praxis hielten sich jedoch trotzdem daneben auch die algebraischen Darstellungen der babylonischen Mathematik; so löste Euklid quadratische Gleichungen durch geometrische Konstruktion; erst Heron (um 100 v. Zw.) behandelte sie rechnerisch. Wieder selbständig zeigt sich uns die Algebra bei Diophant von Alexandrien (um 270 n. Zw.). Er begann stets wiederkehrende Redewendungen abzukürzen; außerdem benutzte er in den Gleichungen für die Unbekannte (x) schon einen bestimmten Buchstaben und bezeichnete sie mit dem Wort „Arithmos" = Zahl.

Der Verfall der griechischen Mathematik in den folgenden Jahrhunderten brachte es mit sich, daß bis zum 13. Jahrhundert die Araber, die gegen Ende

des 10. Jahrhunderts unter vielen anderen auch das Werk des Diophant übersetzt hatten, und auch die abendländischen Mathematiker an der Darstellung durch Worte festhielten. Dabei hatte Alchwarizmi (um 825 n. Zw.) unmittelbar auf Euklid zurückgegriffen und dessen geometrische Konstruktionen ins Rein-Rechnerische übersetzt, wie wir heute noch zu verfahren pflegen. Von dem Titel seines Lehrbuches über die Gleichungen: Al dschabr wa'l mukabala („Die Wiederherstellung und die Gegenüberstellung", nämlich der Glieder der Gleichung) stammt die Bezeichnung Algebra.

Der Untergang des Oströmischen Reiches führte zum Aufblühen der Mathematik durch das Bekanntwerden der griechischen Quellen, die vorher nur durch die Araber zugänglich waren. Die vielen in Italien studierenden Deutschen brachten die Algebra bald nach Deutschland unter dem Namen „Coss" (ital. cosa = Sache, womit die Unbekannte x bezeichnet wurde). Es ist das Verdienst der deutschen „Cossisten" im 15. und 16. Jahrhundert, einmal durch besondere Zeichen (Symbole) die Fachausdrücke ersetzt und zum anderen die Lehre von den quadratischen Gleichungen — auch mit mehreren Unbekannten — erschöpfend behandelt zu haben, soweit es der damalige Zahlbegriff zuließ. Die wichtigsten Werke aus dieser Zeit sind: die „Coss" von Christoph Rudolf (1525) und die „Arithmetica integra" von Michael Stifel (1544). Der Franzose Viëta (1540 bis 1603) benutzte als erster folgerichtig Buchstaben an Stelle der bestimmten Zahlen. Die Algebra und Arithmetik wurde dadurch frei vom Zufälligen, und ihre Sätze und Methoden erhielten Allgemeingültigkeit (Formeln).

Die Unlösbarkeit bestimmter Aufgabengruppen hat mehrfach zu einer Erweiterung des Zahlbegriffs geführt. Die Griechen verbanden mit der Null keinen Zahlbegriff, eine Ansicht, die lange fortbestand. Die Erfindung des Zeichens 0 wird den Indern um 400 n. Zw. zugeschrieben. Es bedeutete bei ihnen „leer", was die Araber mit cifr übersetzten. (Daraus „Ziffer" und französisch „zero".) In deutschen Rechenbüchern tritt es erst nach 1500 auf. Die Division mit Rest rief eine erste Erweiterung des Zahlenbereiches hervor durch die Einführung der gebrochenen Zahlen (Bd. I), die Durchführbarkeit der Subtraktion in jedem Falle, auch wenn der Subtrahend größer als der Minuend ist, eine zweite Erweiterung durch die Einführung der negativen Zahlen. So wie die Bruchrechnung sich erst allmählich entwickelte, mußte auch ein Jahrtausend vergehen, bis die negativen Zahlen als vollgültige Zahlen anerkannt wurden. Diophant rechnete mit „hinzuzufügenden" und „abzuziehenden" Zahlen bei Ausdrücken wie $(a + b) \cdot (c - d)$, solange die Differenzen positiven Wert hatten, ebenso die Araber. Aber schon im 7. Jahrhundert n. Zw. rechneten die Inder allgemein mit negativen Zahlen und bezeichneten sie durch einen über die Ziffer gesetzten Punkt ($\dot{3} = -3$). In das Abendland drang nichts von dem indischen Fortschritt. Man findet ihn zum ersten Male wieder bei dem Deutschen Michael Stifel (1487 bis 1567); er nannte sie „absurde Zahlen" und rechnete mit ihnen genau so wie wir. Die erste Begründung geht auf Descartes zurück, der ausführte, daß man beim Rückwärtszählen über die Null hinausgehen könne. Die Gegner wurden aber auch durch Leonhard Euler von der Existenz

der negativen Zahlen und der Anwendbarkeit der Rechengesetze auf sie noch nicht ganz überzeugt. Völlige Klarheit brachte erst Hermann Hankel (1867). Das Ausziehen der Wurzel führte zur dritten Erweiterung; Wurzeln, die nicht aufgehen, gehören zu den irrationalen Zahlen (S. 178), die Leibniz zuerst eingehender behandelte.

Unsere wichtigsten mechanischen Rechenhilfsmittel sind neben der Zahlentafel der Rechenstab und die Rechenmaschine. Die erste Rechenmaschine hat der große Gelehrte und Forscher Leibniz (1646 bis 1716) konstruiert, während der erste Rechenstab von dem Engländer Edmund Gunter (1581 bis 1626) beschrieben wurde und nach mehrfachen Abänderungen in der Mitte des 19. Jahrhunderts seine heutige Gestalt erhielt.

Der Begriff der Funktion (S. 96) geht ebenfalls auf Leibniz zurück, der damit die neuzeitliche Auffassung der Mathematik eingeleitet hat. Der Funktionsbegriff hat nicht nur eine überragende Bedeutung für die Naturwissenschaften, die Technik und die Mathematik selbst; er beherrscht unser ganzes Leben.

Den größten Fortschritt in der Mathematik verdanken wir dem bedeutendsten aller Mathematiker: dem Deutschen Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855). Schon seine Zeitgenossen bezeichneten ihn als „princeps mathematicorum"; weiten Gebieten der reinen und der angewandten Mathematik hat er ihre heutige Gestalt gegeben oder wenigstens die Richtung gewiesen.

Mit der Lebensarbeit dieses Mannes erreichte die mathematische Wissenschaft, die in den ersten fünfzehnhundert Jahren unserer Zeitrechnung sich nur wenig über die Kenntnisse und Erkenntnisse des Altertums hinaus entwickelt hatte, nach den beiden höchst fruchtbaren Zeitabschnitten „Um den 30-jährigen Krieg" und im „Mathematisch-naturwissenschaftlichen (18.) Jahrhundert" einen neuen Höhepunkt. Sicher ist es kein Zufall, daß gleichzeitig unsere Naturwissenschaft und Technik eine bis dahin kaum für möglich gehaltene Höhe erreicht haben, bildet doch die Mathematik in ihnen die unantastbare Grundlage!

Immanuel Kant, der große Königsberger Gelehrte, drückte vor rund 100 Jahren dies aus, als er sagte, daß in jeder besonderen Naturlehre nur so viel eigentliche Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik enthalten ist.

Anhang II.

Vorbem.: Ergänze die Tabellen nach den Veröffentlichungen der Zeitungen usw. Die zu den Tabellen gehörenden Aufgaben sind nach dem Sachverzeichnis festzustellen. Infolge des Krieges sind die statistischen Angaben von 1939...1940 noch nicht veröffentlicht.

1. Bevölkerungsbewegung im Deutschen Reich[1] (in Mill.).

Jahr	1910	1920	1930	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939
a) Einw. . . .	64,6	62,0	65,1	65,7	66,0	66,4	66,9	67,4	67,6	68,1[2]	79,8[4]
b) Eheschl. . .	0,50	0,90	0,56	0,51	0,63	0,73	0,65	0,61	0,62	0,64	0,77
c) Geboren. .	1,92	1,60	1,14	0,99	0,97	1,20	1,26	1,28	1,28	1,35	1,41
d) Gestorben .	1,05	0,93	0,72	0,71	0,74	0,72	0,79	0,80	0,79	0,80	0,85

[1]) Die Zahlen beziehen sich auf das Gebiet von 1937.
[2]) Ohne Ostmark und Sudetengau.

2. Verstädterung. Es lebten (in % der Gesamtbevölkerung) in Gemeinden mit

Jahr	1871[1])	1900[1])	1910[1])	1910[2])	1933[2])
bis zu 2000 Einw.	63,9	45,6	40,0	38,3	32,7
2000 bis 100000 Einw.	31,3	38,2	38,7	38,9	37,1
mehr als 100000 Einw.	4,8	16,2	21,3	22,8	30,2
Gesamtbevölkerung	41[3])	56	65	59	66

Gebietsstand: [1]) von damals, [2]) von 1937, [3]) in Mill.

3. Vom Versailler Diktat zu Großdeutschland.

Das Deutsche Reich	hatte 1910	verlor 1919[1])	hatte 1936[2])	gewann 1938[3])	hatte 1939
an Fläche in qkm	541124	70579	470545	112735	635000
an Einw. in 1000	64000	6476	67349	10400	79,8[4])

Das Protektorat umfaßt: 48947 qkm mit 6,8 Mill. Einwohnern.

[1]) Die Kolonien nicht mitgerechnet.
[2]) Einschl. Saargebiet.
[3]) Anschluß von Ostmark und Sudetengau.
[4]) Auf Grund der Volkszählung 1939 einschl. der Volksdeutschen im Memelland und Protektorat. — 1940 hatte Großdeutschland bereits über 90 Mill. Einwohner.

4. a) Unser Kolonialbesitz (1912).

	Gebiet in 1000 qkm	Bevölkerung in 1000
Ostafrika[1] . .	995	7 666
Kamerun[2] . .	790	2 652
Togo[3]	87	1 033
Südwestafrika[4]	835	103
Südsee[5] . . .	246	604
Kiautschou[6] . .	0,6	195

4. b) Unser Recht auf Kolonien.

	Mutterland qkm	Kolonialbesitz qkm
Großbritann.	263 175	34 512 537
Frankreich .	550 986	11 917 033
Italien . . .	310 177	3 302 694
Belgien . .	30 444	2 391 064
Portugal . .	91 766	2 090 710
Niederlande .	34 181	2 045 855

Zur Zeit Mandatsgebiete von [1] England und Belgien, [2] [3] England und Frankreich, [4] Südafrikanische Union, [5] Australien, Japan, Neuseeland, [6] an China gefallen.

5. Wiederaufbau.

Jahr	Volkseinkommen (in Mrd. RM) a)	Reichseinnahmen (in Mrd. RM) b)	Auslandsschulden (in Mrd. RM) c)	Industrielle Erzeugung d)[1]	Förderung von Steinkohlen (in Mill. t) e)	Förderung von Braunkohlen (in Mill. t) f)	Erzeugung von elektr. Strom in Mrd. kWh g)	Erzeugung von Rohstahl in Mill. t h)
1929	75,9	9,2	24,1	83,76	163,4	174,5	30,7	18,9
1930	70,2	9,0	24,1	69,09	142,7	146,0	28,9	13,5
1931	57,5	7,8	23,8	50,01	118,6	133,3	25,8	10,1
1932	45,1	6,7	20,6	34,83	105,0	122,6	23,5	7,1
1933	46,5	6,9	19,0	37,83	109,7	125,8	25,6	9,3
1934	52,7	8,2	13,9	49,56	125,0	137,3	30,7	13,9
1935	58,6	9,7	13,1	58,05	143,0	147,1	36,7	16,4
1936	64,9	11,5	12,4	66,03	158,3	161,5	42,5	18,6
1937	71.0	14.2	10.8	68.00[2]	184.5	184.6	50.0	19,2
1938	80,0[3]	17,7						
1939	90,0[3]	23,6						
1940	100,0[3]	27,2						
1941	110,0[3]	31,6						

[1] 1929 bis 1931 einschl. Reparationslieferungen. [2] geschätzt. [3] vorläufige Angaben.

6. Sparkasse (Stand der Einlagen[1] in Mrd. RM am Ende von):

1925	1926	1927	1928	1929[2]		1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940
1,7	3,2	4,8	7,2	9,3	11,6	12,9	11,8	11,4	12,1	12,8	13,8	14,6	16,1	17,1	19,9	24,1[3]

[1] 1913: 19,7 Mrd. RM. [2] Durch die Aufwertung wurden 2,3 Mrd. RM gutgeschrieben. [3] in Großdeutschland 31,1.

7. Die Ertragslage der Landwirtschaft (in Mrd. RM) im Wirtschaftsjahr:

a)	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938
b)	7,5	8,3	9,0	10,2	11,1	11,7	11,9	12,0	11,8	11,6	11,3	11,2	11,1	11,1
c)	0,43	0,61	0,63	0,79	0,92	0,95	0,95	1,01	0,85	0,73	0,65	0,63	0,58	0,57
d)	7,5	8,1	8,3	9,3	10,2	9,8	8,6	7,4	6,4	7,4	8,3	8,7	8,9	9,6
e)	6,1	6,7	7,7	8,0	8,0	7,9	6,9	6,1	5,5	5,6	5,7	6,1	6,4	6,8

a) Wirtschaftsjahr (z. B. 1925 ≙ 1924/25 usw.),
b) Gesamtverschuldung, **c)** Zinslast, **d)** Verkaufserlös, **e)** Betriebsausgaben.

8. Ernteflächen (in 1000 ha) und **Ernteerträge** (in 1000 t) einiger wichtiger Nahrungsmittel im Deutschen Reich:

Jahr	Roggen		Weizen		Kartoffeln		Zuckerrüben	
	Fläche	Ertrag	Fläche	Ertrag	Fläche	Ertrag	Fläche	Ertrag
1931	4366	6680	2167	4233	2824	43866	381	11039
1932	4450	8364	2280	5003	2879	47016	271	7876
1933	4524	8727	2318	5604	2889	44071	304	8579
1934	4491	7608	2198	4533	2907	46780	356	10394
1935	4540	7478	2106	4667	2750	41015	373	10568
1936	4514	7386	2084	4427	2793	46324	389	12096
1937	4156	6917	1975	4467	2888	55310	455	15701
1938								
1939								

8a. Ernteerträge in dz je ha und **Düngerverbrauch** in kg je ha 1937 *α*) im Altreich, *β*) in Österreich:

	Weizen	Roggen	Gerste	Hafer	Kartoffeln	Zuckerrüben	Kunstdünger
α)	21,6	17,2	20,4	19,6	157,9	291,6	52,5
β)	15,5	14,2	16,1	13,9	128,3	230,0	3,5

9. Motorisierung (in 1000 Stück).

A. Bestand:	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939
a) Kräder	853	984	1059	1184	1324	1583	
b) PKW	522	775	810	961	1108	1306	
c) LKW	188	229	289	330	399	476	
B. Gesamterzeugung:	106	175	249	304	328		

10. Deutsche Treibstoffversorgung (in 1000 t).

Jahr	1932	1933	1934	1935	1936	1937
a) Gesamtverbrauch	1680	1653	1955	2320	2739	3000[2)]
b) Einfuhr (Benzol, Benzin) .	1088	1005	1158	1284	1383	1500[2)]
c) Erzeugung (Benzol, Benzin)	605	530	641	927	1284	1663
d) „ (Treibspiritus) .	102	137	169	177	175	120
e) Erdölförderung, Altreich[1)] .	230	239	320	438	479	490
f) „ Österreich[2)]	0,12	0,86	4,1	6,6	7,5	33

[1)] 1923: 48; 1926: 95; 1929: 103. [2)] geschätzt.

11. Zahl der Arbeitslosen (in Mill.):

am	1931		1932		1933		1934		1935		1936		1937		1938	
	1.4.	1.10.	1.4.	1.10.	1.4.	1.10.	1.4.	1.10.	1.4.	1.10.	1.4.	1.10.	1.4.	1.10.	1.4.	1.10
a) Deutschl.	4,5	4,5	6,0	5,1	5,6	3,8	2,8	2,3	2,4	1,7	1,9	1,0	1,1	0,5	0,3	0,4
b) England	2,5	2,9	2,7	2,9	2,8	2,4	2,3	2,1	2,1	1,9	2,0	1,3	1,1	1,0	1,8	1,9
c) Frankr.	0,5	0,8	1,0	1,2	1,5	1,2	1,3	1,4	1,5	1,3	0,4	0,4	0,4	0,3	0,4	0,4
d) Ver. St.	7,0	7,4	10,5	11,7	13,0	10,0	9,2	9,8	9,8	8,0	11,9	11,1	10,5	9,0	10,4	7,8

12. Zahl der Teilnehmer am Berufswettkampf (in 1000):

Jahr		1934	1935	1936	1937	1938	1939
a) Bauernjugend		30	70	250	235		
Sonstige Jugendliche	b) männliche	42	80	122	211		
	c) weibliche	25	37	90	148		

13. Luftverkehr im Deutschen Reich (in 1000).

Jahr	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938
Flug-km	9267	10544	14263	15997	17882	18835	
Fluggäste	98	123	166	210	286	323	
Personen-km	28212	38348	62684	85904	123507	120579	
Flugpost (kg)	384	467	772	1310	2597	3754	
Luftnetz (km)	28	23	25	25	26	27	
tägl. Flug-km im Sommer	40	45	54	59	60	66	

14. Zahl der Rundfunkteilnehmer (in 1000):

α) Gesamtzahl, β) davon Arbeiter und Angestellte.

Jahr	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941
α)	3981	4428	5053	6143	7100	8600	9500	12580 [1]	14000 [2]	15500
β)	1780	2046	2360	2906	3400	4700	5200	7000 [2]	8000 [2]	9000

[1] Am 1. Juni. [2] Vorläufige Angaben.

15. Höchste erreichte Fluggeschwindigkeiten.

Jahr	1906	1910	1913	1920	1923	1928	1931	1934 [1]	1939 [2]
km/std	41,3	106,5	203,8	309,0	417,1	512,7	655,0	709,2	755,1

[1] Ital. Weltbestleistung. [2] Deutsche Weltbestleistung.

16. Profilangaben einiger Tragflügel (in mm).

	x	0	2.5	5.0	7.5	10	15	20	30	40	50	60	70	80	90	95	100
a)	Gö. yo	4,9	7,8	9,3	10,2	11,0	12,0	12,6	13,0	12,7	12,0	10,6	8,9	7,0	5,2	4,3	3,4
	740 yu	4,9	2,6	1,6	1,0	0,6	0,3	0,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,1	0,5	1,4	2,2	2,9
b)	Gö. yo	0,0	8,0	12,1	15,3	17,8	21,4	24,0	26,4	26,2	24,4	21,4	17,2	12,3	6,7	3,8	0,0
	570 yu	0,0	—3,6	—4,9	—5,2	—5,8	—7,0	—7,2	—7,4	—6,9	—6,0	—5,1	—4,2	—3,1	—2,0	—1,4	0,0
c)	Gö. yo	0,0	2,5	3,4	4,1	4,7	5,4	5,8	6,4	6,4	5,8	5,2	4,2	3,0	1,5	0,6	0,0
	409 yu	0,0	—2,5	—3,4	—4,1	—4,7	—5,4	—5,8	—6,4	—6,4	—5,8	—5,2	—4,2	—3,0	—1,5	—0,6	0,0
d)	Gö. yo	0,8	3,3	4,6	5,6	6.4	7,5	8,3	8,7	8,4	7,8	6,7	5,3	3,7	2,1	1,1	0,0
	335 yu	0,8	0,0	0,2	0,4	0,6	1,1	1,4	2,0	2,2	2,0	1,7	1,3	0,9	0,5	0,3	0,0
e)	Gö. yo	1,1	4,9	6,8	8,0	9,0	10,3	11,0	11,7	11,6	10,8	9,5	7,5	5,3	2,8	1,5	0,0
	365 yu	1,1	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

17. Zusammensetzung einiger Nahrungsmittel.

	Eiweiß v. H.	Fett v. H.	Kohle-hydrate v. H.	Zellstoff v. H.	Salze v. H.	Wasser v. H.
Weizenbrot . . .	6,8	0,5	51,8	0,3	0,8	33,6
Roggenbrot . . .	6	1	50	1	2	40
Kartoffeln . . .	2	0,2	21	1	1	74,8
Erbsen	23	2	53	5,5	2,7	13,5
Reis	8	1,3	75,5	1	1	13,2
Zucker	—	—	98	—	—	2
Rindfleisch (mag.)	20,5	1,8	—	—	1,2	76,5
Schweinefl. (fett)	14,5	37,3	—	—	0,7	47,5
Schellfisch . . .	17	0,3	—	—	1,2	81,5
Salzhering . . .	19	17	1,5	—	16,5	46
Ei	12,5	12	0,6	—	1,1	73,8
Milch	3,5	3,6	5	—	0,7	87,3
Butter	0,8	83,5	0,5	—	1,5	13,7
Schweizerkäse . .	19	26	0,8	—	4,5	49,7

18. **Luftdruck** (b), **Temperatur** (t) und **Luftgewicht** (w) in der Höhe (h).

h km	0	2	4	6	8	10	12	14	16
b mm	762	596	461	353	266	198	145	106	78
t ⁰ C	+8	0	—11	—24	—38	—50	—54	—54	—54
w g je cbm	1250	1008	816	658	528	413	311	226	165

19. **Kunstseidenerzeugung in aller Welt** (in Mill. kg):

	1913	1923	1930	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939
a) Deutschland	3,0	6,5	26,8	28,7	39,0	44,8	46,1	57,5		
b) Japan	0,1	0,4	16,3	44,4	70,4	99,0	124,7	149,6		
c) Italien	0,2	4,6	30,1	37,2	38,9	38,9	39,0	48,3		
d) Amerika	0,7	16,0	57,8	96,8	94,6	116,8	125,9	141,6		
e) England	3,0	7,9	22,7	36,3	40,3	50,9	53,0	54,3		
f) Welt	11,0	47,0	205,5	302,5	355,0	432,0	467,0	534,0		

20. **Zellwollerzeugung in aller Welt** (in Mill. kg):

	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939
a) Deutschland	2,5	2,6	2,7	5,4	9,2	19,6	46,3	102,0	150[1]	
b) Japan	—	—	0,3	0,5	2,1	6,2	22,7	75,8		
c) Italien	0,3	0,6	4,3	5,2	9,1	30,7	49,9	70,9		
d) Amerika	0,2	0,4	0,5	1,0	1,0	2,1	5,6	9,1		
e) England	0,3	0,6	1,2	1,8	1,9	5,2	12,9	15,9		
f) Welt	3,3	4,2	9,8	15,1	25,5	67,5	144,7	285,0		

[1] Geschätzt.

Sachverzeichnis.

Die Zahlen geben die Seiten an; II bezieht sich auf den Tabellenanhang. — Die fremden Fachausdrücke s. S. 304.

Die Druckstöcke für den Abschnitt Rechenstab wurden in freundlicher Weise vom Feinmeßinstitut Klawun, Berlin, zur Verfügung gestellt.

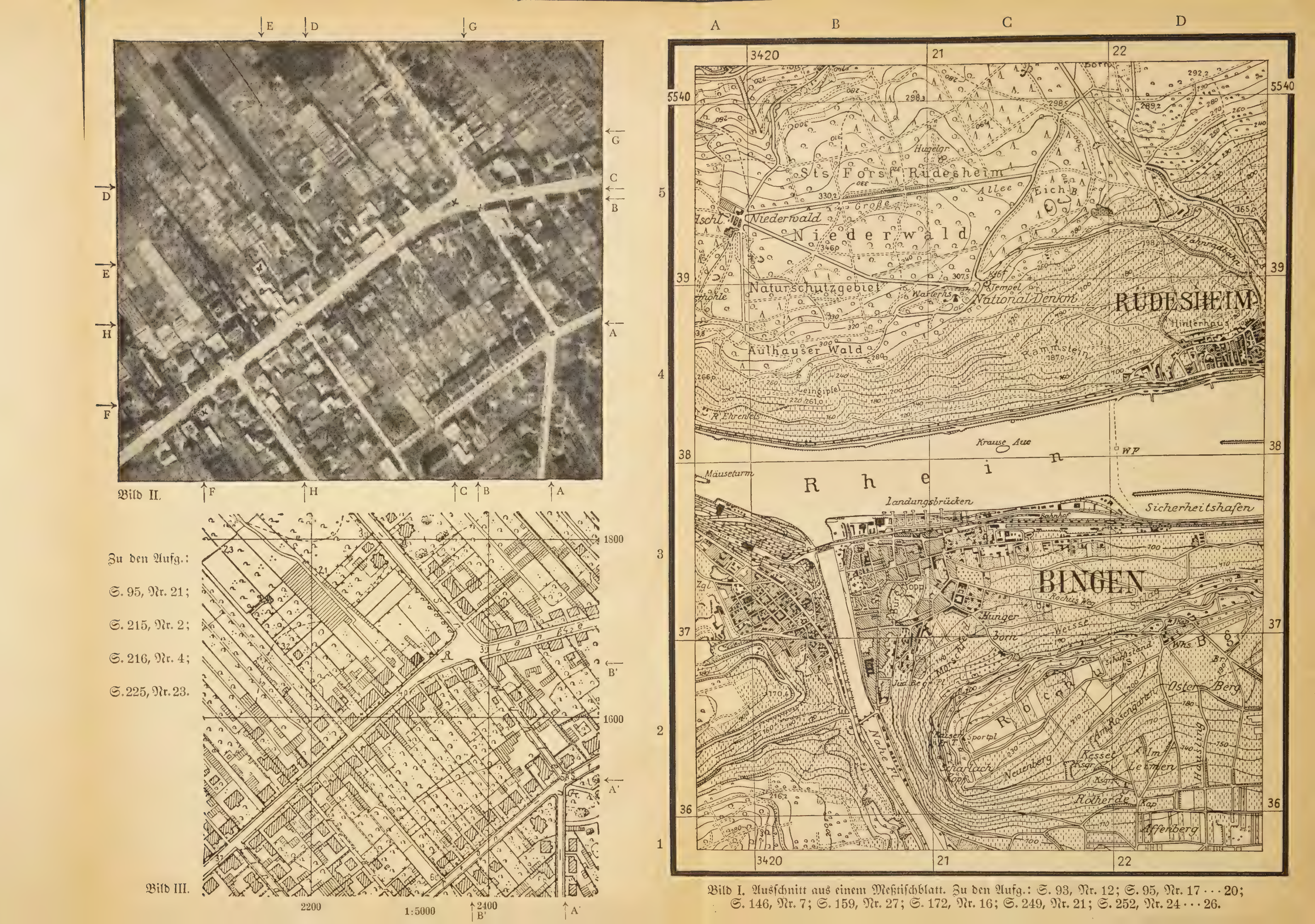


Bild II.

Zu den Aufg.:

S. 95, Nr. 21;

S. 215, Nr. 2;

S. 216, Nr. 4;

S. 225, Nr. 23.

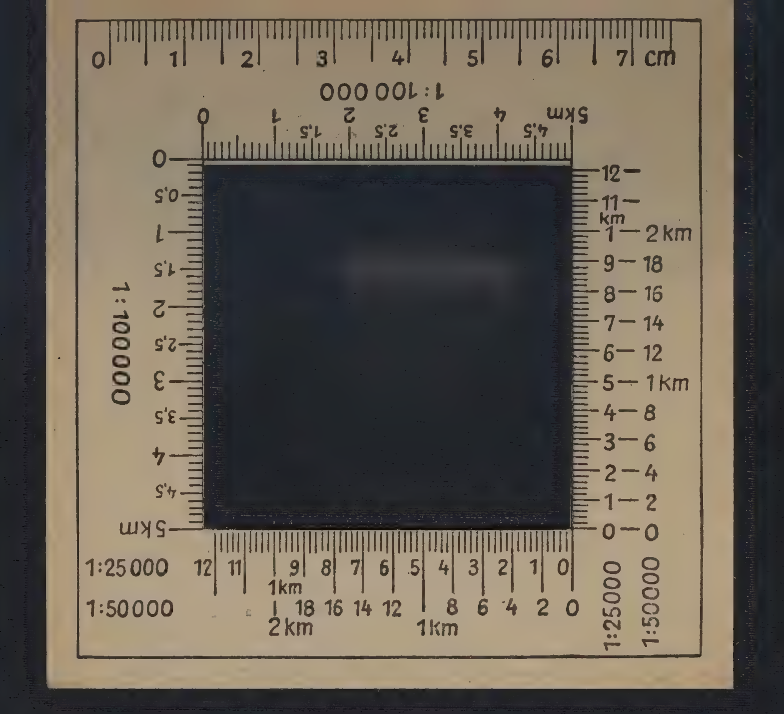
Bild III.

Bild I. Ausschnitt aus einem Meßtischblatt. Zu den Aufg.: S. 93, Nr. 12; S. 95, Nr. 17 · · · 20; S. 146, Nr. 7; S. 159, Nr. 27; S. 172, Nr. 16; S. 249, Nr. 21; S. 252, Nr. 24 · · · 26.

Planzeiger zu
1:25000; 1:50000; 1:100000



Beilage zu Köhler-Graf,
Mathem. Unterrichtswerk Band II



cm
1:100000
5km
1:25000
1:50000
1km
2km

Tafel 1: $\sqrt{n}$, $\sqrt[3]{n}$, n^3, Kreisumfang und -inhalt.

n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{n^3}{100}$ 1)	$2\pi n$	πn^2	n	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\frac{n^3}{100}$ 1)	$2\pi n$	πn^2
1	1,000	1,000	0,01	6,283	3,142	51	7,141	3,708	1327	320,4	8 171
2	414	260	0,08	12,57	12,57	52	211	733	1406	326,7	8 495
3	732	442	0,27	18,85	28,27	53	280	756	1489	333,0	8 825
4	2,000	587	0,64	25,13	50,27	54	348	780	1575	339,3	9 161
5	236	710	1,25	31,42	78,54	55	416	803	1664	345,6	9 503
6	2,449	1,817	2,16	37,70	113,1	56	7,483	3,826	1756	351,9	9 852
7	646	913	3,43	43,98	153,9	57	550	849	1852	358,1	10 210
8	828	2,000	5,12	50,27	201,1	58	616	871	1951	364,4	10 570
9	3,000	080	7,29	56,55	254,5	59	681	893	2054	370,7	10 940
10	162	154	10,00	62,83	314,2	**60**	746	915	2160	377,0	11 310
11	3,317	2,224	13,31	69,12	380,1	61	7,810	3,936	2270	383,3	11 690
12	464	289	17,28	75,40	452,4	62	874	958	2383	389,6	12 080
13	606	351	21,97	81,68	530,9	63	937	979	2500	395,8	12 470
14	742	410	27,44	87,96	615,8	64	8,000	4,000	2621	402,1	12 870
15	873	466	33,75	94,25	706,9	65	062	021	2746	408,4	13 270
16	4,000	2,520	40,96	100,5	804,2	66	8,124	4,041	2875	414,7	13 680
17	123	571	49,13	106,8	907,9	67	185	062	3008	421,0	14 100
18	243	621	58,32	113,1	1018	68	246	082	3144	427,3	14 530
19	359	668	68,59	119,4	1134	69	307	102	3285	433,5	14 960
20	472	714	80,00	125,7	1257	**70**	367	121	3430	439,8	15 390
21	4,583	2,759	92,61	131,9	1385	71	8,426	4,141	3579	446,1	15 840
22	690	802	106,5	138,2	1521	72	485	160	3732	452,4	16 290
23	796	844	121,7	144,5	1662	73	544	179	3890	458,7	16 740
24	899	884	138,2	150,8	1810	74	602	198	4052	465,0	17 200
25	5,000	924	156,3	157,1	1963	75	660	217	4219	471,2	17 670
26	5,099	2,962	175,8	163,4	2124	76	8,718	4,236	4390	477,5	18 150
27	196	3,000	196,8	169,6	2290	77	775	254	4565	483,8	18 630
28	292	037	219,5	175,9	2463	78	832	273	4746	490,1	19 110
29	385	072	243,9	182,2	2642	79	888	291	4930	496,4	19 610
30	477	107	270,0	188,5	2827	**80**	944	309	5120	502,7	20 110
31	5,568	3,141	297,9	194,8	3019	81	9,000	4,327	5314	508,9	20 610
32	657	175	327,7	201,1	3217	82	055	344	5514	515,2	21 120
33	745	208	359,4	207,3	3421	83	110	362	5718	521,5	21 640
34	831	240	393,0	213,6	3632	84	165	380	5927	527,8	22 170
35	916	271	428,8	219,9	3848	85	220	397	6141	534,1	22 700
36	6,000	3,302	466,6	226,2	4072	86	9,274	4,414	6361	540,4	23 240
37	083	332	506,5	232,5	4301	87	327	431	6585	546,6	23 780
38	164	362	548,7	238,8	4536	88	381	448	6815	552,9	24 330
39	245	391	593,2	245,0	4778	89	434	465	7050	559,2	24 880
40	325	420	640,0	251,3	5027	**90**	487	481	7290	565,5	25 450
41	6,403	3,448	689,2	257,6	5281	91	9,539	4,498	7536	571,8	26 020
42	481	476	740,9	263,9	5542	92	592	514	7787	578,1	26 590
43	557	503	795,1	270,2	5809	93	644	531	8044	584,3	27 170
44	633	530	851,8	276,5	6082	94	695	547	8306	590,6	27 760
45	708	557	911,3	282,7	6362	95	747	563	8574	596,9	28 350
46	6,782	3,583	973,4	289,0	6648	96	9,798	4,579	8847	603,2	28 950
47	856	609	1038	295,3	6940	97	849	595	9127	609,5	29 560
48	928	634	1106	301,6	7238	98	899	610	9412	615,8	30 170
49	7,000	659	1176	307,9	7543	99	950	626	9703	622,0	30 790
50	7,071	3,684	1250	314,2	7854	**100**	10,000	4,642	10000	628,3	31 420

1) Beispiel a): $38^3 = ?$ — Beachte $\frac{38^3}{100} = 548,7$ also $38^3 \approx 54870$.

Beispiel b): $1,8^3 = \frac{18^3}{10^3} = \frac{18^3}{100} \cdot \frac{1}{10} = \frac{58,32}{10} = 5,832$.

Tafel 2: **Quadratzahlen von 1,00**

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
1,0	1,000	1,020	1,040	1,061	1,082	1,103	1,124	1,145	1,166	1,188	22
1,1	1,210	1,232	1,254	1,277	1,300	1,323	1,346	1,369	1,392	1,416	24
1,2	1,440	1,464	1,488	1,513	1,538	1,563	1,588	1,613	1,638	1,664	26
1,3	1,690	1,716	1,742	1,769	1,796	1,823	1,850	1,877	1,904	1,932	28
1,4	1,960	1,988	2,016	2,045	2,074	2,103	2,132	2,161	2,190	2,220	30
1,5	2,250	2,280	2,310	2,341	2,372	2,403	2,434	2,465	2,496	2,528	32
1,6	2,560	2,592	2,624	2,657	2,690	2,723	2,756	2,789	2,822	2,856	34
1,7	2,890	2,924	2,958	2,993	3,028	3,063	3,098	3,133	3,168	3,204	36
1,8	3,240	3,276	3,312	3,349	3,386	3,423	3,460	3,497	3,534	3,572	38
1,9	3,610	3,648	3,686	3,725	3,764	3,803	3,842	3,881	3,920	3,960	40
2,0	4,000	4,040	4,080	4,121	4,162	4,203	4,244	4,285	4,326	4,368	42
2,1	4,410	4,452	4,494	4,537	4,580	4,623	4,666	4,709	4,752	4,796	44
2,2	4,840	4,884	4,928	4,973	5,018	5,063	5,108	5,153	5,198	5,244	46
2,3	5,290	5,336	5,382	5,429	5,476	5,523	5,570	5,617	5,664	5,712	48
2,4	5,760	5,808	5,856	5,905	5,954	6,003	6,052	6,101	6,150	6,200	50
2,5	6,250	6,300	6,350	6,401	6,452	6,503	6,554	6,605	6,656	6,708	52
2,6	6,760	6,812	6,864	6,917	6,970	7,023	7,076	7,129	7,182	7,236	54
2,7	7,290	7,344	7,398	7,453	7,508	7,563	7,618	7,673	7,728	7,784	56
2,8	7,840	7,896	7,952	8,009	8,066	8,123	8,180	8,237	8,294	8,352	58
2,9	8,410	8,468	8,526	8,585	8,644	8,703	8,762	8,821	8,880	8,940	60
3,0	9,000	9,060	9,120	9,181	9,242	9,303	9,364	9,425	9,486	9,548	62
3,1	9,610	9,672	9,734	9,797	9,860	9,923	9,986	10,05	10,11	10,18	6
3,2	10,24	10,30	10,37	10,43	10,50	10,56	10,63	10,69	10,76	10,82	7
3,3	10,89	10,96	11,02	11,09	11,16	11,22	11,29	11,36	11,42	11,49	7
3,4	11,56	11,63	11,70	11,76	11,83	11,90	11,97	12,04	12,11	12,18	7
3,5	12,25	12,32	12,39	12,46	12,53	12,60	12,67	12,74	12,82	12,89	7
3,6	12,96	13,03	13,10	13,18	13,25	13,32	13,40	13,47	13,54	13,62	7
3,7	13,69	13,76	13,84	13,91	13,99	14,06	14,14	14,21	14,29	14,36	8
3,8	14,44	14,52	14,59	14,67	14,75	14,82	14,90	14,98	15,05	15,13	8
3,9	15,21	15,29	15,37	15,44	15,52	15,60	15,68	15,76	15,84	15,92	8
4,0	16,00	16,08	16,16	16,24	16,32	16,40	16,48	16,56	16,65	16,73	8
4,1	16,81	16,89	16,97	17,06	17,14	17,22	17,31	17,39	17,47	17,56	8
4,2	17,64	17,72	17,81	17,89	17,98	18,06	18,15	18,23	18,32	18,40	9
4,3	18,49	18,58	18,66	18,75	18,84	18,92	19,01	19,10	19,18	19,27	9
4,4	19,36	19,45	19,54	19,62	19,71	19,80	19,89	19,98	20,07	20,16	9
4,5	20,25	20,34	20,43	20,52	20,61	20,70	20,79	20,88	20,98	21,07	9
4,6	21,16	21,25	21,34	21,44	21,53	21,62	21,72	21,81	21,90	22,00	9
4,7	22,09	22,18	22,28	22,37	22,47	22,56	22,66	22,75	22,85	22,94	10
4,8	23,04	23,14	23,23	23,33	23,43	23,52	23,62	23,72	23,81	23,91	10
4,9	24,01	24,11	24,21	24,30	24,40	24,50	24,60	24,70	24,80	24,90	10
5,0	25,00	25,10	25,20	25,30	25,40	25,50	25,60	25,70	25,81	25,91	10
5,1	26,01	26,11	26,21	26,32	26,42	26,52	26,63	26,73	26,83	26,94	10
5,2	27,04	27,14	27,25	27,35	27,46	27,56	27,67	27,77	27,88	27,98	11
5,3	28,09	28,20	28,30	28,41	28,52	28,62	28,73	28,84	28,94	29,05	11
5,4	29,16	29,27	29,38	29,48	29,59	29,70	29,81	29,92	30,03	30,14	11
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

Beispiele: a) $4{,}32^2 = 18{,}66$ b) $43{,}2^2 = 4{,}32^2 \cdot 10^2 = 1866$

c) $6{,}732^2 = (45{,}29 + 0{,}03) = 45{,}32$ $\frac{10}{14} = \frac{2}{x}$; $x = \frac{28}{10} \approx 3$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D
5,5	30,25	30,36	30,47	30,58	30,69	30,80	30,91	31,02	31,14	31,25	11
5,6	31,36	31,47	31,58	31,70	31,81	31,92	32,04	32,15	32,26	32,38	11
5,7	32,49	32,60	32,72	32,83	32,95	33,06	33,18	33,29	33,41	33,52	12
5,8	33,64	33,76	33,87	33,99	34,11	34,22	34,34	34,46	34,57	34,69	12
5,9	34,81	34,93	35,05	35,16	35,28	35,40	35,52	35,64	35,76	35,88	12
6,0	36,00	36,12	36,24	36,36	36,48	36,60	36,72	36,84	36,97	37,09	12
6,1	37,21	37,33	37,45	37,58	37,70	37,82	37,95	38,07	38,19	38,32	12
6,2	38,44	38,56	38,69	38,81	38,94	39,06	39,19	39,31	39,44	39,56	13
6,3	39,69	39,82	39,94	40,07	40,20	40,32	40,45	40,58	40,70	40,83	13
6,4	40,96	41,09	41,22	41,34	41,47	41,60	41,73	41,86	41,99	42,12	13
6,5	42,25	42,38	42,51	42,64	42,77	42,90	43,03	43,16	43,30	43,43	13
6,6	43,56	43,69	43,82	43,96	44,09	44,22	44,36	44,49	44,62	44,76	13
6,7	44,89	45,02	45,16	45,29	45,43	45,56	45,70	45,83	45,97	46,10	14
6,8	46,24	46,38	46,51	46,65	46,79	46,92	47,06	47,20	47,33	47,47	14
6,9	47,61	47,75	47,89	48,02	48,16	48,30	48,44	48,58	48,72	48,86	14
7,0	49,00	49,14	49,28	49,42	49,56	49,70	49,84	49,98	50,13	50,27	14
7,1	50,41	50,55	50,69	50,84	50,98	51,12	51,27	51,41	51,55	51,70	14
7,2	51,84	51,98	52,13	52,27	52,42	52,56	52,71	52,85	53,00	53,14	15
7,3	53,29	53,44	53,58	53,73	53,88	54,02	54,17	54,32	54,46	54,61	15
7,4	54,76	54,91	55,06	55,20	55,35	55,50	55,65	55,80	55,95	56,10	15
7,5	56,25	56,40	56,55	56,70	56,85	57,00	57,15	57,30	57,46	57,61	15
7,6	57,76	57,91	58,06	58,22	58,37	58,52	58,68	58,83	58,98	59,14	15
7,7	59,29	59,44	59,60	59,75	59,91	60,06	60,22	60,37	60,53	60,68	16
7,8	60,84	61,00	61,15	61,31	61,47	61,62	61,78	61,94	62,09	62,25	16
7,9	62,41	62,57	62,73	62,88	63,04	63,20	63,36	63,52	63,68	63,84	16
8,0	64,00	64,16	64,32	64,48	64,64	64,80	64,96	65,12	65,29	65,45	16
8,1	65,61	65,77	65,93	66,10	66,26	66,42	66,59	66,75	66,91	67,08	16
8,2	67,24	67,40	67,57	67,73	67,90	68,06	68,23	68,39	68,56	68,72	17
8,3	68,89	69,06	69,22	69,39	69,56	69,72	69,89	70,06	70,22	70,39	17
8,4	70,56	70,73	70,90	71,06	71,23	71,40	71,57	71,74	71,91	72,08	17
8,5	72,25	72,42	72,59	72,76	72,93	73,10	73,27	73,44	73,62	73,79	17
8,6	73,96	74,13	74,30	74,48	74,65	74,82	75,00	75,17	75,34	75,52	17
8,7	75,69	75,86	76,04	76,21	76,39	76,56	76,74	76,91	77,09	77,26	18
8,8	77,44	77,62	77,79	77,97	78,15	78,32	78,50	78,68	78,85	79,03	18
8,9	79,21	79,39	79,57	79,74	79,92	80,10	80,28	80,46	80,64	80,82	18
9,0	81,00	81,18	81,36	81,54	81,72	81,90	82,08	82,26	82,45	82,63	18
9,1	82,81	82,99	83,17	83,36	83,54	83,72	83,91	84,09	84,27	84,46	18
9,2	84,64	84,82	85,01	85,19	85,38	85,56	85,75	85,93	86,12	86,30	19
9,3	86,49	86,68	86,86	87,05	87,24	87,42	87,61	87,80	87,98	88,17	19
9,4	88,36	88,55	88,74	88,92	89,11	89,30	89,49	89,68	89,87	90,06	19
9,5	90,25	90,44	90,63	90,82	91,01	91,20	91,39	91,58	91,78	91,97	19
9,6	92,16	92,35	92,54	92,74	92,93	93,12	93,32	93,51	93,70	93,90	19
9,7	94,09	94,28	94,48	94,67	94,87	95,06	95,26	95,45	95,65	95,84	20
9,8	96,04	96,24	96,43	96,63	96,83	97,02	97,22	97,42	97,61	97,81	20
9,9	98,01	98,21	98,41	98,60	98,80	99,00	99,20	99,40	99,60	99,80	20
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	D

d) $\sqrt{27{,}56} = 5{,}25$

e) $\sqrt{27{,}6} = 5{,}254 \quad \frac{11}{4} = \frac{10}{x}, \; x = \frac{40}{11} \approx 4$

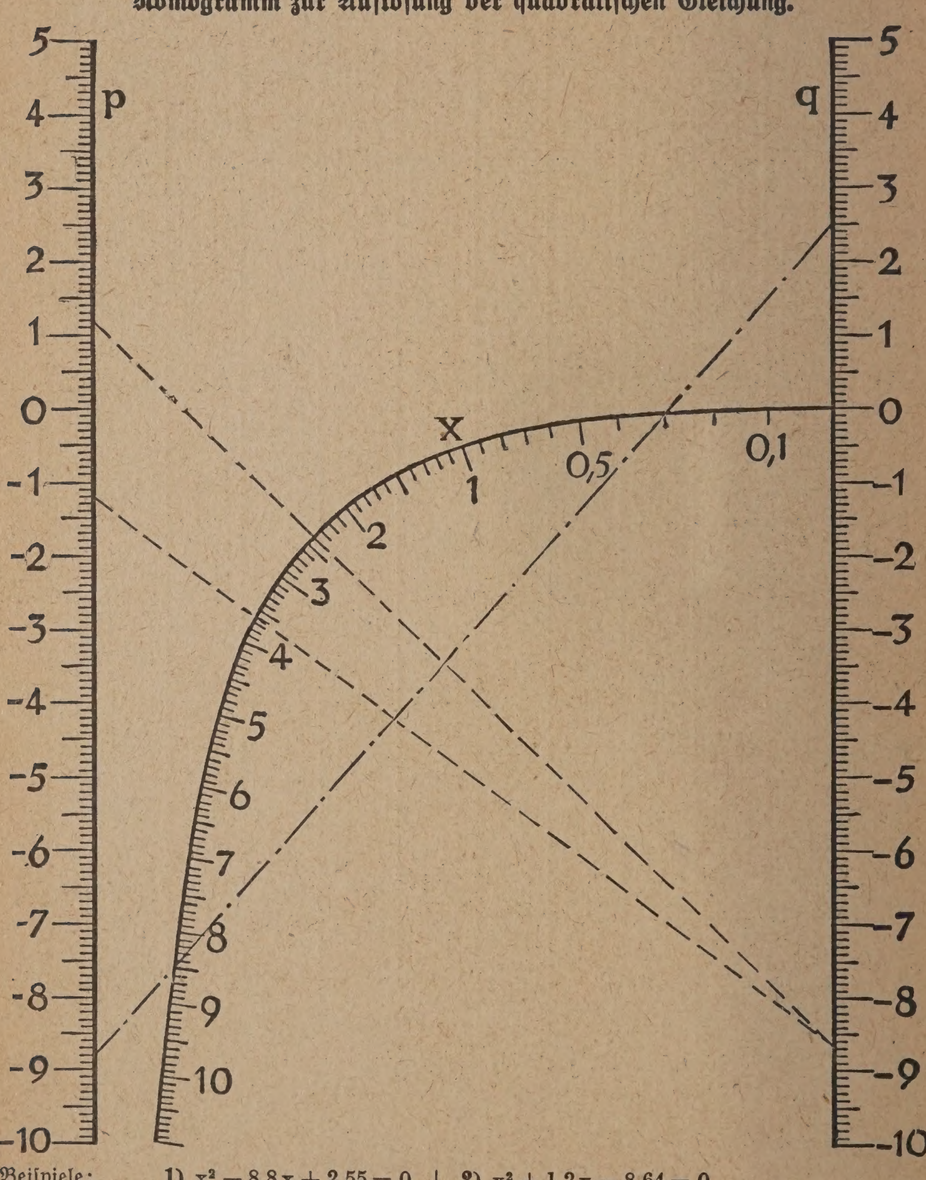
f) $\sqrt{573} = 10 \cdot \sqrt{5{,}73}$

$= 23{,}94 \quad \frac{48}{10} = \frac{18}{x}; \; x = \frac{180}{48} \approx 4$

Tafel 3: **Einige häufig gebrauchte Zahlenwerte.**

$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}5774$	$\frac{1}{\sqrt{5}} = 0{,}4771$
$\pi = 3{,}1416$	$\frac{4}{3}\pi = 4{,}189$	$\sqrt{\pi} = 1{,}772$

Nomogramm zur Auflösung der quadratischen Gleichung.



Beispiele: Der Suchstrahl liefert

1) $x^2 - 8{,}8\,x + 2{,}55 = 0$
$-\,8{,}8 \longrightarrow 2{,}55$
$x_1 = 8{,}5$ und $x_2 = 0{,}3$

2) $x^2 + 1{,}2\,x - 8{,}64 = 0$
$+\,1{,}2 \longrightarrow -\,8{,}64$ | bzw. $-\,1{,}2 \longrightarrow -\,8{,}64$
$x_1 = 2{,}4$ | $x_2 = -\,3{,}6$


UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 072426155